

Uma formulação do MEC para a simulação numérica de descontinuidades fortes

Osvaldo L. Manzoli

Departamento de Engenharia Civil
Faculdade de Engenharia - Campus de Bauru
Universidade Estadual Paulista (Unesp)
Luís Edmundo C. Coube s/n
CEP 17033-360 Bauru, SP, Brasil
Tel.: 55-14-3103 61 12; Fax: 55-14-3103 61 01
e-mail: omanzoli@feb.unesp.br

Wilson S. Venturin

Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo
Av. Dr. Carlos Botelho, 1465 - CP 359
CEP 13560-970 São Carlos, SP, Brasil
Tel.: 55-16-273 94 55; Fax: 55-16-273 94 82
e-mail: venturin@sc.usp.br; web page: <http://www.set.eesc.sc.usp.br>

Resumen

Apresenta-se uma nova formulação do MEC (Método dos Elementos de Contorno) para simulação numérica de descontinuidades fortes na mecânica de sólidos. Mediante uma decomposição adequada do campo de deslocamentos, identificam-se as distintas escalas em problemas de descontinuidades fortes. No contexto dos problemas de múltiplas escalas, as componentes associadas à região onde se concentram as deformações representam o comportamento da microestrutura e correspondem à 'escala refinada' (fine scale). A aproximação que se obtém eliminando-se a escala refinada da solução do problema corresponde à 'escala grosseira' (coarse scale). A idéia básica da presente formulação consiste em escreverem-se as equações que governam o problema em termos da 'escala grosseira', mas incorporando as informações da 'escala refinada'. As equações integrais do MEC resultantes são similares às empregadas nas formulações convencionais por colocação baseadas em deformações iniciais. Essa similaridade permite que o tratamento numérico seja efetuado sem a necessidade de utilizarem-se técnicas de sub-regiões ou soluções hipersingulares. Dessa forma, os códigos computacionais convencionais não-lineares baseados no MEC podem ser empregados também para o tratamento de descontinuidades fortes sem a necessidade de grandes alterações. Apresentam-se algumas análises numéricas representativas de sólidos elasto-plásticos a fim de ilustrar a eficiência da formulação proposta.

Palavras chave: *elementos de contorno, descontinuidades fortes, localização, múltiplas escalas.*

A BEM FORMULATION FOR NUMERICAL SIMULATION OF STRONG DISCONTINUITIES

Summary

A new Boundary Element Method for numerical simulation of strong discontinuity in solids is presented. Different scales can be recognized by an appropriate decomposition of the displacement field of solids exhibiting strong discontinuities. In a multiple scale framework, the components related to the strain concentration zone define the 'fine scale' and represent the effect of the microstructural behavior. The 'coarse scale' is achieved by removing the 'fine scale' from the total solution. The basic idea of the proposed formulation consists of obtaining the governing equations only in terms of the 'coarse scale', but preserving the 'fine scale' information. The corresponding non-linear BEM integral equations are similar to those of standard collocation approach with initial strain field applied over the domain. This similarity leads to a numerical procedure to treat discontinuities without hypersingular equations and sub-region techniques. Only small changes are required in the standard non-linear boundary element codes to make possible strong discontinuity simulations. Some representative analyses of elasto-plastic solids are performed to access the performance of the proposed formulation.

Keywords: *boundary elements, strong discontinuities, localization, multiple scale.*

INTRODUÇÃO

Durante os últimos anos desenvolveu-se uma grande quantidade de trabalhos dedicados ao estudo teórico e numérico da formação de descontinuidades na mecânica de sólidos. Esse interesse justifica-se principalmente pela necessidade de análise de aspectos relacionados à segurança em engenharia, uma vez que os mecanismos de colapso em diversos casos decorrem do predomínio que a formação das descontinuidades passa a exercer sobre o comportamento estrutural. A formação de fissuras em rocha e concreto, superfícies de deslizamento em taludes e bandas de cisalhamento em metais são alguns exemplos típicos desse fenômeno.

Entende-se como descontinuidade forte a solução de problemas de mecânica de sólidos que apresentam saltos no campo de deslocamentos através de uma superfície material (ou linha material em problemas bidimensionais). O correspondente campo de deformações, obtido mediante o gradiente material dos deslocamentos, deixa de ser limitado (*bounded*) ao longo da superfície de descontinuidade.

No campo teórico, destacam-se duas correntes distintas para modelar a formação das descontinuidades fortes.

Por um lado encontram-se os modelos fundamentados na mecânica do contínuo, nos quais considera-se que a descontinuidade é o caso limite da localização de deformações em bandas estreitas. Nesses modelos contínuos, os conceitos macroscópicos de deformações e tensões são mantidos para representar o comportamento constitutivo do material. Em meios sólidos convencionais, locais e independentes da velocidade (*rate independent*), interpreta-se que a localização decorre da formação de descontinuidades fracas, caracterizadas por deslocamentos contínuos, mas deformações descontínuas. Associa-se as referidas descontinuidades à instabilidade do material, conduzindo à perda de elipticidade local das equações de equilíbrio incrementais (bifurcação descontínua)²⁴. A ausência de um comprimento intrínseco nos meios sólidos convencionais faz com que a largura da banda de localização fique indefinida, causando dependência da discretização do domínio nas soluções numéricas. No âmbito do Método dos Elementos Finitos - MEF, diversas estratégias foram propostas com o intuito de resolver a dependência com respeito à orientação e ao tamanho dos elementos da malha^{33,23,31,19}. Os meios sólidos *regularizados*, tais como meios contínuos não-locais^{3,26}, meios contínuos de ordem superior^{1,5}, meios contínuos de Cosserat^{16,4} e meios viscoplásticos^{17,30} são capazes de gerar soluções objetivas, independentes da discretização, uma vez que apresentam intrinsecamente a dimensão da largura da banda. Entretanto apresentam um elevado custo numérico, já que necessitam de discretização muito fina para encontrar adequadamente a zona de localização.

Já nos chamados modelos discretos¹⁰, substitui-se a zona de localização por uma superfície de descontinuidade. Nesses modelos, o comportamento não-linear da zona de localização fica reduzido a uma relação constitutiva discreta entre tensões e deslocamentos relativos (saltos) na interface. A forma mais comum de tratar o modelo numericamente consiste em considerar os lábios da descontinuidade como fronteiras de sub-regiões elásticas do domínio do problema. No contexto do MEF, esse tipo de tratamento exige o conhecimento prévio da linha de descontinuidade ou técnicas sofisticadas para adaptar a malha de elementos finitos aos novos contornos que se formam durante o processo de carga¹¹. Uma forma de evitar os processos de adaptação da malha consiste na utilização de elementos que incorporam funções interpoladoras descontínuas, capazes de representar o comportamento da interface no interior do elemento^{8,14,18}.

No âmbito do MEC, os referidos problemas de adaptação da discretização são reduzidos drasticamente, posto que somente é necessário definir novos elementos pertencentes à interface entre as sub-regiões^{12,7}. Uma alternativa ao emprego de sub-regiões consiste em usar o processo de colocação no qual utiliza-se a equação integral dos deslocamentos em um lábio da descontinuidade e a equação hipersingular das forças superficiais no lábio oposto²⁷.

Outra opção para modelar descontinuidades fortes, sem a necessidade de considerar interfaces que separam o corpos em duas partes, corresponde à formulação do MEC baseada em tensões iniciais, na qual a integral de domínio sobre as regiões estreitas de localização são transformadas em integrais sobre uma superfície de descontinuidade forte idealizada^{13,32}.

Nesse trabalho será considerado o modelo alternativo proposto primeiramente por Simó e co-autores²⁸. No referido trabalho demonstrou-se que, sob determinadas condições, as relações constitutivas locais e independentes da velocidade são compatíveis com campos de deformações não-limitados, permitindo, dessa forma, o tratamento da descontinuidade forte dentro do contexto da mecânica do contínuo convencional.

As particularidades (e dificuldades) do tratamento numérico de problemas envolvendo localização (ou descontinuidades fortes), referidas anteriormente, devem-se à existência de distintas escalas no domínio físico, uma vez que a região onde as deformações se concentram é muito pequena quando comparada ao domínio do problema. No trabalho de Garikipati e Hughes⁹ apresenta-se um estudo da localização de deformações em problemas unidimensionais, dentro do contexto dos problemas de múltiplas escalas. No referido trabalho, define-se “escala grosseira” (*coarse scale*) como uma aproximação do campo exato na região de interesse. A diferença entre os campos real e grosseiro corresponde aos detalhes microestruturais da solução, denominado “escala refinada” (*fine scale*). A idéia básica consiste em gerar um modelo expresso em termos da escala grosseira, mas contendo informações referentes à microestrutura. O tratamento numérico do modelo resultante torna-se mais simples e preciso e, de certa forma, unifica algumas das formulações do MEF relacionadas anteriormente para domínios unidimensionais.

O presente trabalho explora os conceitos expostos por Garikipati e Hughes e apresenta uma alternativa de tratar problemas bidimensionais de descontinuidades fortes no contexto de múltiplas escalas. Para a extensão a duas dimensões, utiliza-se a cinemática de descontinuidades fortes proposta por Oliver²¹, empregando-se a condição de equilíbrio na interface de descontinuidade para obterem-se as equações básicas do problema somente em termos das variáveis da *escala grosseira*. As equações integrais do MEC resultantes são similares às empregadas nas formulações convencionais por colocação baseadas em deformações iniciais. Essa similaridade permite que os códigos computacionais convencionais não-lineares possam ser empregados também para o tratamento de descontinuidades fortes sem a necessidade de grandes alterações. Embora a formulação proposta aqui esteja limitada a problemas bidimensionais, o presente trabalho contém os elementos básicos para a futura extensão a casos tridimensionais.

CINEMÁTICA DE DESCONTINUIDADES FORTES

Campo de deslocamentos

Considere-se um domínio bidimensional Ω formado pelos pontos materiais $\mathbf{x}$ contendo uma linha de descontinuidade $\mathcal{S}$, que divide o domínio em duas partes Ω^+ e Ω^- (Figura 1). Sejam η e ξ eixos de um sistema curvilíneo de coordenadas, tal que $\mathcal{S}$ corresponde à linha coordenada $\eta = 0$ e seja Ω_ϕ um sub-domínio arbitrário de Ω ($\Omega_\phi \subset \Omega$) que contém a linha de descontinuidade $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} \subset \Omega_\phi$).

O campo de deslocamentos $\mathbf{u}$ pode ser decomposto adequadamente da seguinte forma²¹

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)}_{\text{parte regular}} + \underbrace{(\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x})) \llbracket \mathbf{u} \rrbracket}_{\text{parte descontínua}}(\zeta, t) \quad (1)$$

onde $\hat{\mathbf{u}}$ é a parte regular contínua, equanto o último de termo da expressão (1) corresponde à parte descontínua do campo de deslocamentos.

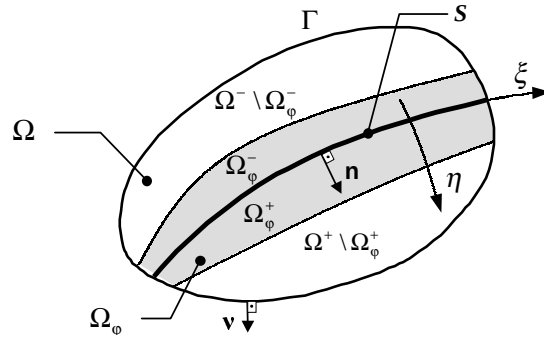


Figura 1. Domínio bidimensional descontínuo

A função $[[\mathbf{u}]]$ é contínua em Ω e representa a magnitude da salto no campo de deslocamentos ao longo de $\mathcal{S}$, $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ é a *função Heaviside* situada sobre $\mathcal{S}$ ($\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega^-$ e $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = 1 \forall \mathbf{x} \in \Omega^+$) e ϕ é uma função contínua que satisfaz a seguinte condição

$$\begin{cases} \phi = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \setminus \Omega_{\phi}^- \\ \phi = 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \setminus \Omega_{\phi}^+ \end{cases} \quad (2)$$

De acordo com a expressão (1), o salto de deslocamentos provem da operação da função de Heaviside sobre a função contínua $[[\mathbf{u}]]$.

A Figura 2 ilustra a variação das componentes do campo de deslocamentos ao longo da coordenada curvilínea η . É importante notar que, mediante a decomposição (1), a contribuição da componente da descontinuidade $[[\mathbf{u}]]$ é distinta de zero apenas no subdomínio Ω_{ϕ} , ou seja, o campo de deslocamentos é descrito apenas pela parte regular $\hat{\mathbf{u}}$ em todo o domínio externo a Ω_{ϕ} .

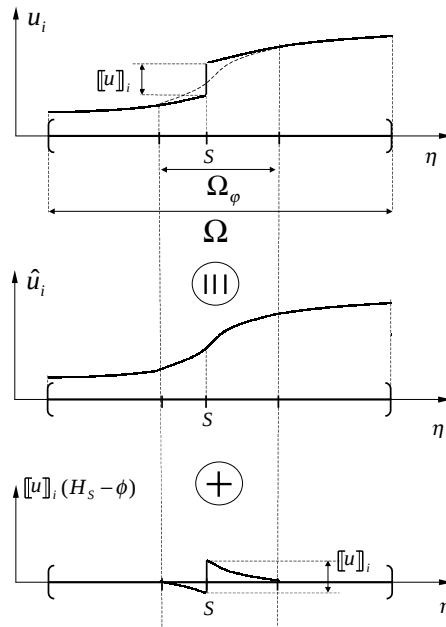


Figura 2. Decomposição do campo de deslocamentos

Campo de deformações

Fazendo-se o gradiente material do campo de deslocamentos (1), obtém-se o campo de deformações, que pode ser decomposto da seguinte forma

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla^S \mathbf{u} = \underbrace{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_{\text{parte regular}} + \boldsymbol{\epsilon}_\phi + \boldsymbol{\epsilon}_\delta \quad (3)$$

com

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \nabla^S \hat{\mathbf{u}} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_\phi = -(\nabla \phi \otimes [\mathbf{u}])^S + (\mathcal{H}_\mathcal{S} - \phi) \nabla^S [\mathbf{u}] \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_\delta = \delta_\mathcal{S} (\mathbf{n} \otimes [\mathbf{u}])^S \quad (6)$$

onde o operador $(\bullet)^S$ indica a parte simétrica de $(\bullet)$, $\mathbf{n}$ é o vetor unitário com orientação normal à linha de descontinuidade $\mathcal{S}$ (Figura 1) e $\delta_\mathcal{S}$ representa a *distribuição de Dirac* situada sobre $\mathcal{S}$, ou seja,

$$\delta_\mathcal{S} = \mu_\mathcal{S} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \quad (h \in \mathbb{R}) \quad (7)$$

onde $\mu_\mathcal{S}$ representa a *função de colocação* situada sobre $\mathcal{S}$ ($\mu_\mathcal{S}(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$, $\mu_\mathcal{S}(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S}$).

A parte regular, $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$, deriva-se da parte regular dos deslocamentos, sendo contínua e limitada em todo o domínio. A parte $\boldsymbol{\epsilon}_\phi$, que pode ser descontínua porém limitada, apresenta valores distintos de zero somente em pontos do interior de Ω_ϕ . A presença da *distribuição de Dirac* no termo $\boldsymbol{\epsilon}_\delta$ decorre do cálculo do gradiente material da *função de Heaviside* da descrição (1). Portanto, o último termo de (3) introduz característica distribucional ao campo de deformações, que deixa de ser limitado sobre $\mathcal{S}$.

No contexto dos problemas de múltiplas escalas⁹, as partes regulares da descrição cinemática (1) e (3) correspondem à solução aproximada associada à *escala grosseira*. Os termos não regulares estão relacionados aos detalhes microestruturais da região onde as deformações se concentram, associados à *escala refinada*.

EQUAÇÕES BÁSICAS

Na presença de descontinuidade forte, as equações locais de equilíbrio do sólido devem ser complementadas pelas seguintes condições de equilíbrio na interface $\mathcal{S}$

$$\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma}_+ - \boldsymbol{\sigma}_-] = \mathbf{0} \quad (8)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma}_\mathcal{S} - \boldsymbol{\sigma}_+] = \mathbf{0} \quad (\text{ou } \mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma}_\mathcal{S} - \boldsymbol{\sigma}_-] = \mathbf{0}) \quad (9)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_+$ e $\boldsymbol{\sigma}_-$ representam os tensores de tensões nos lábios da descontinuidade e $\boldsymbol{\sigma}_\mathcal{S}$ corresponde às tensões nos pontos materiais de $\mathcal{S}$.

Deve-se estabelecer a lei constitutiva que rege o comportamento mecânico do material interno e externo à linha de descontinuidade. Para isso, existem duas opções distintas. Na primeira delas, empregam-se os chamados modelos de fratura coesiva, amplamente difundidos para simular abertura de fissuras em concreto¹⁰. De maneira geral, tais modelos consideram que a região estreita onde ocorre a degradação do material (*crack process zone*) pode ser aproximada por uma superfície de descontinuidade, na qual descreve-se o comportamento não-linear mediante uma relação discreta com abrandamento (*softening*) entre o

vetor tensão e as componentes do salto de deslocamentos entre os lábios da descontinuidade. O comportamento dos pontos externos em geral é considerado elástico linear.

A outra opção consiste em utilizar a mesma lei constitutiva do domínio contínuo também para representar o comportamento dos pontos no interior da descontinuidade. Essa segunda opção foi introduzida pelo trabalho de Simó e co-autores²⁸ e posteriormente foi mais detalhada por Oliver e co-autores²². Nos referidos trabalhos demonstrou-se que, sob certas condições, as leis constitutivas do contínuo são compatíveis com deformações não-limitadas, permitindo o tratamento de descontinuidades fortes dentro do contexto da mecânica do contínuo. Nesse caso, a condição de equilíbrio na interface (9) expressa-se como

$$\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\Sigma}^c(\boldsymbol{\epsilon}_S) - \boldsymbol{\Sigma}^c(\boldsymbol{\epsilon}_+)] = 0 \quad (10)$$

onde a função $\boldsymbol{\Sigma}^c(\boldsymbol{\epsilon})$ representa, de maneira genérica, o comportamento constitutivo do material, que depende localmente das deformações $\boldsymbol{\epsilon}$, e da história das deformações ao longo do processo de carga. Os tensores $\boldsymbol{\epsilon}_S$ e $\boldsymbol{\epsilon}_+$ representam as deformações dos pontos do interior e de um dos lábios de $\mathcal{S}$, respectivamente.

De acordo com a expressão das deformações (3), a condição (10) pode ser reescrita em termos da parte regular $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ e das componentes do salto $[[\mathbf{u}]]$ como

$$\mathbf{n} \cdot \left[\boldsymbol{\Sigma}^c \left(\hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\epsilon}_\phi([[\mathbf{u}]]) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{n} \otimes [[\mathbf{u}]])^S \right) - \boldsymbol{\Sigma}^c(\hat{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\epsilon}_\phi([[\mathbf{u}]]) \right) \right] = 0 \quad (11)$$

Na equação (11), as deformações $\boldsymbol{\epsilon}_\phi$ foram escritas como funções dos saltos $[[\mathbf{u}]]$, uma vez que as funções ϕ e $\mathcal{H}_S$, assim como a normal $\mathbf{n}$, podem ser consideradas definidas *a priori*.*.

Portanto, a partir da equação (11), é possível estabelecer uma relação entre as componentes do salto e a parte regular das deformações do tipo

$$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad (12)$$

É importante salientar que, para efeitos numéricos, não é necessário obter-se a forma explícita da relação (12). Para um dado $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$, as componentes do salto podem ser obtidas localmente na interface, mediante a resolução numérica da equação não-linear (11).

Mediante a relação (12), pode-se eliminar as componentes do salto das descrições cinemáticas (1) e (3). Dessa forma, o problema passa a ser governado pelo seguinte conjunto de equações envolvendo apenas a parte regular dos deslocamentos e das deformações

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{em } \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{equilíbrio}) \quad (13)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} & \text{em } \Gamma_u \\ \mathbf{p} = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{p}} & \text{em } \Gamma_p \end{cases} \quad (\text{condições de contorno}) \quad (14)$$

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \nabla^s \hat{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{relação local entre deformações e deslocamentos}) \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad \text{em } \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{rel. constitutiva regularizada}) \quad (16)$$

*Consirera-se aqui que a descontinuidade é uma linha material previamente estabelecida.

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+ = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_- \quad \text{em } \mathcal{S} \quad (\text{equilíbrio na interface}) \quad (17)$$

onde $\mathbf{b}$ representa as forças volumétricas, $\boldsymbol{\nu}$ é o vetor unitário normal ao contorno Γ (Figura 1). Os valores $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{p}}$ correspondem, respectivamente, aos deslocamentos e forças de superfície prescritos nas partes do contorno Γ_u e Γ_p ($\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$, $\Gamma_u \cap \Gamma_p = \emptyset$).

É importante observar-se que em (16) a relação constitutiva $\boldsymbol{\Sigma}^c$ foi substituída pela relação $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$, que depende apenas da parte regular das deformações, posto que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\Sigma}^c(\boldsymbol{\epsilon}) \\ &= \boldsymbol{\Sigma}^c(\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)) \\ &= \boldsymbol{\Sigma}^c(\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}))) \\ &= \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}) \end{aligned} \quad (18)$$

Portanto, a equação (9) está implícita na equação (16).

EQUAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Forma fraca das equações básicas

Considere-se a seguinte equação usual de resíduos ponderados

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma_p} (\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{p}^* d\Gamma = 0 \quad (19)$$

onde $\mathbf{u}^*$ e $\mathbf{p}^*$ são os deslocamentos e as forças de superfície correspondentes ao campo ponderador. Integrando por partes a primeira integral de (19), obtém-se

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (20)$$

Para que o problema tenha sentido físico, as tensões em todo o domínio devem ser grandezas limitadas. Assim, levando-se em conta que $\mathcal{S}$ corresponde a um domínio de medida nula, a igualdade (20) poder ser reescrita como

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = - \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (21)$$

Integrando-se por partes a integral de domínio do segundo membro de (21), obtém-se

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = + \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_+ - \boldsymbol{\sigma}_-) \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (22)$$

Substituindo-se a identidade (22) em (19), chega-se finalmente à seguinte equação integral:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma_p} (\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma + \\ &\int_{\Gamma_u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{p}^* d\Gamma + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_+ - \boldsymbol{\sigma}_-) \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Equações integrais da formulação não-linear do MEC

No caso em que o material do sólido apresenta comportamento não-linear, as tensões podem ser obtidas de maneira genérica por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^i) \quad (24)$$

onde $\boldsymbol{\epsilon}^i$ e $\mathbf{C}$ representam, respectivamente, a parte inelástica do tensor de deformações e o tensor constitutivo elástico de quarta ordem, que apresenta as seguintes simetrias:

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad (25)$$

Levando-se em conta a descrição das deformações (3), a expressão (24) particularizada para os pontos do domínio externo à linha de descontinuidade fica dada por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\nabla \hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\epsilon}_\phi - \boldsymbol{\epsilon}^i) \quad \text{em } \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (26)$$

Para obterem-se as equações integrais do MEC, tomam-se como campos ponderadores as soluções fundamentais elásticas de Kelvin. Com certo abuso de notação, os referidos campos ponderadores devem satisfazer

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^* = \nabla \cdot (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^*) = -\delta_\zeta \mathbf{e} \quad (27)$$

onde $\mathbf{e}$ agrupa os vetores unitários da base ortogonal e δ_ζ representa a distribuição de Dirac situada no ponto singular ζ ($\delta_\zeta(\mathbf{x}) = 0$ se $\mathbf{x} \neq \zeta$, $\delta_\zeta(\mathbf{x}) = \infty$ se $\mathbf{x} = \zeta$ e $\int_\Omega \varphi(\mathbf{x}) \delta_\zeta d\Omega = \varphi(\zeta)$ $\forall \varphi(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^0(\Omega)$).

Substituindo-se a expressão da tensão (26) na equação (21) e levando-se em conta as simetrias do tensor $\mathbf{C}$, descritas em (25), obtém-se

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = - \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}^* : \nabla \hat{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}^* : (\boldsymbol{\epsilon}_\phi - \boldsymbol{\epsilon}^i) d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (28)$$

Integrando-se por partes o primeiro termo do segundo membro de (28), chega-se a

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega &= \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Omega - \int_\Gamma \mathbf{p}^* \cdot \hat{\mathbf{u}} d\Gamma + \\ &\quad - \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} (\boldsymbol{\epsilon}_\phi - \boldsymbol{\epsilon}^i) : \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (29)$$

Levando-se em conta a definição (27), ao substituir (29) em (19), obtém-se a expressão integral dos deslocamentos regulares, que pode ser escrita de forma genérica como

$$\mathbf{c}_\zeta \cdot \hat{\mathbf{u}} = \int_\Gamma \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma - \int_\Gamma \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{p}^* d\Gamma + \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} (-\boldsymbol{\epsilon}_\phi + \boldsymbol{\epsilon}^i) : \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega \quad (30)$$

onde $\mathbf{c}_\zeta$ depende da posição do ponto singular ζ . É importante observar-se que a expressão integral dos deslocamentos regulares (30) é similar à empregada na formulação usual do MEC na presença de deformações iniciais⁶. As deformações iniciais no núcleo da integral sobre $\Omega \setminus \mathcal{S}$ de (30) são constituídas pela componente não-linear e pela parte não regular das deformações, $\boldsymbol{\epsilon}_\phi$. Essa última parcela introduz o efeito do comportamento não-linear da interface.

Se o comportamento do material fora da descontinuidade for considerado elástico ($\epsilon^i = 0$ em $\Omega \setminus \mathcal{S}$), a não-linearidade será introduzida unicamente pela componente ϵ_ϕ . Nesse caso, como ϵ_ϕ é limitada e tem como suporte a região Ω_ϕ , a equação (30) fica reduzida a

$$\mathbf{c}_\zeta \cdot \hat{\mathbf{u}} = \int_{\Gamma} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{p}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega - \int_{\Omega_\phi} \epsilon_\phi : \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega \quad (31)$$

Pode-se interpretar, portanto, que os saltos dos deslocamentos em $\mathcal{S}$ são “distribuídos” de maneira consistente sobre a região Ω_ϕ , mediante a componente das deformações ϵ_ϕ .

Levando-se as expressões (26), (16) e (15) em (31), verifica-se que os deslocamentos regulares ficam expressos unicamente em termos das variáveis regulares do problema mediante

$$\mathbf{c}_\zeta \cdot \hat{\mathbf{u}} = \int_{\Gamma} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{p}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega - \int_{\Omega_\phi} \left(\mathbf{C}^{-1} : \hat{\Sigma}(\hat{\epsilon}) - \hat{\epsilon} \right) : \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega \quad (32)$$

A expressão integral das deformações regulares de um ponto interno, compatível com (32), fica dada por⁶

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon} = & \int_{\Gamma} \mathbf{p} \cdot \mathbf{U}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{P}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{U}^* d\Omega + \\ & - \int_{\Omega_\phi} \left(\mathbf{C}^{-1} : \hat{\Sigma}(\hat{\epsilon}) - \hat{\epsilon} \right) : \boldsymbol{\Sigma}^* d\Omega + \left(\mathbf{C}^{-1} : \hat{\Sigma}(\hat{\epsilon}) - \hat{\epsilon} \right) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^* \end{aligned} \quad (33)$$

As equações integrais (32) e (33) expressam o problema de descontinuidade fortes em termos das variáveis regulares, ou seja, em termos da *escala grosseira*. É importante notar que as informações correspondentes à *escala refinada* estão presentes nas referidas equações por intermédio da componente ϵ_ϕ (equação (31)), que, de certa forma, distribui o efeito do salto em $\mathcal{S}$ sobre a região Ω_ϕ .

DESCONTINUIDADES FORTES EM SÓLIDOS ELASTO-PLÁSTICOS

Leis constitutivas de elasto-plasticidade

O modelo elasto-plástico associado local e independente da velocidade pode ser escrito mediante a seguinte relação incremental entre tensões e deformações

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{cases} \mathbf{C}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} & \text{se } \gamma \neq 0 & (\text{carga plástica}) \\ \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} & \text{se } \gamma = 0 & (\text{comportamento elástico}) \end{cases} \quad (34)$$

com

$$\mathbf{C}^{ep} = \left(\mathbf{C}^{-1} + \frac{1}{H} \partial_\sigma \Phi \otimes \partial_\sigma \Phi \right)^{-1} \quad (35)$$

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = \bar{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y + q \quad (36)$$

$$\dot{q} = -H \gamma \quad (37)$$

onde $\mathbf{C}^{ep}$ representa o tensor constitutivo elasto-plástico, H é o módulo de endurecimento/abrandamento, Φ é a função de fluência, $\bar{\Phi}$ representa uma função escalar das tensões,

σ_y é a tensão de fluência uniaxial, q é o parâmetro de endurecimento e γ é o multiplicador plástico, definido pelas condições de carga e descarga de Kuhn-Tucker

$$\gamma \geq 0 \quad \Phi \leq 0 \quad \gamma \Phi = 0 \quad (38)$$

e pela condição de consistência

$$\gamma \dot{\Phi} = 0 \quad (39)$$

Análise de descontinuidade forte

A partir da derivada com relação ao tempo da descrição cinemática das deformações (3) e da forma inversa da relação (34), é possível obter-se a seguinte expressão da evolução das deformações em caso de carga plástica

$$\dot{\epsilon} = \underbrace{\hat{\epsilon} + \dot{\epsilon}_\phi}_{\text{limitado}} + \underbrace{\delta_S (\mathbf{n} \otimes [\![\dot{\mathbf{u}}]\!])^s}_{=\dot{\epsilon}_\delta \text{ (não limitado)}} = \underbrace{\mathbf{C}^{-1} : \dot{\sigma}}_{\text{limitado}} + \underbrace{\frac{1}{H} (\partial_\sigma \Phi \otimes \partial_\sigma \Phi) : \dot{\sigma}}_{\text{limitado}} \quad (40)$$

Para que a equação (40) tenha sentido matemático, é necessário que haja uma correspondência entre os termos não-limitados da igualdade. Portanto, a fim de que as tensões sejam grandezas limitadas, o inverso do módulo de endurecimento/abrandamento deve ter caráter distribucional, ou seja

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{\overline{H}} \delta_S \quad (41)$$

onde $\overline{H}$ é o módulo de endurecimento intrínseco²⁰.

O módulo $\overline{H}$ é negativo e está relacionado com a energia consumida na formação da unidade de superfície de descontinuidade, que, no contexto da *mecânica de fratura não-linear*, corresponde à energia de fratura G_f ²⁰.

A correspondência entre os termos não-limitados da igualdade (40) conduz à seguinte equação

$$(\mathbf{n} \otimes [\![\dot{\mathbf{u}}]\!])^s = \frac{1}{\overline{H}} (\partial_\sigma \Phi \otimes \partial_\sigma \Phi) : \dot{\sigma} \quad (42)$$

da qual é possível estabelecer as condições consistentes com o início da descontinuidade forte, assim como a orientação da normal $\mathbf{n}$ correspondente^{22,15}.

APROXIMAÇÃO NUMÉRICA

Para a solução numérica das equações (32) e (33), é necessário discretizar-se o contorno Γ em elementos de contorno e a subregião do domínio Ω_ϕ em células internas (Figura3b), ou seja

$$\Gamma = \sum_{e=1,ne} \Gamma_e$$

$$\Omega_\phi = \sum_{c=1,nc} \Omega_c$$

onde Γ_e representa cada um dos ne elementos de contorno e Ω_c corresponde ao domínio de cada uma das nc células que constituem a região Ω_ϕ .

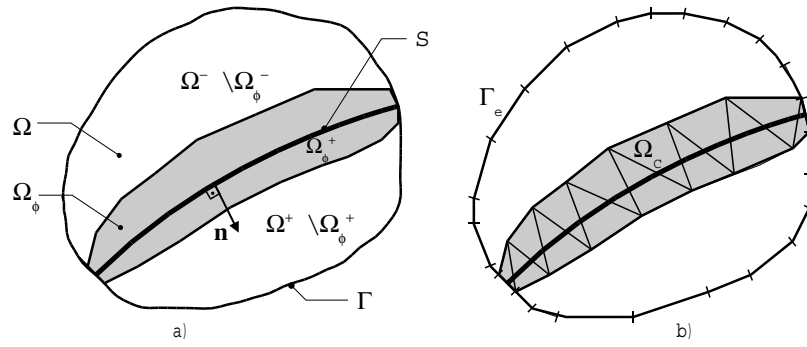


Figura 3. Sólido bidimensional descontínuo: a) definição do problema, b) discretização do contorno e da região Ω_ϕ

Dessa forma, é possível aproximar-se a geometria e as variáveis do problema em termos dos valores nodais, conduzindo à seguinte forma discretizada da equação (32)

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{G}]\{\mathbf{p}\} + \{\mathbf{b}\} + [\mathbf{Q}]\left(\{\mathbf{C}^{-1} : \hat{\Sigma}(\hat{\epsilon})\} - \{\hat{\epsilon}\}\right) \quad (43)$$

onde os vetores $\{\mathbf{u}\}$ e $\{\mathbf{p}\}$ agrupam os valores nodais dos deslocamentos e forças superficiais no contorno, respectivamente, e o vetor $\{\hat{\epsilon}\}$ corresponde às deformações regulares nodais das células internas. Agrupando-se as incógnitas do contorno em um único vetor $\{\mathbf{y}\}$, a equação (43) fica reescrita como

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{y}\} = \{\mathbf{f}\} + [\mathbf{Q}]\left(\{\mathbf{C}^{-1} : \hat{\Sigma}(\hat{\epsilon})\} - \{\hat{\epsilon}\}\right) \quad (44)$$

onde $\{\mathbf{f}\}$ corresponde às cargas (forças volumétricas e os valores prescritos de deslocamentos e forças de superfície no contorno).

Da mesma maneira, a equação integral das deformações (33) se expressa na forma discretizada mediante

$$\begin{aligned} \{\hat{\epsilon}\} &= -[\mathbf{H}']\{\mathbf{u}\} + [\mathbf{G}']\{\mathbf{p}\} + \{\mathbf{b}'\} + [\mathbf{Q}']\left(\{\mathbf{C}^{-1} : \hat{\Sigma}(\hat{\epsilon})\} - \{\hat{\epsilon}\}\right) \\ &= [\mathbf{A}']\{\mathbf{y}\} + \{\mathbf{f}'\} + [\mathbf{Q}']\left(\{\mathbf{C}^{-1} : \hat{\Sigma}(\hat{\epsilon})\} - \{\hat{\epsilon}\}\right) \end{aligned} \quad (45)$$

Substituindo-se $\{\mathbf{y}\}$, obtido da equação (44), na equação (45), obtém-se a seguinte equação não-linear em termos das deformações regulares:

$$\{\hat{\epsilon}\} = \{\mathbf{m}\} + [\mathbf{S}]\left(\{\mathbf{C}^{-1} : \hat{\Sigma}(\hat{\epsilon})\} - \{\hat{\epsilon}\}\right) \quad (46)$$

onde

$$\begin{aligned} \{\mathbf{m}\} &= \{\mathbf{f}'\} - [\mathbf{A}'][\mathbf{A}]^{-1}\{\mathbf{f}\} \\ \{\mathbf{S}\} &= [\mathbf{Q}'] - [\mathbf{A}'][\mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{Q}] \end{aligned}$$

É importante notar-se que $\{\mathbf{m}\}$ representa a solução puramente elástica, ou seja, aquela obtida para a mesma carga quando $\hat{\Sigma}(\hat{\epsilon}) = \mathbf{C} : \hat{\epsilon}$.

No presente trabalho, os núcleos das integrais de domínio das equações (32) e (33) são aproximados por funções constantes em cada célula. Dessa maneira, na montagem das equações (45), basta escrever-se a forma discretizada da expressão das deformações (33) para apenas um ponto de colocação no interior de cada célula. Portanto, o vetor das deformações $\{\hat{\epsilon}\}$ é constituído pelas deformações $\hat{\epsilon}_c$, correspondentes aos pontos de colocação de cada célula.

MODELO CONSTITUTIVO REGULARIZADO

Na estratégia de solução da equação não-linear (46), é necessário obter-se a tensão no interior da célula para as sucessivas deformações regulares do processo incremental e iterativo.

Observa-se que a formulação apresentada pode ser empregada para qualquer tipo de modelo constitutivo, bastando substituir-se a relação que retorna as tensões $\hat{\Sigma}$ pela correspondente ao modelo desejado. Cabe destacar também que, no caso de trabalhar-se modelos constitutivos convencionais, que não contemplem o comportamento da linha de descontinuidade, as deformações regulares se igualam às deformações totais e Ω_ϕ representa a região onde o material apresenta comportamento não-linear. Portanto, a principal diferença com respeito às formulações convencionais reside na definição da relação constitutiva regularizada, $\hat{\Sigma}$, que retorna as tensões em função das deformações regularizadas, levando em consideração o efeito da *escala refinada*, ou seja, o comportamento micro-estrutural no interior da linha de descontinuidade forte.

Nessa seção, a partir da condição de equilíbrio ao longo da linha de descontinuidade, descreve-se um procedimento para a determinação das tensões na célula em função das deformações regulares, $\sigma = \hat{\Sigma}(\epsilon)$. Considera-se que os pontos da célula externos à linha de descontinuidade permanecem elásticos.

Regularização da distribuição δ_S

A fim de obter-se uma aproximação adequada para o tratamento numérico, a distribuição delta de Dirac, δ_S , presente na componente não-regular das deformações, ϵ_δ , deve ser substituída por uma sequência definida em termos de um parâmetro de regularização k , fazendo-se²¹

$$\delta_S^k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \\ 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S} \end{cases} \quad (47)$$

A sequência converge para a distribuição delta quando k tende a zero. Para efeitos práticos, basta trabalhar-se com valores de k algumas ordens de grandeza inferior à dimensão típica do domínio do problema¹⁵.

Em decorrência da regularização (47), o módulo de abrandamento da equação constitutiva de elasto-plasticidade deve ser substituído por sua forma regularizada

$$H^k = \begin{cases} \bar{H}k & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \\ \infty & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S} \end{cases} \quad (48)$$

onde $\bar{H}$ é o módulo de abrandamento implícito, considerado como uma propriedade do material.

Construção da função ϕ

De acordo com a descrição cinemática (3), na componente ϵ_ϕ do campo de deformações intervêm a função ϕ que deve satisfazer as condições (2). Levando-se em consideração que a componente ϵ_ϕ é nula em todos os pontos externos à região Ω_ϕ , basta definir-se a função ϕ no domínio de cada célula, ou seja

$$\phi = \sum_{c=1,nc} \phi_c \quad (49)$$

onde ϕ_c representa a função definida no domínio da célula Ω_c .

Empregando-se células triangulares para discretizar Ω_ϕ , as funções ϕ_c podem ser definidas mediante funções lineares, que são escritas facilmente em termos das coordenadas dos vértices. A Figura 4 ilustra estas funções para os diferentes modos em que a linha de descontinuidade pode atravessar uma célula.

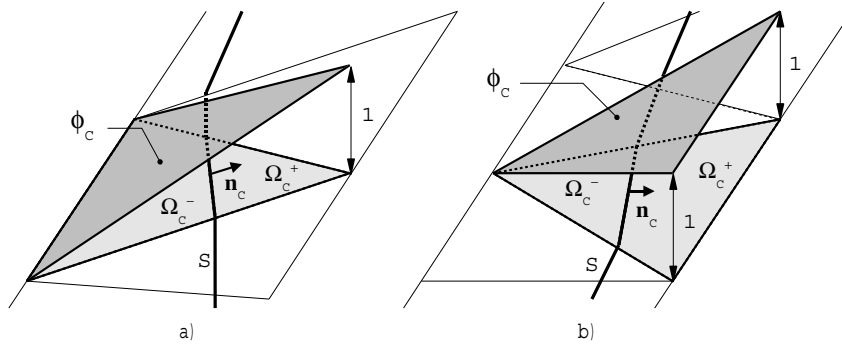


Figura 4. Construção da função ϕ no domínio da célula

Aproximação da função $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$

A forma mais simples de aproximar a função salto $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ em Ω_ϕ consiste em considerá-la constante no domínio de cada célula, ou seja

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \simeq \sum_{c=1,nc} \alpha_c \chi_c \quad (50)$$

onde α_c representa as componentes do salto do campo de deslocamento correspondente à célula Ω_c , enquanto que χ_c é a função característica (ou de colocação) no domínio de cada célula Ω_c

$$\chi_c = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_c \\ 0 & \forall \mathbf{x} \notin \Omega_c \end{cases}$$

Eliminação da escala refinada

Levando-se em consideração a definição da função ϕ (49) e a aproximação da função $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ (50), as deformações (3) em um ponto $\mathbf{x}$ do domínio de uma célula, ficam aproximadas por

$$\epsilon_c = \begin{cases} \hat{\epsilon} - (\nabla \phi_c \otimes \alpha_c)^S & \forall \mathbf{x} \in \Omega_c \setminus \mathcal{S}_c \\ \hat{\epsilon} + ((\frac{1}{k} \mathbf{n}_c - \nabla \phi_c) \otimes \alpha_c)^S & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}_c \end{cases} \quad (51)$$

onde $\mathcal{S}_c$ representa segmento da linha de descontinuidade no interior da célula Ω_c e $\mathbf{n}_c$ o correspondente vetor unitário normal.

No caso de trabalhar-se com vetores de deformações e tensões ao invés de tensores simétricos, ou seja,

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (52)$$

o campo de deformações (51) pode ser reescrito segundo um sistema cartesiano de coordenadas (x, y) como

$$\epsilon_c = \begin{cases} \hat{\epsilon} - \mathbf{G}_c \cdot \alpha_c & \forall \mathbf{x} \in \Omega_c \setminus \mathcal{S}_c \\ \hat{\epsilon} + \left(\frac{1}{k}\mathbf{N}_c - \mathbf{G}_c\right) \cdot \alpha_c & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}_c \end{cases} \quad (53)$$

com

$$\mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} \partial\phi_c/\partial x & 0 \\ 0 & \partial\phi_c/\partial y \\ \partial\phi_c/\partial y & \partial\phi_c/\partial x \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N}_c = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix}; \quad \alpha_c = \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{Bmatrix} \quad (54)$$

onde n_x e n_y são as componentes de $\mathbf{n}_c$ enquanto que α_x e α_y são as componentes do salto de deslocamentos através da linha de descontinuidade que atravessa a célula.

Considerando que os pontos externos à descontinuidade permanecem no regime elástico e que o comportamento dos pontos do interior é elasto-plástico, as tensões ficam dadas por

$$\sigma_c = \begin{cases} \mathbf{C} \cdot (\hat{\epsilon} - \mathbf{G}_c \cdot \alpha_c) & \forall \mathbf{x} \in \Omega_c \setminus \mathcal{S}_c \\ \Sigma^{ep} \left(\hat{\epsilon} + \left(\frac{1}{k}\mathbf{N}_c - \mathbf{G}_c\right) \cdot \alpha_c \right) & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}_c \end{cases} \quad (55)$$

onde $\mathbf{C}$ é a matriz das constantes elásticas e a função Σ^{ep} representa, de maneira genérica, a relação constitutiva elasto-plástica convencional com abrandamento regularizado (eq. (48)).

A condição de equilíbrio de forças de superfície (9) fica dada por $[\mathbf{N}_c]^T (\sigma_{\mathcal{S}} - \sigma_+) = \mathbf{0}$ em $\mathcal{S}$ ou, considerando-se a equação (55), por

$$[\mathbf{N}_c]^T \cdot \left(\Sigma^{ep} \left(\hat{\epsilon} + \left(\frac{1}{k}\mathbf{N}_c - \mathbf{G}_c\right) \cdot \alpha_c \right) - \mathbf{C} \cdot (\hat{\epsilon} - \mathbf{G}_c \cdot \alpha_c) \right) = \mathbf{0} \quad \text{em } \mathcal{S}_c \quad (56)$$

Portanto, para uma dada deformação regular da célula, $\hat{\epsilon}_c$, a equação de equilíbrio não-linear (56) pode ser resolvida numericamente, fornecendo os valores do salto, α_c , correspondentes. Uma vez determinadas as componentes do salto, as tensões em qualquer ponto da célula podem ser calculadas mediante a equação (55). É importante observar-se que as matrizes $\mathbf{G}_c$ e $\mathbf{N}_c$ são consideradas constantes, uma vez que ϕ_c depende da geometria da célula e as componentes de $\mathbf{n}_c$ permanecem inalteradas após a formação da descontinuidade forte.

A fim de extrair-se α_c da equação não-linear (56) para um determinado estado de deformações $\hat{\epsilon}_c$, adota-se o esquema iterativo de Newton-Raphson, no qual busca-se a solução da equação

$$\mathbf{F}(\alpha_c) = [\mathbf{N}_c]^T \cdot \left(\Sigma^{ep} \left(\hat{\epsilon}_c + \left(\frac{1}{k}\mathbf{N}_c - \mathbf{G}_c\right) \cdot \alpha_c \right) - \mathbf{C} \cdot (\hat{\epsilon}_c - \mathbf{G}_c \cdot \alpha_c) \right) = \mathbf{0} \quad (57)$$

mediante a seguinte fórmula recursiva:

$$\alpha_c^{i+1} = \alpha_c^i - \left[\frac{\partial \mathbf{F}(\alpha_c^i)}{\partial \alpha_c} \right]^{-1} \cdot \mathbf{F}(\alpha_c^i) \quad (58)$$

que permite obter-se uma aproximação melhorada α_c^{i+1} da solução, a partir da informação da iteração anterior, α_c^i .

A partir da equação (57), obtém-se

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha_c} = \mathbf{N}_c^T \cdot \left(\mathbf{C}^{ep} \cdot \left(\frac{1}{k}\mathbf{N}_c - \mathbf{G}_c\right) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{G}_c \right) \quad (59)$$

onde $\mathbf{C}^{ep} = \partial \Sigma^{ep} / \partial \boldsymbol{\epsilon}$ é a matriz constitutiva elasto-plástica.

Observa-se, portanto, que a partir da condição de equilíbrio na interface, é possível determinar-se as componentes do salto em função da parte regular das deformações da célula.

As tensões podem então ser calculadas com (55), gerando a seguinte relação constitutiva regularizada:

$$\hat{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_c) = \mathbf{C} \cdot (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_c - \mathbf{G}_c \cdot \boldsymbol{\alpha}_c(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_c)) \quad (60)$$

O operador tangente associado à relação (60), pode então ser obtido da equação (57), conduzindo a

$$\frac{\partial \hat{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_c)}{\partial \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_c} = \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{G}_c \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_c} \right]^{-1} \cdot [\mathbf{N}_c]^T \cdot (\mathbf{C}^{ep} - \mathbf{C}) \quad (61)$$

É importante destacar-se que, para uma maior eficiência do esquema de solução não-linear, a matriz constitutiva elasto-plástica, $\mathbf{C}^{ep} = \partial \Sigma^{ep} / \partial \boldsymbol{\epsilon}$, das equações (59) e (61) deve ser consistente com o algoritmo de integração das equações constitutivas de elasto-plasticidade²⁹.

RESULTADOS NUMÉRICOS

Nos exemplos analisados, embora todo o domínio do problema tenha sido subdividido em células triangulares, somente participam da solução não-linear as que fazem parte do domínio Ω_ϕ , ou seja, as que contêm a linha de descontinuidade que progride durante do processo de carga. As demais células somente servem para auxiliar no pós-processamento gráfico dos resultados.

Ensaio de fratura em concreto

Para simular a abertura de fissuras em concreto, empregou-se o modelo constitutivo elasto-plástico com

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{S}\| + p \\ \sigma_y &= f_t \end{aligned}$$

onde $p = Tr(\boldsymbol{\sigma})/3$ é a tensão média, $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I}$ é a parte desviadora de $\boldsymbol{\sigma}$ e f_t é a resistência uniaxial à tração do material. A Figura 5 ilustra o critério de fluência resultante no espaço de tensões principais $\sigma_1 - \sigma_2$. Para efeito de comparação, na figura também está representado o critério de Rankine, que limita a máxima tensão principal. Nos exemplos adotou-se $k = 10^{-2}$.

Para um melhor ajuste aos resultados experimentais, utilizou-se uma lei de abrandamento exponencial, no qual o módulo intrínseco é definido em termos da energia de fratura, G_f , mediante

$$\bar{H}(q) = -\frac{f_t}{G_f}(f_t - q) \quad (62)$$

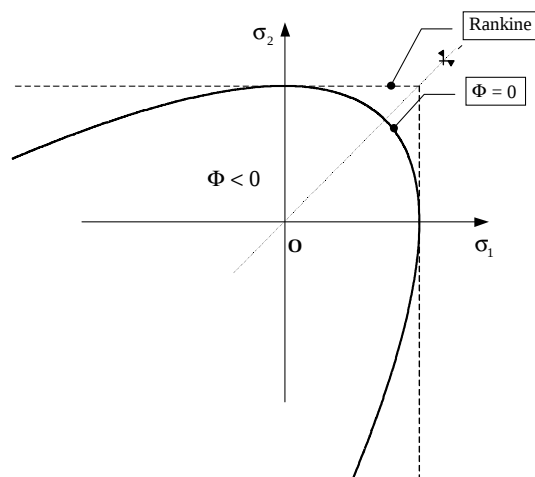


Figura 5. Critério de fluência plástica

Flexão de viga entalhada submetida a forças em três pontos

Na Figura 6 ilustram-se a geometria e as propriedades materiais da viga de concreto, provenientes dos ensaios experimentais realizados por Peterson²⁵. Tanto no ensaio experimental como na simulação numérica, foi imposto um deslocamento vertical crescente no centro da viga.

Para simular o entalhe vertical na seção central, fixou-se previamente uma linha de descontinuidade forte na posição do entalhe, para a qual considerou-se que o material encontra-se em estágio avançado de degradação, empregando-se $\sigma_y = 0,01 f_t$. Dessa forma, praticamente eliminou-se as forças superficiais de interação na superfície do entalhe.

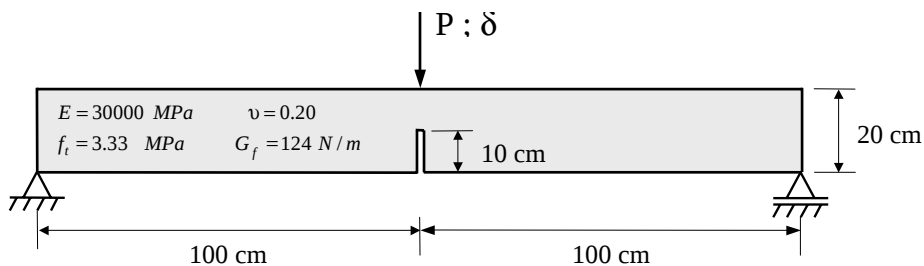


Figura 6. Ensaio de fratura em modo I

Na Figura 7 pode-se comparar a resposta estrutural obtida experimentalmente²⁵ com as obtidas numericamente mediante a formulação do MEC proposta aqui e a formulação de descontinuidades fortes pelo MEF, desenvolvida por Manzoli e co-autores¹⁵. Observa-se que as resposta numéricas predizem satisfatoriamente os resultados experimentais.

A Figura 8 mostra as posição deformada no estágio final do processo de carga. Note-se que as deformações regulares concentram-se quase totalmente nas células sombreadas, que compõem o domínio Ω_ϕ . Observa-se que a linha de descontinuidade parte da extremidade do entalhe e segue uma trajetória quase vertical com predomínio de abertura em modo I (predomínio da componente normal do salto).

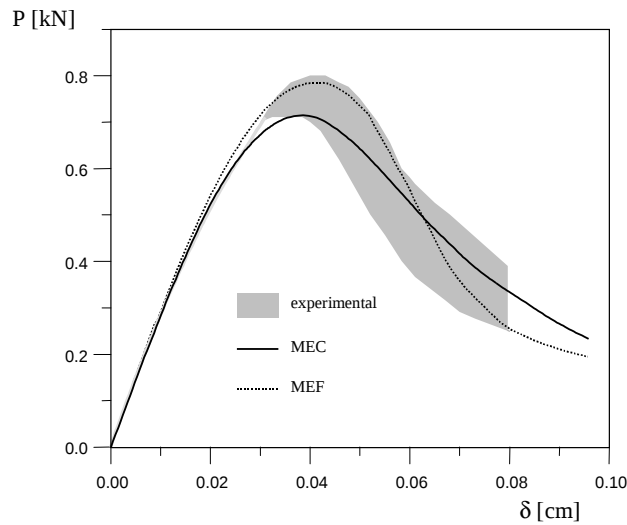


Figura 7. Resposta estrutural

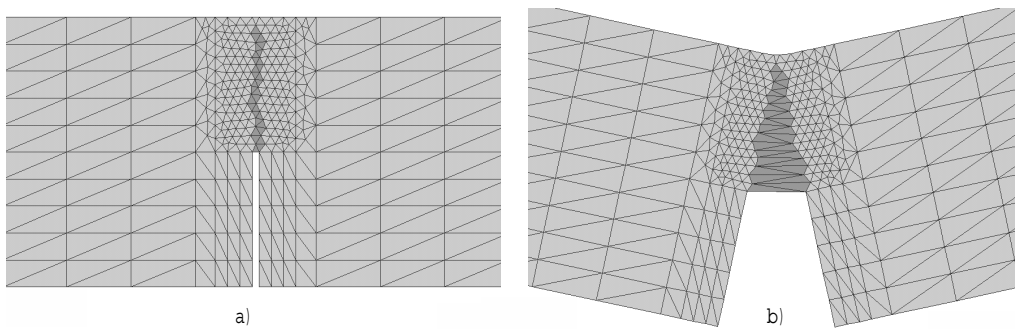


Figura 8. Resultados numéricos no estágio final do processo de carga: a) posição da linha de descontinuidade (Ω_ϕ), b) configuração deformada

Flexão de viga entalhada submetida a forças em quatro pontos

A geometria e propriedades do material do ensaio escolhido para representar fratura em Modo Misto estão ilustrados na Figura 9. Esses dados correspondem aos ensaios experimentais realizados por Arrea e Ingraffea². Para simular o entalhe, também aqui, fixou-se previamente uma linha de descontinuidade degradada ($\sigma_y = 0,01f_t$).

Os resultados numéricos foram obtidos mediante o controle da deformação específica regular horizontal ($\hat{\epsilon}_x$) da célula situada na extremidade inferior do entalhe.

A Figura 10a ilustra a discretização em células triangulares na região central, destacando-se o domínio Ω_ϕ , formado pelas células sombreadas. A partir da configuração deformada no estágio final do processo de carga (Figura 10b), constata-se que as deformações regulares concentram-se nos elementos que contêm a linha de descontinuidade. A posição e a forma da linha de descontinuidade obtida numericamente são condizentes com o experimento.

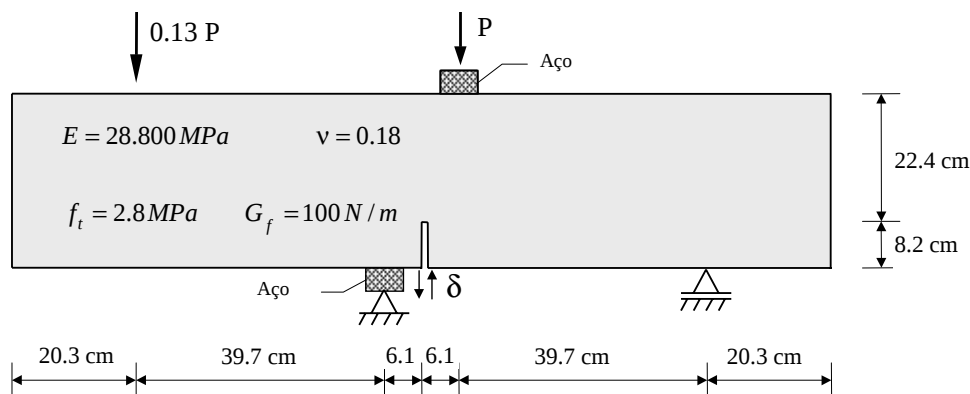


Figura 9. Ensaio de fratura em modo misto

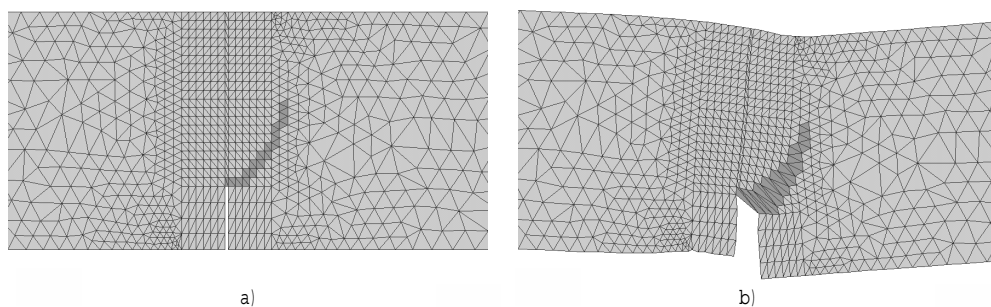


Figura 10. Resultados numéricos do ensaio de fratura em modo misto

CONCLUSÕES

As equações integrais do MEC puderam ser escritas em termos da escala *grosseira*, fazendo com que ficassem similares às equações convencionais do MEC, baseadas em deformações iniciais. Além disso, estabeleceram-se as condições para que o modelo constitutivo elasto-plástico convencional (local e independente da velocidade) fosse consistente com deformações não-limitadas, permitindo a análise de descontinuidades fortes no contexto da mecânica de meios contínuos. Conseqüentemente, a formulação para simulação numérica da propagação de descontinuidades fortes apresenta os mesmos ingredientes empregados em formulações implícitas do MEC para meios elasto-plásticos. Na presente formulação, ao invés de obterem-se as tensões diretamente mediante a relação constitutiva elasto-plástica, emprega-se uma relação constitutiva regularizada, que reflete o comportamento não-linear no interior da descontinuidade sobre a escala *grosseira*, constituída pelos domínios das células triangulares.

Os resultados numéricos demonstram que é possível simular os distintos modos de descontinuidades fortes mediante a utilização de modelos constitutivos elasto-plásticos. Além disso, verifica-se que a formulação expressa em termos das variáveis da escala *grosseira* é capaz de reproduzir adequadamente os efeitos da escala *refinada*.

No presente trabalho, o domínio é previamente dividido em células triangulares. Durante o processo de carga, as células que adquirem a linha de descontinuidade são agregadas

à região Ω_ϕ e, conseqüentemente, passam a fazer parte da equação não-linear (46). Uma opção alternativa consiste em construir células triangulares a medida que linha de descontinuidade progride durante o processo de carga.

Cabe destacar-se que, no sistema de equações (46), estão envolvidas apenas as componentes das deformações das células que contêm a linha de descontinuidade. Portanto, o esquema iterativo de solução deve ser aplicado a um sistema de equações não-lineares bastante reduzido, diminuindo muito o esforço computacional.

REFERÊNCIAS

- 1 E.C. Aifantis, "On the microstructural origin of certain inelastic models", *J. Engng. Mat. Tech. ASME*, **106**, pp. 326–334, (1984).
- 2 M. Arrea e A.R. Ingraffea, "Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete", *Dept. of Struct. Engng.*, Rep. 81-13, (1982).
- 3 Z.P. Bazant, T.B. Belytschko e T.P. Chang, "Continuum theory for strain softening", *J. Engng. Mech., ASCE*, Vol. **110**, pp. 1666–1692, (1984).
- 4 R. De Borst, "Simulation of strain localization: a reappraisal of the cosserat continuum", *Engng. Comp.*, Vol. **8**, pp. 317–332, (1991).
- 5 R. De Borst e H.B. Mühlhaus, "Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **35**, pp. 521–539, (1992).
- 6 C. A. Brebbia, J.C.F. Telles e L.C. Wrobel, *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, (1984).
- 7 Z. Cen e G. Maier, "Bifurcations and instabilities in fracture of cohesive-softening structures: a boundary element analysis", *Fatigue and Fract. Engng Mater.*, Vol. **15**, pp. 911–928, (1992).
- 8 E.N. Dvorkin, A.M. Cuitino e G. Gioia, "Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions", *Int. Journ. Num. Meth. Engng.*, **30**, pp. 541–564, (1990).
- 9 K. Garikipati e T. J. R. Hughes, "A study of strain localization in a multiple scale framework - the one-dimensional problem", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, pp. 193–222, (1998).
- 10 A. Hillerborg, M. Modeer e P.E. Petersson, "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cement and Concrete Research*, Vol. **6**, pp. 773–782, (1976).
- 11 A. R. Ingraffea e V. Saouma, *Numerical modeling fracture propagation in reforced and plain concrete*, pp. 171–225. G.C. Sih e DiTommasso, (1984).
- 12 R.Y. Liang e Y.N. Li, "Simulations of nonlinear fracture process zone in cementitious material - a boundary element approach", *Computational Mechanics*, Vol. **7**, pp. 413–427, (1991).
- 13 M.C. Lopes Jr. e W.S. Venturini, "Cohesive crack analysis by the boundary element method", In *Proc. International Conference on Computational Plasticity V*, D.R.J. Owen, E. Oñate e E. Hinton, eds., pp. 1057–1062, Barcelona, (1997). CIMNE.
- 14 H.R. Lotfi e P.B. Shing, "Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements", *Int. J. Numer. Methods Engng.*, **38**, pp. 1307–1325, (1995).
- 15 O. Manzoli, O. Oliver e M. Cervera, *Localización de deformaciones: analisis y simulación numérica de discontinuidades en la mecánica de sólidos*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), Monografía N° 44, Barcelona, (1999).
- 16 H. B. Mühlhaus e I. Vardoulakis, "The thickness of shear bands in granular materials", *Géotechnique*, Vol. **37**, pp. 271–283, (1987).

- 17 A. Needleman. "Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **67**, pp. 69–86, (1988).
- 18 U. Ohlsson e T. Olofsson, "Mixed-mode fracture and anchor bolts in concrete. analysis with inner softening bands", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. **123**, pp. 1027–1033, (1997).
- 19 J. Oliver, "A consistent characteristic length for smeared cracking models", *Int. Journ. Num. Meth. Engng.*, Vol. **28**, pp. 461–474, (1989).
- 20 J. Oliver, "Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations", parte 1: "Fundamentals", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **39**, (21) pp. 3575–3600, (1996).
- 21 J. Oliver, "Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations", parte 2: "Numerical simulation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **39**, N° 21, pp. 3601–3623, (1996).
- 22 J. Oliver, M. Cervera e O.L. Manzoli, "Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach", *Int. J. of Plasticity*, Vol. **3**, N° 15, pp. 319–351, (1999).
- 23 M. Ortiz, Y. Leroy, e A. Needleman, "A finite element method for localized failure analysis", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **61**, pp. 189–214, (1987).
- 24 N.S. Ottosen e K. Runesson, "Properties of discontinuous bifurcation solutions in elastoplasticity", *Int. J. Solids Structures*, Vol. **27**, N° 4, pp. 401–421, (1991).
- 25 P. E. Petersson, "Crack growth and development of fractures zones in plain concrete and similar materials", *Division of Building materials*, Rep. N° 1006, (1981).
- 26 G. Pijaudier Cabot e Z.P. Bazant, "Nonlocal damage theory", *Jour. Engng. Mech., A.S.C.E.*, Vol. **113**, pp. 1512–1533, (1987).
- 27 A. Portela and M. H. Aliabadi, "The dual boundary element method: effective implementation for crack problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **33**, pp. 1269–1287, (1992).
- 28 J.C. Simó, J. Oliver F. Armero, "An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids", *Computational Mechanics*, Vol. **12**, pp. 277–296, (1993).
- 29 J.C. Simó e R.L. Taylor, "Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **48**, pp. 101–118, (1985).
- 30 L.J. Sluys e R. De Borst, "Wave propagation and localisation in a rate-dependent cracked medium: Model formulation and one-dimensional examples", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. **29**, pp. 2945–2958, (1992).
- 31 P. Steinmann e K. Willam, "Performace of enhanced finite element formulations in localized failure computations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **90**, pp. 845–867, (1991).
- 32 W. S. Venturini, "A new boundary element formulation for crack analysis", In C.A. Brebbia *et al.*, eds., *Boundary Element XVI*, (1994).
- 33 O.C. Zienkiewicz, M. Huang e M. Pastor, "Localization problems in plasticity using finite elements with adaptive remeshing", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. **19**, pp. 127–148, (1995).