

**Monografías de Ingeniería Sísmica**

Editor A.H. Barbat

**Modelo numérico de elastómeros  
multi-fase y su aplicación al  
análisis de estructuras con  
aislamiento sísmico**

O. Salomón

S. Oller

A.H. Barbat

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA  
Edificio C1, Campus Norte UPC  
Gran Capitán s/n  
08034 Barcelona, España

**MONOGRAFÍAS DE INGENIERÍA SÍSMICA**

Editor A.H. Barbat

ISSN: 1134-3249

**MODELO NUMÉRICO DE ESTASTÓMEROS MULTI-FASE Y SU APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS CON AISLAMIENTO SÍSMICO**

Monografía CIMNE IS 37

© Los autores

ISBN: 84-89925-54-2

Depósito legal: B-48190-99

# Índice General

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS DE AISLAMIENTO DE BASE PARA EDIFICIOS</b>	<b>13</b>
2.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	13
2.2	CONSIDERACIONES GENERALES . . . . .	15
2.3	ELASTÓMEROS . . . . .	16
2.4	DESCRIPCIÓN DE LOS DISPOSITIVOS . . . . .	18
2.5	CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DE LOS DISPOSITIVOS . . . . .	24
2.5.1	Módulo de elasticidad transversal y rigidez horizontal . . . . .	28
2.5.2	Amortiguamiento . . . . .	31
2.5.3	Deformaciones y tensiones de rotura . . . . .	41
2.5.4	Efectos de la temperatura . . . . .	42
2.5.5	Envejecimiento . . . . .	45
2.5.6	Capacidad de carga vertical . . . . .	46
2.6	CÁLCULO DE ESTRUCTURAS CON AISLAMIENTO DE BASE . . . . .	47
2.6.1	Modelización dinámica de edificios porticados . . . . .	47
2.6.2	Teoría lineal del aislamiento de base . . . . .	50
2.6.3	Teoría no lineal del aislamiento de base . . . . .	56
<b>3</b>	<b>MODELOS CONSTITUTIVOS PARA ELASTÓMEROS</b>	<b>61</b>
3.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	61
3.2	FORMULACIÓN DE MODELOS CONSTITUTIVOS . . . . .	62

3.2.1	Leyes fundamentales de la termodinámica . . . . .	62
3.2.2	Axiomas constitutivos . . . . .	64
3.2.3	Termodinámica con variables internas . . . . .	66
3.2.4	Aproximación micro-mecánica y fenomenológica . . . . .	68
3.3	DESCRIPCIÓN DEL MODELO PROPUESTO . . . . .	69
3.4	ELASTICIDAD ISÓTROPA . . . . .	73
3.4.1	Funciones energía de deformación propuestas para elastó- meros . . . . .	75
3.4.2	Funciones energía de deformación en estiramientos principales	82
3.4.3	Función energía de deformación de Ogden . . . . .	85
3.4.4	Deformación desviadora y volumétrica . . . . .	86
3.5	VISCOELASTICIDAD . . . . .	89
3.5.1	Modelo reológico . . . . .	91
3.5.2	Modelo generalizado en grandes deformaciones . . . . .	92
3.5.3	Algoritmo de integración . . . . .	94
3.6	ELASTOPLASTICIDAD . . . . .	97
3.6.1	Modelo constitutivo elastoplástico en grandes deformaciones	98
3.6.2	Implementación. Algoritmo predictor-corrector en tensio- nes principales desviadoras . . . . .	102
<b>4</b>	<b>MODELIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA</b>	<b>107</b>
4.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	107
4.2	MODELOS CONSTITUTIVOS DE DEGRADACIÓN-PLASTI- CIDAD-VISCOSIDAD . . . . .	108
4.2.1	Energía libre y deformación . . . . .	109
4.2.2	Función de fluencia, potencial y variables internas para el problema puramente plástico . . . . .	110
4.2.3	Función límite de degradación y ley de evolución de las variables internas para el problema puramente de degradación	111
4.2.4	Definición de la variable viscosa del material . . . . .	111
4.2.5	Ecuación constitutiva secante y tangente para el problema acoplado . . . . .	112
4.3	TEORÍA DE MEZCLAS . . . . .	114
4.4	MODELO DE CAPAS EN VIGAS . . . . .	118
4.4.1	Discretización espacial . . . . .	118
4.4.2	Ecuación de equilibrio dinámico . . . . .	121
4.4.3	Análisis de las fuerzas internas . . . . .	123
4.5	ÍNDICE DE DAÑO ESTRUCTURAL . . . . .	125
4.6	ELEMENTO DE CONEXIÓN . . . . .	127

<b>5</b>	<b>IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL</b>	<b>131</b>
5.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	131
5.2	TRATAMIENTO NUMÉRICO DE LOS MODELOS CONSTITUTIVOS . . . . .	131
5.2.1	Formulación lagrangeana total y lagrangeana actualizada . . . . .	131
5.2.2	Multicampos e Integración Reducida-Selectiva . . . . .	133
5.2.3	Aplicación del método de los elementos finitos a elastómeros . . . . .	135
5.3	SIMULACIÓN NUMÉRICA . . . . .	141
5.3.1	Tracción simple, deformación homogénea. . . . .	142
5.3.2	Deformación plana no homogénea . . . . .	144
5.3.3	Dispositivo de apoyo . . . . .	147
5.3.4	Control de volumen . . . . .	152
5.3.5	Caucho natural y de alto amortiguamiento . . . . .	154
5.3.6	Elemento de conexión . . . . .	160
<b>6</b>	<b>ANÁLISIS SÍSMICO DE EDIFICIOS CON AISLAMIENTO DE BASE</b>	<b>165</b>
6.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	165
6.2	ESTRUCTURA DE UN NIVEL . . . . .	166
6.2.1	Descripción del modelo estructural . . . . .	168
6.2.2	Vibración libre . . . . .	171
6.2.3	Excitación armónica . . . . .	171
6.3	ESTRUCTURA PORTICADA DE SEIS NIVELES . . . . .	176
6.3.1	Descripción del modelo estructural . . . . .	180
6.3.2	Vibración libre . . . . .	184
6.3.3	Análisis sísmico . . . . .	186
<b>A</b>	<b>MECÁNICA DEL CONTINUO EN GRANDES DEFORMACIONES</b>	<b>205</b>
A.1	INTRODUCCIÓN . . . . .	205
A.2	CINEMÁTICA . . . . .	205
A.2.1	Campos Material y Espacial . . . . .	209
A.2.2	Gradientes material y espacial y derivadas de tiempo . . . . .	210
A.2.3	Gradiente de deformación . . . . .	210
A.2.4	Descomposición polar. Estiramientos y rotación. . . . .	212
A.2.5	Tensores de deformación . . . . .	215
A.2.6	Gradiente de velocidad. Tasa de deformación y vorticidad . . . . .	218
A.2.7	Deformaciones infinitesimales . . . . .	219
A.2.8	Invariantes de los tensores de deformación. . . . .	220

A.3 FUERZAS Y MEDIDAS DE TENSIÓN . . . . .	221
A.3.1 El vector de tensiones de Cauchy. El axioma de Cauchy . .	221
A.3.2 El axioma de balance de momento . . . . .	222
A.3.3 El tensor de tensiones de Cauchy . . . . .	223
A.3.4 El primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff . . . . .	224
A.3.5 Tensiones de Kirchhoff . . . . .	225
A.3.6 Trabajo conjugado y otras medidas de tensión . . . . .	226
A.4 OPERACIONES DE TRANSPORTE DE TENSORES . . . . .	226

<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>229</b>
---------------------	------------

# 1

## INTRODUCCIÓN

Una gran parte de la población mundial vive en regiones de alta sismicidad, con el riesgo de sufrir los efectos de terremotos de distinta severidad. Éstos pueden causar grandes daños materiales y pérdidas de vidas; sólo durante este siglo se han producido en el mundo más de 1100 terremotos fuertes, ocasionando la pérdida de vida de más de un millón y medio de personas. Ejemplos recientes demuestran el gran potencial destructivo de terremotos como los de Chile (1985), México (1985), Armenia (1988), Estados Unidos (Loma Prieta, California, 1989; Northridge, California, 1994), Colombia (1985, 1994) o Japón (Kobe 1995). Por ello, en todo el mundo se realizan investigaciones dedicadas a encontrar medidas que permitan mitigar el efecto de los desastres sísmicos.

A lo largo de los años han sido propuestas diferentes maneras de enfocar el diseño antisísmico de estructuras, todas intentando reducir los efectos que los sismos producen en ellas. Pero a pesar de los avances en la Ingeniería Sísmica y en la Ingeniería Estructural realizados en las últimas décadas, se ha incrementado el riesgo de pérdidas debidas a los terremotos. Esta afirmación puede parecer paradójica, pero debe tenerse en cuenta que en la actualidad existe una mayor concentración de población en las zonas urbanas y que en éstas predominan edificios de altura, industrias de alta tecnología, infraestructuras como autopistas e instalaciones, así como muchos edificios de alto valor histórico que han sido construidos sin diseño sismoresistente.

El mencionado incremento puede observarse si se comparan las pérdidas económicas ocasionadas por terremotos como el de San Francisco (1906) y el de Loma Prieta (1989). Las pérdidas económicas causadas por éste último sismo son del mismo orden o incluso algo superiores a las generadas por el gran terremoto de

San Francisco de comienzos del siglo, a pesar de que la la energía liberada por el sismo de San Francisco fue 63 veces superior a la del sismo de Loma Prieta. Además, el epicentro del terremoto de Loma Prieta se situó a 90 km de la ciudad, mucho más lejano que el epicentro del terremoto de San Francisco. Otro ejemplo es el terremoto de Northridge (1994), con una magnitud inferior al de Loma Prieta, el cual ha llegado a producir las enormes pérdidas de 30 billones de dólares, convirtiéndose en el más grave desastre natural de la historia de los Estados Unidos (Hall 1994) debido, entre otros motivos, a la proximidad del epicentro a zonas altamente pobladas de Los Angeles.

El diseño convencional de edificios sismorresistentes se fundamenta en los conceptos de ductilidad y redundancia estructural. La ductilidad es la capacidad de un material de deformarse plásticamente sin romperse; un material es dúctil si es capaz de deformarse de manera permanente y apreciable en el rango inelástico antes de fallar. Las fuerzas inducidas por sismos severos se reducen en función de ambos conceptos, interrelacionados con la capacidad de disipación de energía en los elementos estructurales y sus nudos (Bozzo y Barbat 1995b). La ductilidad global de un edificio se alcanza por la plastificación local de estos elementos, en particular de los extremos de barras donde es más eficiente el proporcionar detalles dúctiles. Un diseño sismorresistente racional debe garantizar que para una determinada demanda de ductilidad estructural global no se sobrepase la capacidad de ductilidad de los elementos, seccional y del material. Pero resulta difícil estimar de forma precisa la demanda de ductilidad local en cada sección de una estructura.

El criterio del diseño sismorresistente convencional requiere que el edificio soporte un sismo severo con daños locales que pueden ser importantes pero sin que se llegue al colapso de la estructura. El diseño convencional no evita los daños a los elementos estructurales frente a un sismo severo; lo único que pretende es preestablecer las zonas dañadas. Sin embargo, la reparación de los elementos principales puede ser difícil y costosa.

Por todo ello, en los últimos años se han propuesto *sistemas de aislamiento de base y disipación de energía* que localizan los fenómenos no lineales en dispositivos que no son parte de la estructura y que son sustituibles en caso de avería. El aislamiento de base desacopla el movimiento de un edificio del movimiento del terreno mediante dispositivos ubicados entre la estructura y su cimentación. El uso de *dispositivos de aislamiento* de base constituye una técnica avanzada de diseño sismorresistente que está siendo empleada en varios países, principalmente en Japón, Estados Unidos y Nueva Zelanda.

De los diversos tipos de dispositivos desarrollados para el aislamiento sísmico de base, de los cuales se hace una revisión en el Capítulo 2, los más utilizados en Estados Unidos y Japón son los de *elastómero laminado*. En Nueva Zelanda



los más utilizados son dispositivos de elastómero laminado con núcleo de plomo (SMiRT11 1991, Skinner, Robinson & McVerry 1993).

Estos dispositivos están constituidos básicamente por capas alternadas de elastómero y acero. Las capas de elastómero proporcionan una gran flexibilidad horizontal al sistema, mientras que las capas de acero aseguran su rigidez vertical. La flexibilidad horizontal de los dispositivos incrementa considerablemente el período fundamental del edificio, alejándolo del período predominante de los terremotos esperados. Esto significa un cambio en la dinámica del sistema aislado en comparación con un sistema convencional. Además, frente a un movimiento sísmico, las deformaciones se concentran en los dispositivos de aislamiento, reduciéndose los desplazamientos relativos entre los pisos del edificio y por lo tanto eliminándose o disminuyéndose los posibles daños por plastificación de los componentes estructurales así como los daños en los componentes no estructurales. Adicionalmente, utilizando elastómeros de alto amortiguamiento o incorporando un núcleo de plomo en los dispositivos, éstos pueden disipar una importante cantidad de energía.

La reducción de desplazamientos relativos entre pisos en los edificios con aislamiento sísmico hace que los requerimientos de ductilidad sean mínimos en estas estructuras y más simple la instalación de cerramientos y componentes no estructurales, con lo cual los costos de los edificios con aislamiento de base no son necesariamente superiores a los de edificios convencionales de base fija o pueden ser incluso menores. Skinner et al. (1993) señalan que los costos de edificios con aislamiento sísmico en Nueva Zelanda usualmente varían en  $\pm(5 \div 10)\%$  con relación a edificios de base fija.

Los dispositivos de apoyo de elastómero laminado son utilizados en diversas áreas de la ingeniería. En el campo de la ingeniería estructural, vienen siendo utilizados en el apoyo de tableros de puentes, con el objetivo principal de absorber los movimientos generados por expansión y contracción térmica de éstos. En ingeniería mecánica, estos dispositivos son utilizados en el apoyo de maquinaria para el control de las vibraciones que éstas producen. En ingeniería ferroviaria se han propuesto e instalado a nivel experimental como apoyo de traviesas para mitigar los efectos de las vibraciones sobre edificios construidos en zonas residenciales próximas a líneas férreas (Castellani, Kajon, Panzeri & Pezzoli 1998).

Esta diversidad de aplicaciones condujo a que los dispositivos de apoyo elastomérico hayan sido investigados experimentalmente con cierta amplitud. Los primeros ensayos, de piezas de elastómeros no reforzadas con láminas de acero sometidas a esfuerzo de compresión, fueron realizados por la empresa *Dupont* en 1959 (Roeder & Stanton 1983). Posteriormente se realizaron muchos otros ensayos a compresión y corte (Sanpaolesi & Angotti 1972), torsión (Hausler & Sayir 1995), compresión y torsión (Hill & Lee 1989) y ensayos de dispositivos de elastómero laminado a escala real y/o reducida con carga vertical variable e

imposición de desplazamientos horizontales cíclicos de amplitud variable hasta un 400% de deformación por esfuerzo cortante del elastómero y posterior carga hasta la rotura de los dispositivos (SMiRT11 1991, Kelly 1991*b*, Kelly 1993, Skinner et al. 1993, Kelly 1995, Fuller, Gough, Pound & Ahmadi 1997).

Por el contrario, se han publicado pocos estudios analíticos (Koh & Kelly 1989, Ali & Abdel-Ghaffar 1995, Fuller et al. 1997, Hwang & Ku 1997), lo cual no resulta sorprendente considerando las dificultades de describir numéricamente el comportamiento real de los elastómeros. Dicha descripción debería considerar grandes desplazamientos y grandes deformaciones elásticas no lineales, además de la incompresibilidad de los elastómeros y sus características disipativas, conjuntamente con el efecto de las placas de acero y en algunos casos de los núcleos de plomo.

El análisis de la respuesta de edificios con aislamiento de base desarrollado con anterioridad se realizó modelando los dispositivos de apoyo como barras cuyas características mecánicas, esencialmente rigidez y amortiguamiento, se tomaron de ensayos de tales dispositivos realizados en el laboratorio. Para la estructura se consideró un modelo elástico lineal, concentrando todas las masas a nivel de los pisos y utilizando un amortiguamiento proporcional a la rigidez elástica y masa de la estructura, difícilmente justificable en la opinión de los autores (Jané & Barbat 1992, Molinares & Barbat 1994, Barbat & Miquel-Canet 1994, Barbat & Bozzo 1997). En muy pocos casos se han considerado modelos no lineales para modelar la estructura (Malangone & Ferraioli 1998, Ferraioli & Malangone 1998).

Dentro de este criterio de análisis puede citarse a 3D-BASIS, que es una serie de programas de ordenador para el análisis de estructuras con dispositivos de aislamiento de base sujetas a movimientos sísmicos (Nagarajaiah, Reinhorn & Constantinou 1991, Nagarajaiah, Li, Reinhorn & Constantinou 1994). Fue desarrollado entre los años 1986 y 1994 en *The National Center for Earthquake Engineering Research* de la Universidad de Buffalo en colaboración con la Universidad de Missouri Columbia y otras universidades. Este programa considera a la estructura únicamente en estado elástico lineal y con un amortiguamiento estructural global (5% del amortiguamiento crítico para estructuras de hormigón armado). Programas auxiliares determinan las masas y los momentos de inercia por piso, considerando luego tres grados de libertad por planta, dos de traslación y uno de rotación, por lo que se pueden estudiar problemas con respuesta acoplada desplazamiento lateral-torsión. Los dispositivos de aislamiento se consideran mediante expresiones analíticas, disponiendo de varias opciones: elemento elástico lineal, lineal y no-lineal viscoso e histerético para dispositivos elastoméricos y de fricción (Buckle 1993). El programa ha sido utilizado como herramienta educativa en un curso de pos-grado bianual en diseño de sistemas de aislamiento de base en la Universidad de Buffalo y en la Universidad de California en Berkeley. Dentro del mismo esquema de cálculo, esto es, expresiones analíticas para los dis-

positivos de apoyo y estructura en estado elástico lineal, se encuentra el trabajo desarrollado por Pan & Yang (1996) y Deb, Paul & Thakkar (1997).

Según el conocimiento de los autores no se han publicado estudios donde se modele numéricamente, y en base a la mecánica de medios continuos, el comportamiento de edificios con aislamiento de base, aplicando, por ejemplo, el método de los elementos finitos con modelos constitutivos apropiados para los materiales estructurales (hormigón y acero) y modelos constitutivos para simular el comportamiento de los elastómeros de los dispositivos de aislamiento.

Sí se ha publicado un modelo por elementos finitos para dispositivos de elastómero laminado con núcleo de plomo y su implementación para la simulación de puentes colgantes con aislamiento sísmico (Ali & Abdel-Ghaffar 1995). En dicho trabajo el elastómero de los dispositivos es considerado exclusivamente elástico, despreciándose su capacidad de disipar energía. Esta simplificación es en parte justificable al tratarse de dispositivos donde una parte importante de su sección transversal está ocupada por un núcleo de plomo y, por lo tanto, la disipación de energía del dispositivo se considera consecuencia sólo de la presencia de este material. De ninguna manera puede despreciarse el efecto disipativo del caucho en el caso de dispositivos con elastómeros de alto amortiguamiento, o con elastómeros normales en rangos de deformación del 200% y superiores. Ali & Abdel-Ghaffar (1995) dan comparaciones con resultados experimentales para deformaciones por esfuerzo cortante inferiores al 75%; en este rango de deformaciones obtienen una muy buena aproximación.

La empresa *Bridgestone* en Japón, que ha comenzado la fabricación de dispositivos de aislamiento sísmico en 1981, parece ser la primera compañía en el mundo que ha desarrollado, luego de tres años de investigación, una técnica de análisis para estos dispositivos considerando las grandes deformaciones de los elastómeros con el método de elementos finitos (SMiRT11 1991). No se dan detalles de la formulación utilizada, pero se presentan historias de desplazamientos y aceleraciones correspondientes a simulaciones numéricas de un modelo a escala de estructura porticada, aparentemente de acero, conjuntamente con resultados de ensayos en mesa vibrante.

El trabajo desarrollado por Moore (1982) para analizar dispositivos elastoméricos mediante el método de los elementos finitos ha sido señalado por Herrmann, Hamidi, Shafigh-Nobari & Lim (1988) como de utilidad limitada debido a su excesivo costo computacional y problemas de convergencia. Los autores mencionados han desarrollado un modelo "continuo homogéneo equivalente" para el análisis de materiales compuestos por capas (Herrmann, Hamidi, Shafigh-Nobari & Lim 1988). Pero, en el análisis de dispositivos de apoyo, consideran el elastómero como un material únicamente elástico, excluyendo sus propiedades disipativas, con las limitaciones antes señaladas y utilizando una función de energía de deformación que los autores reconocen de validez no demostrada. Se utilizan tres

sistemas de coordenadas para representar el campo de desplazamientos y se incluyen variables adicionales para considerar efectos de borde y de flexión de las placas de acero, por lo que su costo computacional también resulta elevado. De los resultados numéricos presentados (Herrmann, Hamidi, Shafigh-Nobari & Ramaswamy 1988), la mayoría se centra en deformaciones verticales por esfuerzo de compresión y ninguno considera deformaciones por esfuerzos de cortante con carga cíclica horizontal que, sin duda, son las más importantes en dispositivos destinados al aislamiento sísmico de base.

Teniendo en cuenta las ventajas señaladas del aislamiento sísmico de base en comparación con el diseño convencional de estructuras sismorresistentes y considerando la escasa cantidad de modelos numéricos que permitan una simulación por ordenador de estructuras junto con sus dispositivos de aislamiento, el principal objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo numérico aplicando el método de los elementos finitos para analizar edificios con aislamiento sísmico de base, discretizando el conjunto estructura-dispositivo de aislamiento. Se pretende, de esta manera, estimar con mayor precisión la respuesta de tales sistemas y, con ello, facilitar la tarea de diseño y verificación de las mismas.

A tal efecto se consideran los siguientes objetivos parciales:

- Desarrollo de un modelo constitutivo apropiado para elastómeros. Dicho modelo constitutivo debe plantearse considerando:
  - **Grandes deformaciones elásticas.** Los elastómeros representan un claro ejemplo de material homogéneo e isótropo (a nivel macroscópico) con respuesta elástica marcadamente no lineal en grandes deformaciones. Resultados de ensayos indican deformaciones de rotura a esfuerzo cortante que varían entre 440% y 550% (SMiRT11 1991, Kelly 1991*b*, Fuller et al. 1997).
  - **Incompresibilidad.** Las grandes deformaciones elásticas de los elastómeros se producen con cambios de volumen cuasi nulos (con una dilatación  $J - 1$  del orden  $10^{-4}$ ), según se pone de manifiesto en ensayos uni y biaxiales (Ogden 1984).
  - **Visco-elasticidad y elasto-plasticidad en grandes deformaciones.** Los dispositivos de apoyo elastoméricos presentan cierto amortiguamiento; éste es más pronunciado en dispositivos construidos con elastómeros de alto amortiguamiento (*High Damping Rubber Bearing*) que en aquellos construidos con elastómero natural (*Natural Rubber Bearing*). El modelo constitutivo propuesto debe ser capaz de capturar este efecto disipativo y a tal fin se utilizan modelos visco-elásticos y elasto-plásticos.

- Incorporación del modelo constitutivo propuesto en un modelo general de análisis dinámico de estructuras por el método de elementos finitos. Dicho modelo deberá contemplar:
  - El trabajo conjunto de elementos de barra, utilizados en la discretización de edificios porticados, con elementos de estado plano, utilizados en la discretización de la base y dispositivos de aislamiento sísmico.
  - Modelos constitutivos apropiados para la simulación numérica de los materiales estructurales, esto es, modelos de degradación para materiales friccionales —hormigón— y modelos elasto-plásticos para el acero.
  - Teoría de mezclas, que permita el trabajo en conjunto de los modelos constitutivos destinados a materiales friccionales con aquellos destinados a modelar acero para la simulación numérica del hormigón armado.
  - Discretización por capas. Los modelos constitutivos precisan información de los tensores de tensión y de deformación a nivel de cada punto de integración, lo cual hace necesaria una discretización secundaria a nivel de la sección transversal de los elementos de barra, esto es, una discretización por capas.
- Aplicación de índices de daño que faciliten la evaluación del estado global de la estructura después de la ocurrencia de acciones extraordinarias como son los movimientos sísmicos.
- Estudio numérico del comportamiento de estructuras con sistemas de aislamiento de base elastomérico frente a sismos reales y su comparación con estructuras similares de base fija. El objetivo es efectuar comparaciones de:
  - Los desplazamientos del punto más alto de las estructuras respecto a la cimentación y a la base.
  - Los desplazamientos relativos máximos entre pisos.
  - Las aceleraciones absolutas del punto más alto de las estructuras.
  - Los índices globales de daño de las estructuras.

Tal como se señaló en la sección anterior, el principal objetivo de esta monografía es desarrollar un modelo numérico aplicando el método de los elementos finitos para analizar edificios con aislamiento sísmico de base, discretizando el conjunto estructura y dispositivos de aislamiento. Por lo tanto, en el **Capítulo 2**, se hace un estudio crítico exhaustivo de las características principales de los

distintos tipos de dispositivos de apoyo destinados al aislamiento sísmico de base. Posteriormente, en el mismo capítulo se estudian las propiedades mecánicas de los dispositivos de elastómero laminado, que son el tipo de dispositivos para el cual se propone un modelo numérico en los siguientes capítulos. Para finalizar el Capítulo 2 se describe el análisis numérico de estructuras con sistemas de aislamiento de base, tal como se viene haciendo este análisis hasta el momento, esto es, modelando los dispositivos de apoyo como barras y la estructura en régimen elástico lineal concentrando todas las masas a nivel de los pisos.

El **Capítulo 3** está dedicado al desarrollo teórico de modelos constitutivos destinados a simular numéricamente el comportamiento de sólidos con grandes deformaciones elásticas. El modelo constitutivo propuesto deriva de funciones de energía de deformación expresadas en función de los estiramientos principales (*principal stretches*) de los tensores de deformación y por lo tanto constituye un planteo general de elasticidad en grandes deformaciones. Posteriormente se particulariza para materiales elasto-visco-plásticos, tales como los elastómeros, utilizando para la parte elástica del comportamiento, la expresión de la energía de deformación propuesta por Ogden (1984), con lo cual se incluyen las expresiones denominadas como Mooney-Rivlin y Neo-Hooke.

La cuasi-incompresibilidad de los elastómeros es tratada a nivel constitutivo mediante descomposición multiplicativa del gradiente de deformación en sus partes desviadora y volumétrica, lo cual conduce a una descomposición aditiva de la función energía de deformación.

La disipación de energía es tratada mediante modelos de viscoelasticidad y elastoplasticidad en grandes deformaciones. Estos se consideran como modelos constitutivos básicos que representan, respectivamente, el comportamiento del caucho y de las partículas agregadas al mismo. Se utiliza la teoría de mezclas para insertar el comportamiento básico de cada sustancia en un modelo global de sólido compuesto.

En el **Capítulo 4** se desarrolla la modelización de la estructura. Se tratan modelos constitutivos elastoplásticos con degradación y/o viscosidad particularizados para pequeñas deformaciones, para ser aplicados a materiales friccionales, tales como el hormigón y para materiales metálicos elastoplásticos como el acero.

En esta monografía se supone que las estructuras apoyadas sobre los dispositivos de aislamiento antisísmico están formadas por pórticos de hormigón armado y éstos se modelan utilizando elementos de barra de Timoshenko. La sección transversal de estas barras se discretiza en capas, estando las capas internas compuestas por un único material, hormigón, y las capas externas por dos materiales, hormigón y acero. Para modelar adecuadamente estas últimas se utiliza, una vez más, la teoría de mezclas que permite el trabajo en conjunto de los modelos constitutivos destinados a materiales friccionales con aquellos destinados al acero.

El daño que puede sufrir un edificio a causa de una acción sísmica puede ser de dos tipos: *estructural*, que se produce en elementos que forman parte del sistema resistente y *no estructural*, que ocurre en los elementos que no forman parte del sistema resistente principal, incluyendo el daño arquitectónico o en los sistemas mecánicos, eléctricos, sanitarios así como en su contenido. El daño estructural depende del comportamiento de los elementos del esquema resistente, vigas, columnas, muros de corte, sistemas de piso, etc. y puede cuantificarse mediante un índice de daño global, asociado a estos elementos o a toda la estructura en conjunto, a partir de las contribuciones de índices de daño local en los distintos puntos de la estructura. El daño local se expresa mediante un índice que mide en forma objetiva la degradación de rigidez que sufre un punto material de un sólido sometido a acciones externas. Su análisis se realiza también en el Capítulo 4.

El **Capítulo 5** se divide en dos partes; en la primera se desarrolla la implementación, en un código general de elementos finitos, de los modelos constitutivos propuestos en el Capítulo 3. Especial atención se dedica al problema de la cuasi-incompresibilidad de los materiales elastoméricos y al término de presión asociado a ésta, que aquí se trata mediante técnicas de separación de variables y condensación estática. A efectos de integrar los modelos constitutivos para elastómeros en un código general de elementos finitos se implementa en éste la cinemática de grandes deformaciones en mecánica del continuo cuyos fundamentos se dan en el Apéndice.

En la segunda parte del Capítulo 5 comienza la verificación del comportamiento de los modelos implementados y a este efecto se presentan varios ejemplos:

1) Tracción simple con deformación homogénea de un bloque de elastómero. Se comparan las respuestas fuerza-deformación correspondientes a distintos modelos constitutivos (Ogden, Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) y para deformaciones de hasta siete veces el valor de la longitud original del bloque.

2) Deformación plana no homogénea. Se analiza la respuesta del modelo propuesto frente a estados de deformación fuertemente no homogéneos.

3) Dispositivo de apoyo. Se analiza un dispositivo de apoyo de elastómero laminado, cuyas características geométricas se toman de la referencia Kelly (1991*b*) y se realizan comparaciones con resultados de ensayos experimentales realizados en el *Earthquake Engineering Research Center* de la Universidad de California en Berkeley que son publicados en la citada referencia (Kelly 1991*b*). Se propone la utilización de un único elemento para modelar todo el dispositivo, con respuesta a esfuerzo cortante equivalente a la de modelar este dispositivo discretizando, en forma independiente, las laminas de elastómero y de acero.

4) Control de volumen. Se plantea un ensayo donde cuatro bloques de elastómero se colocan entre placas de acero y se imponen desplazamientos horizontales cíclicos de amplitud creciente en las placas centrales de acero, con libertad de movimientos en dirección vertical. Se calcula la deformación volumétrica en

base a la relación entre desplazamientos horizontales y verticales, para amplitudes de desplazamiento horizontal equivalentes a hasta un 400% de deformación por esfuerzo cortante.

5) Elastómero natural y de alto amortiguamiento. La componente elastomérica de los dispositivos de elastómero laminado, puede ser elastómero natural o elastómero de alto amortiguamiento. Los parámetros materiales a utilizar en el modelo varían según el tipo de material que se pretende modelar. Para cuantificar los valores de estos parámetros se analizan dispositivos de los cuales se dispone de resultados experimentales (SMiRT11 1991).

6) Elemento de conexión. Para conseguir la simulación numérica del conjunto estructura-sistema de aislamiento de base y considerando que en la discretización de la estructura se utilizan elementos de barra y en la discretización de la base y dispositivos de aislamiento elementos planos, es necesario un elemento de conexión que permita el trabajo conjunto de ambos. Se analiza la respuesta del elemento de conexión frente a varias condiciones de carga.

En el **Capítulo 6** se analizan numéricamente y en forma comparativa las respuestas de estructuras con y sin aislamiento sísmico frente a excitaciones armónicas y sísmicas. Se comparan las respuestas de un pórtico de planta única con y sin aislamiento sísmico de base. En primer término y a efectos de determinar sus características dinámicas, se analizan ambas estructuras, con y sin aislamiento sísmico, en vibración libre. A continuación se analizan las respuestas de ambas estructuras frente a dos excitaciones armónicas, una de período próximo al fundamental de la estructura de base fija y otra de período próximo al fundamental de la estructura con aislamiento de base. Los parámetros utilizados para evaluar la eficacia del sistema aislador son: desplazamientos de la base respecto a la cimentación, desplazamientos totales y relativos del dintel y aceleraciones absolutas del dintel. Luego se comparan las respuestas de un edificio de seis niveles con aislamiento sísmico de base mediante dispositivos de elastómero laminado, con las de un edificio de iguales características sin aislamiento sísmico, esto es, con base fija empotrada directamente en el terreno. Se analizan las respuestas de estas estructuras frente al terremoto de El Centro (California) de 1940, utilizando los siguientes parámetros para evaluar la eficacia del sistema aislador:

1) Los desplazamientos de la base respecto a la cimentación; que es un parámetro básico para el diseño de las instalaciones que unen el edificio con el terreno circundante.

2) Los desplazamientos del punto más alto de la estructura respecto a la cimentación y a la base, los cuales permiten evaluar la deformación global de la estructura.

3) Los desplazamientos relativos máximos entre pisos, los cuales son proporcionales a la tensión que soportan los pilares del edificio.



4) Las aceleraciones absolutas del punto más alto de la estructura, que determinan el nivel de confort para las personas dentro del edificio y pueden ser causa de daño en equipos contenidos en el edificio.

5) Los índices globales de daño de la estructura, los cuales permiten apreciar en que medida las estructuras se encuentran dañadas y, en consecuencia, si éstas continúan en servicio y, en caso negativo, si una posible reparación de la estructura puede resultar económicamente viable o sería necesaria su demolición.

En el **Apéndice** se hace una revisión de conceptos de mecánica del continuo relacionados con la cinemática de grandes deformaciones y necesarios para el desarrollo de modelos constitutivos y su implementación, Capítulos 3 y 4 de esta monografía. La revisión incluye conceptos tales como tensor gradiente de deformación, descomposición polar del tensor gradiente, tensores de estiramiento y rotación, descomposición espectral de los tensores de estiramiento, distintos tensores de deformación (Green-Lagrange, Almansi, Hencky) y de tensión (Primer y Segundo tensor de Piola-Kirchhoff, Cauchy), y operaciones de transporte de tensores entre las configuraciones de referencia y deformada.



## 2

# SISTEMAS DE AISLAMIENTO DE BASE PARA EDIFICIOS

### 2.1 INTRODUCCIÓN

La solución convencional al diseño sismo-resistente de edificios consiste en proyectar estructuras con suficiente resistencia, deformabilidad y capacidad de disipación de energía para soportar las fuerzas generadas por los terremotos. Se acepta que el movimiento del terreno transmita energía al edificio, energía que debe ser en parte disipada a fin de evitar aceleraciones excesivas y corrimientos entre los pisos que los pilares no pudieran resistir. Esta disipación se consigue mediante la plastificación de algunos elementos de la estructura, lo que causa daños mas o menos importantes a esta. Asimismo, en el diseño sismo-resistente convencional, el daño en componentes no estructurales resulta muy difícil de evitar, ya que las fuerzas dinámicas superan a las de diseño, que se calculan utilizando las normativas. Por otra parte, al vincular rígidamente el edificio al terreno, las aceleraciones que se producen en la estructura son normalmente mayores a las del terreno y pueden afectar a los equipos contenidos en el edificio.

Para evitar, o al menos reducir, estos inconvenientes aparece el concepto de aislamiento sísmico, que en diversas formas y de manera intuitiva, había sido ya aplicado en épocas pasadas. Pero dentro de la construcción antisísmica moderna este concepto es relativamente reciente y básicamente consiste en la instalación de mecanismos que aíslen la estructura y su contenido de los posibles movimientos del terreno.

A diferencia del enfoque clásico, los sistemas de aislamiento limitan los efectos del ataque sísmico sobre la estructura montándose esta sobre un mecanismo con gran flexibilidad horizontal, tal que durante un sismo estos sufran la mayor parte

de las deformaciones, aislando en lo posible la estructura de los movimientos del terreno.

El aislamiento sísmico de edificios mediante dispositivos de apoyo colocados entre la cimentación y la base se denomina *control pasivo*. Otro procedimiento utilizado para reducir las vibraciones de una estructura consiste en incorporar a ésta mecanismos, alimentados por una fuente de energía externa, capaces de ejercer fuerzas de control. Dichos mecanismos se incluyen en un lazo cerrado gobernado por un ordenador, lo que permite calcular continuamente, en tiempo real, las fuerzas de control que deben aplicarse, en función de los valores de la respuesta medida de la estructura, con el objetivo de mejorar su comportamiento (Barbat & Miquel-Canet 1994, Luo, Rodellar & Sen 1998). Estos sistemas se denominan de *control activo* y son capaces de adecuarse automáticamente a las características de la excitación, sin embargo, tienen la desventaja de que requieren un importante aporte de energía, cuyo suministro no está garantizado durante la ocurrencia de un sismo.

También se han propuesto sistemas híbridos que combinan diferentes sistemas de control pasivos y activos. Un tipo de sistema híbrido que en los últimos años ha despertado un gran interés combina un sistema de aislamiento de base con uno de control activo que aplica fuerzas sobre la misma base. La componente pasiva del sistema híbrido, que en este caso es el aislamiento de base, reduce los desplazamientos relativos y la aceleración absoluta de la estructura a costa de un desplazamiento significativo de la base. El objetivo de la componente activa es el de reducir este movimiento mediante la aplicación de fuerzas de control. Desde un punto de vista práctico, es importante que el mencionado objetivo se alcance mediante la aplicación de una única fuerza que no exceda unos valores aceptables. El desarrollo de una ley de control que permita su evaluación presenta dificultades relacionadas tanto con el comportamiento no lineal del sistema de aislamiento como con las incertidumbres asociadas a modelar el sistema global estructura-aislamiento y de la excitación.

El análisis numérico de estructuras con sistemas de control activo o con sistemas híbridos queda fuera de los objetivos de esta monografía. Si bien, al estar los dispositivos de apoyo incluidos en estos últimos, el modelo numérico aquí desarrollado para tales dispositivos es aplicable a estos sistemas para determinar el comportamiento no lineal del aislamiento de base y para modelar la respuesta del sistema global estructura-aislamiento, elementos necesarios para el desarrollo de la ley de control que se ha mencionado en el párrafo anterior.

En este capítulo se presenta en primer lugar una revisión de distintos dispositivos utilizados en el aislamiento de base. A continuación se describe el comportamiento mecánico de los dispositivos de elastómero laminado, que son el tipo de dispositivo más utilizado en el aislamiento sísmico de edificios y para los cuales se propone un modelo numérico en los siguientes capítulos de esta monografía. Por

último se hace un estudio crítico del análisis numérico de estructuras con tales dispositivos tal como ha sido realizado hasta ahora. Se remarca que las técnicas de análisis que se describen no son las utilizadas en esta monografía y se presentan aquí solo a efectos comparativos.

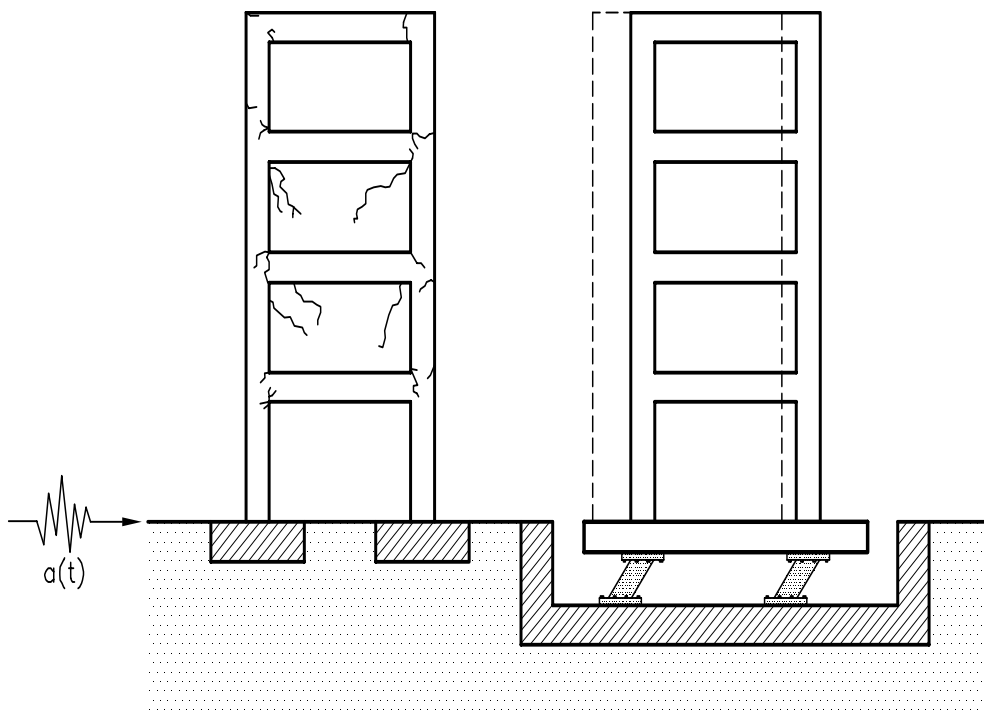
Más detalles referentes a estructuras con dispositivos de aislamiento sísmico y su análisis numérico pueden consultarse en las siguientes referencias: Bozzo & Mahin (1990), Buckle & Mayes (1990), SMiRT11 (1991), Fan, Ahmadi, Mostaghel & Tadjabakhsh (1991), Jané & Barbat (1992), Skinner et al. (1993), Molinares & Barbat (1994), Barbat & Miquel-Canet (1994), Kelly (1996) y Barbat & Bozzo (1997). La descripción del comportamiento mecánico de los dispositivos de caucho laminado que se realiza en este capítulo está basada en ensayos de laboratorio de tales dispositivos. Sobre estos y otros ensayos pueden consultarse las referencias: SMiRT11 (1991), Kelly (1991*b*), Kelly (1993), Kelly (1995), Mori, Moss, Carr & Cooke (1996) y Fuller et al. (1997).

## 2.2 CONSIDERACIONES GENERALES

Los sistemas de aislamiento de base desacoplan parcialmente la estructura de los movimientos sísmicos del terreno, mediante dispositivos instalados entre la estructura y su cimentación. En la figura 2.1 se muestra esquemáticamente la diferencia de comportamiento entre un edificio de diseño antisísmico convencional (base fija) y uno con aislamiento de base. Los edificios de base fija reducen las fuerzas dinámicas mediante plastificación de ciertas zonas de la estructura y de componentes no estructurales. Los edificios de base aislada reducen estas fuerzas mediante dispositivos que pueden ser, básicamente, una superficie con bajo coeficiente de fricción y/o capas de elastómero y acero con gran flexibilidad horizontal.

Las superficies de fricción dan lugar a dispositivos de aislamiento de base de tipo friccional, donde el parámetro principal es el coeficiente de fricción. Cuanto más bajo sea este coeficiente, mayor será la reducción de las fuerzas dinámicas. Por otra parte, en los dispositivos de tipo elastomérico, formados por capas de elastómero y acero, los parámetros principales son el período propio del dispositivo aislador y su capacidad de disipar energía. Las fuerzas dinámicas son reducidas por la modificación de las características dinámicas de la estructura mediante un corrimiento del período fundamental de vibración del edificio, alejándolo del período predominante de los terremotos esperados en la zona.

En el caso de estructuras con aislamiento de base, resulta de fundamental importancia una correcta estimación del desplazamiento máximo de la base. De acuerdo a esta estimación se fijarán las dimensiones del espacio entre la base y el terreno circundante (véase la figura 2.1). Si, en caso de movimiento sísmico, se alcanzasen desplazamientos de la base superiores a los previstos, podría producirse



**Figura 2.1** Comparación del comportamiento dinámico de un edificio convencional con base fija (izquierda) y uno con aislamiento de base (derecha).

el impacto de la base contra la cimentación. Los esfuerzos generados por este impacto podrían superar los generados por el mismo terremoto, por ello suelen colocarse *topes* para amortiguar sus efectos (Guerrero & Azevedo 1996, Allred, Billings & Shepherd 1996, Tsai 1997, Malhotra 1997).

### 2.3 ELASTÓMEROS - Breve reseña histórica

En esta monografía se utilizan indistintamente los términos *elastómero* o *caucho*, y ocasionalmente *neopreno*, para designar el material utilizado en la construcción de los dispositivos de aislamiento sísmico de base y denominado en la bibliografía anglosajona *rubber*. El término *caucho*, que deriva de la palabra nativa *caoutchouc*, originalmente se utilizó para designar el material obtenido en zonas tropicales de América del Sur de árboles *Hevea brasiliensis*. Actualmente se hace una distinción entre *caucho crudo* y *vulcanizado*; el término *elastómero* es el preferido para designar *caucho vulcanizado* (Nagdi 1993).

Durante casi una centuria todo producto de caucho ha sido fabricado con caucho crudo natural, el cual es preparado en base a un líquido lechoso de los árboles *Hevea brasiliensis* conocido como *latex natural*. Posteriormente se desarrolló el caucho crudo *sintético* producido en base a reacciones químicas con sustancias de bajo peso molecular denominadas *monómeros* que producen largas cadenas moleculares, los *polímeros*. El caucho crudo, natural o sintético, es un material plástico que puede ser deformado a altas temperaturas; las propiedades elásticas del caucho son producto de aditivos y procesos termo-químicos. El vulcanizado es uno de estos procesos en el cual las cadenas de moléculas se unen en varios puntos a lo largo de su longitud mediante uniones cruzadas (*cross-links*). A diferencia del caucho crudo, el caucho vulcanizado es un material elástico, esto es, tiene la propiedad de deformarse cuando se le aplica una fuerza y volver a su forma original cuando se retira dicha fuerza. El término elastómero deriva de polímero elástico.

El proceso de vulcanizado, descubierto por Charles Goodyear (1839) en América y patentado en 1841 (Franta 1989) o 1844 (White 1995) e independientemente por T. Hancock en Inglaterra (1843), inicia una rápida expansión en la producción y comercialización del caucho. Con el incremento en la utilización del caucho natural, el gobierno británico vio la oportunidad de desarrollar ubicaciones alternativas para su producción en sus colonias ubicadas en regiones tropicales. Es así como el gobierno británico de la India encomendó a un agente secreto el contrabando de las plantas *Hevea* desde Brasil. Éstas fueron obtenidas por H. Wickham en 1876 violando las leyes del Brasil. Las plantas fueron entregadas a Kew Gardens y luego cultivadas en forma experimental en diferentes suelos y climas de los territorios coloniales, teniendo un éxito notable en Malasia, a raíz de lo cual Wickham fue nombrado caballero por la Corona Británica. Otras plantaciones fueron establecidas por los británicos en Ceylan (Sri Lanka) y la India, por los holandeses en Indonesia, por los franceses en Vietman y por los americanos (Firestone Tire and Rubber Company) en Liberia.

Razones económicas impulsaron a laboratorios europeos, especialmente alemanes, a tratar de reproducir sintéticamente la composición química del caucho natural. Los primeros esfuerzos en este sentido se deben a Fritz Hofmann en 1906 (Bayer AG). Los monómeros fueron convertidos en caucho sintético y luego vulcanizados, pero el producto obtenido fue de calidad inferior al caucho natural vulcanizado, por lo que, a pesar de algunas aplicaciones no tuvo éxito comercial. La primera guerra mundial y el consecuente bloqueo británico condujo nuevamente a su consideración. Bayer en conjunto con BASF y Hoechst comienzan un nuevo programa de producción de caucho sintético en los años 20, al mismo tiempo la empresa Du Pont, en Delaware USA, desarrolla un caucho sintético de distinta formulación. La actividad de Japón en relación al caucho sintético se inicia en la última parte de los años 30 y no toma auge hasta fines de los 50 con

la colaboración de la empresa americana Goodyear Tire & Rubber Company con las locales Japan Synthetic Rubber Company y Bridgestone Tire Company.

Las fórmulas de cauchos industriales son raramente publicadas por los fabricantes y en general contienen, además de caucho crudo, una parte importante de agregados, aceleradores y/o activadores del proceso de vulcanizado, antioxidantes y agentes que retardan el proceso de envejecimiento, sulfuros, óxido de zinc y productos anti-llama como componentes principales. Según el monómero utilizado en la reacción química base y los distintos elementos agregados en el proceso de elaboración pueden obtenerse elastómeros de muy variadas características. En la bibliografía se mencionan unas 26 clases de elastómeros y unos 7 de elastómeros termo-plásticos; Nagdi (1993) y Franta (1989) realizan una clasificación de cauchos sintéticos de acuerdo a su composición y propiedades y una descripción de sus principales características, White (1995) describe el proceso de producción de estos materiales.

Los cauchos utilizados en dispositivos de aislamiento sísmico son, según el conocimiento del autor, naturales (*Natural Rubber Bearing*) o una mezcla de naturales y sintéticos y siempre vulcanizados. De los agregados, el denominado *carbon black* obtenido de la combustión incompleta de gas natural o petróleo, es el más utilizado, en forma de polvo y a efectos de incrementar las propiedades disipativas del caucho (*High Damping Rubber Bearing*).

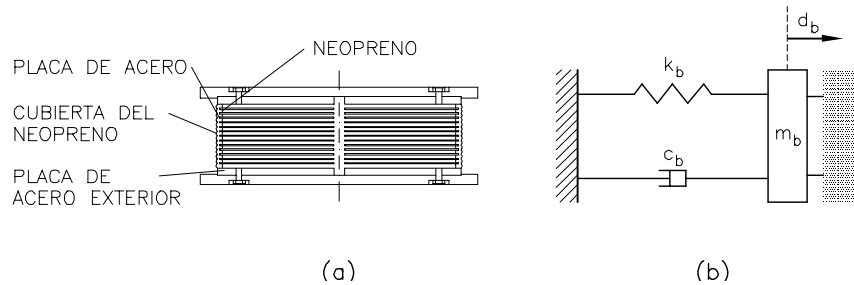
## 2.4 DESCRIPCIÓN DE LOS DISPOSITIVOS

Los dispositivos de caucho (o neopreno) laminado (*laminated rubber bearing*) están compuestos, tal como se indica en la figura 2.2, por capas alternas de caucho y acero unidas entre sí por un proceso de vulcanización. Se consigue así dispositivos muy flexibles en dirección horizontal y suficientemente rígidos en dirección vertical. Una estructura soportada por estos dispositivos tendrá un período mayor que una estructura similar de base fija y este corrimiento de frecuencias reduce las amplificaciones dinámicas.

Estos dispositivos son similares a los utilizados en el apoyo de tablero de puentes, en este caso para permitir la dilatación y/o contracción de los mismos por efectos de cambios de temperatura. La experiencia de que se dispone en su utilización permite confiar en su durabilidad y resistencia a todo tipo de ambientes, incluso en caso de incendio (Derham & Plunkett 1976).

El uso de este tipo de dispositivos permite satisfacer los requerimientos de los códigos de edificación sin un incremento sustancial de costos (Skinner et al. 1993), por lo que han sido objeto de investigación experimental en diversas instituciones del mundo.





**Figura 2.2** Dispositivo de apoyo de caucho laminado. (a) Esquema (b) Modelo dinámico.

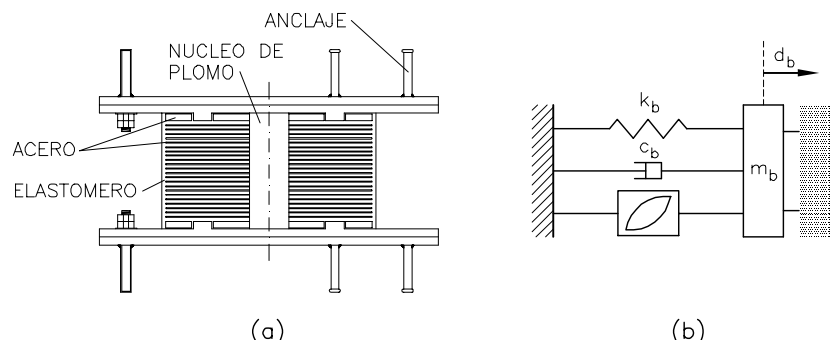
En 1972 el *Centre National de la Recherche Scientifique* de Marsella, Francia, inició sus investigaciones con el fin de proteger edificios utilizando dispositivos de apoyo de caucho laminado. En 1977 finalizó en Saint Martin de Castillon la construcción de tres edificios usando esta técnica y un cuarto fue concluido en 1982 (Buckle & Mayes 1990). Durante este mismo período se edificó una escuela secundaria para 600 alumnos en Lambesec, cerca de Marsella, utilizando como aislamiento 152 apoyos de caucho laminado, con un diámetro de 300 mm y una altura de 50 mm (Delfosse 1982).

En los últimos años se ha desarrollado una intensa labor investigadora encaminada a mejorar las cualidades de estos apoyos (Kelly 1991*b*, Kelly 1995). En 1976 se iniciaron las investigaciones en el *Earthquake Engineering Research Center* de la Universidad de California en Berkeley. El primer programa de investigación, en colaboración con la británica *Malaysian Rubber Producers Reserch Association*, consistió en una serie de ensayos en mesa vibrante. Los ensayos continuaron posteriormente incorporando sistemas de seguridad en caso de solicitaciones excesivas. Este sistema se sometió también a un terremoto generado artificialmente mediante explosivos.

La modificación de la frecuencia fundamental de un edificio, alejándola de la frecuencia predominante de los terremotos de la zona, no garantiza la total protección de la estructura de una posible resonancia con frecuencias naturales mas altas. Puede también presentarse el caso de terremotos que no tienen una única frecuencia predominante sino varias. Es por ello necesaria la incorporación de mecanismos de amortiguamiento.

En Nueva Zelanda, donde el aislamiento antisísmico de estructuras se aplica desde 1973 (Skinner et al. 1993), se apreció que el amortiguamiento que propor-

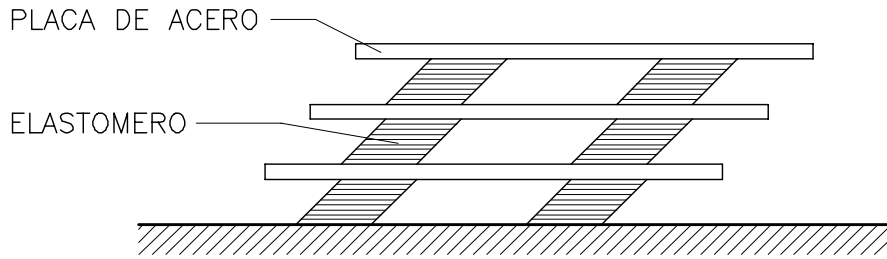
cionaban los dispositivos de caucho natural era insuficiente. Por este motivo se desarrolló un nuevo tipo de dispositivo de apoyo consistente en colocar en éstos un núcleo de plomo. El núcleo de plomo incrementa significativamente el amortiguamiento, desde el 3% del amortiguamiento crítico del caucho natural hasta el 15%. Este tipo de apoyo se denomina internacionalmente "neocelandés" y su esquema puede verse en la figura 2.3. La flexibilidad horizontal de las capas de caucho permite los desplazamientos de la base mientras que el núcleo de plomo es un mecanismo de disipación de energía.



**Figura 2.3** Dispositivo de apoyo neocelandés. (a) Esquema (b) Modelo dinámico.

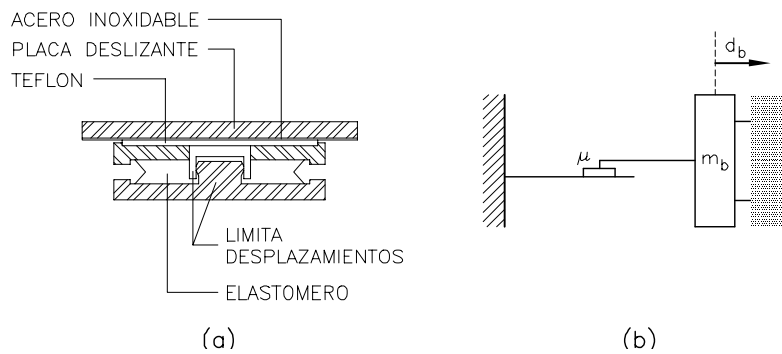
Los dispositivos de apoyo con núcleo de plomo han sido utilizados en el aislamiento antisísmico de varios edificios. Un ejemplo es el *William Clayton Building*, en Wellington, Nueva Zelanda (Skinner et al. 1993). Actualmente, los fabricantes poseedores de la patente desarrollan dispositivos de apoyo de alta estabilidad consistentes en placas de acero separadas por discos de caucho situados en las esquinas tal como se indica en la figura 2.4. La rigidez horizontal resulta muy baja, manteniendo la estabilidad del sistema. En Japón se están llevando a cabo investigaciones en el mismo sentido.

El primer edificio con aislamiento antisísmico en Japón fue terminado en 1986 y en la actualidad muchos edificios incorporan dispositivos de apoyo, en la mayoría de los casos de caucho laminado con o sin núcleo de plomo (SMiRT11 1991). La alta sismicidad del Japón hace preferibles estos sistemas, que brindan protección durante toda la vida de las estructuras, frente a los diseños tradicionales en los que se aceptaba como inevitables ciertos desperfectos estructurales en caso de terremotos.



**Figura 2.4** Dispositivo de apoyo de alta estabilidad.

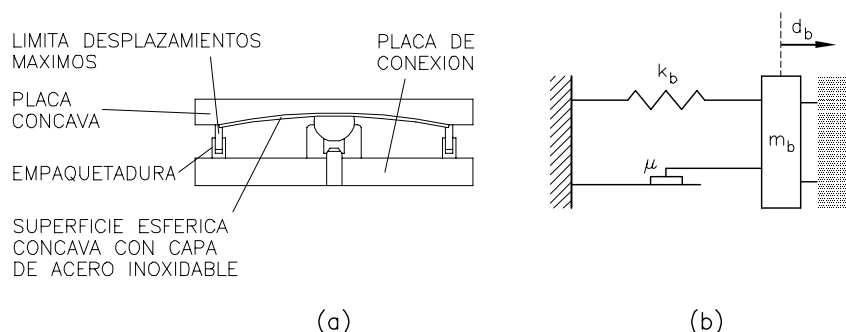
Se han propuesto también dispositivos de apoyo denominados de fricción pura, en los que la protección se debe a un mecanismo deslizante como el indicado en la figura 2.5. Las fuerzas horizontales de rozamiento se oponen al movimiento y disipan energía. Al carecer de fuerzas restitutivas, los desplazamientos remanentes son inevitables. Se ha ensayado (*National Center for Earthquake Engineering Research*, Nueva York) la utilización de teflon en este tipo de apoyos.



**Figura 2.5** Dispositivo de apoyo de fricción pura. (a) Esquema (b) Modelo dinámico.

Para evitar los corrimientos remanentes, el dispositivo de apoyo original ha sido modificado, dando forma curva a las placas en contacto y reduciendo las dimensiones de una de ellas. De esta forma, luego del desplazamiento provocado por la acción de un terremoto, el edificio oscila hasta encontrar su posición de

equilibrio, coincidente con la posición inicial. Este tipo de apoyo se denomina pendular con rozamiento y un esquema del mismo puede verse en la figura 2.6.

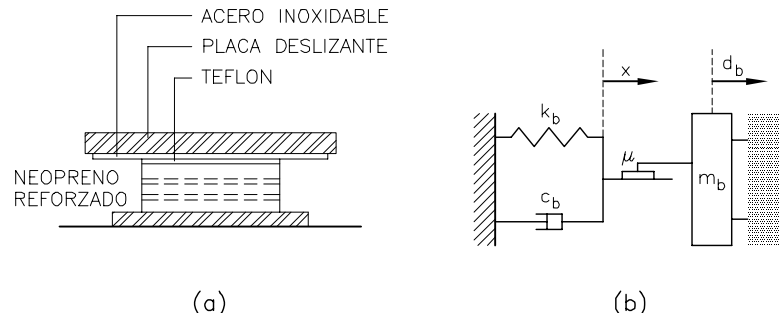


**Figura 2.6** Dispositivo de apoyo pendular con rozamiento. (a) Esquema (b) Modelo dinámico.

El aislamiento antisísmico ofrece la interesante posibilidad de reducir las cargas sísmicas en centrales nucleares (SMiRT11 1991, Tajirian 1995), pudiéndose limitar la protección al reactor o hacerse extensiva a toda la central. Este hecho permite estandarizar el diseño de centrales nucleares y, por lo tanto, reducir costos. La compañía *Electricité de France* ha desarrollado un tipo de dispositivo de apoyo destinado a centrales nucleares, denominados EDF (siglas de la compañía que los diseñó). Consisten en dos placas en contacto, la superior anclada a la estructura y la inferior vulcanizada a un soporte de caucho laminado tal como verse en el esquema de la figura 2.7.

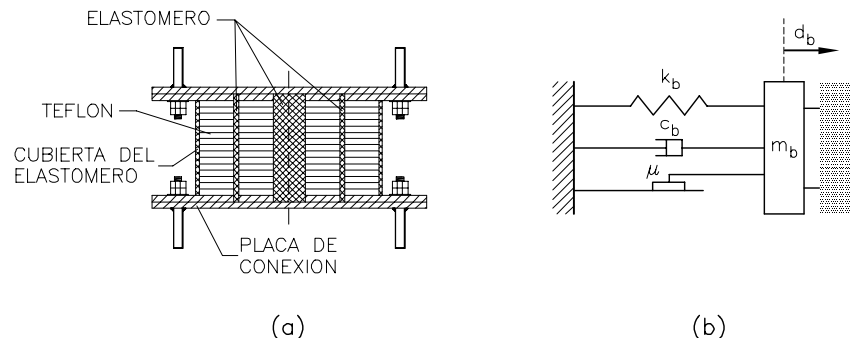
Cuando el sistema se ve sometido a un movimiento del terreno de baja intensidad, el apoyo se comporta como uno de caucho laminado. Si el terremoto es de gran magnitud, las placas deslizan entre sí actuando como mecanismo de seguridad. Los costos de este tipo de aislamiento son altos pero se justifican por el ahorro que supone el no tener que rediseñar ni reforzar una central nuclear que deba construirse en una zona de alta sismicidad. Este sistema ha sido implementado en una central nuclear en Sudáfrica. En Francia, dos centrales incorporan los apoyos EDF, pero sin el mecanismo de deslizamiento; la protección se debe exclusivamente a la parte elastomérica del sistema.

Otro apoyo propuesto es el denominado elástico-friccionante. Consta de varias capas de teflón en contacto entre sí, con la posibilidad de deslizarse y un núcleo de caucho (véase la figura 2.8). El caucho proporciona la elasticidad necesaria al



**Figura 2.7** Dispositivo de apoyo EDF. (a) Esquema (b) Modelo dinámico.

sistema para recobrar la posición inicial después del terremoto, mientras que la energía se disipa por rozamiento entre las placas.



**Figura 2.8** Dispositivo de apoyo elástico-friccionante. (a) Esquema (b) Modelo dinámico.

También se ha propuesto un dispositivo de apoyo con doble sistema de fricción, que combina las prestaciones del elástico-friccionante y del EDF. El mecanismo es similar a un apoyo elástico-friccionante con la diferencia de que el contacto con la estructura se realiza a través de placas deslizantes. De este modo, bajo cargas

pequeñas el sistema se comporta como elástico-friccionante, cuando las cargas aumentan se produce el deslizamiento de las placas superiores, desacoplándose la estructura del movimiento del terreno.

El momento de vuelco ejercido por las acciones sísmicas y el empuje del viento sobre el edificio descarga los dispositivos de apoyo. La descarga puede llegar a traducirse en despegue de la base y para evitarlo, usualmente, se limita la altura del edificio. Al mismo tiempo se están desarrollando mecanismos capaces de resistir las fuerzas de despegue.

Por otra parte, y desde el punto de vista económico, la incorporación de estos sistemas de aislamiento no necesariamente debe incrementar el costo de una construcción a la que se debe proveer de una determinada resistencia antisísmica, podrían incluso reducirlo. Esta posible reducción de costos se deriva de una reducción en las fuerzas sísmicas que debe soportar la estructura, una reducción en la ductilidad necesaria en esta y la consecuente simplificación en la instalación de cerramientos, derivados de menores deformaciones en la estructura. Construcciones con aislamiento sísmico realizadas en Nueva Zelanda muestran reducciones de costo del orden de un 5% (Skinner et al. 1993).

Aunque el concepto de aislamiento antisísmico fue desarrollado en principio para proteger edificios de nueva construcción, es posible extender su utilización al campo de la rehabilitación de edificios antiguos. La adecuación de edificaciones ya existentes a las nuevas normativas sísmicas, puede comportar reformas estructurales costosas que incluso hagan económicamente preferible la demolición.

En el caso de edificios de alto interés histórico o artístico, el aislamiento de base permite evitar los desperfectos ocasionados por la construcción de paredes de carga, estructuras de sostenimiento u otro tipo de refuerzos. Estudios efectuados sobre rehabilitación de edificios utilizando el concepto de aislamiento antisísmico han demostrado la fiabilidad técnica y rentabilidad económica de esta técnica (Kelly 1983, Garevski 1995). En los Estados Unidos se ha aplicado con éxito en la rehabilitación, entre otros, de los siguientes edificios : *City and County Building, Salt Lake, Utah* construido en 1894 y rehabilitado en 1986/7, *Mackay School of Mines, Reno, Nevada* construido en 1908 y rehabilitado en 1990, *City Hall Oakland, California* construido en 1914 y rehabilitado en 1993/4, *US Court of Appeals, San Francisco, California* construido en 1905 y rehabilitado en 1993/4 (Buckle & Mayes 1990, Buckle 1995, Mokha, Amin, Constantinou & Zayas 1996).

## 2.5 CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DE DISPOSITIVOS DE CAUCHO LAMINADO

En esta sección se describe la respuesta mecánica de dispositivos de caucho laminado utilizando información publicada de ensayos de laboratorio de estos dispo-

sitivos (SMiRT11 1991, Kelly 1991*b*, Kelly 1993, Kelly 1995, Fuller et al. 1997). De estos ensayos, se analizan aquí los mejor documentados.

Kelly (1991*b*) presenta ensayos de laboratorio realizados en el *Earthquake Engineering Research Center* de la Universidad de California en Berkeley con dispositivos de caucho laminado de alto amortiguamiento producidos por *Bridgestone* en Japón. Las características geométricas de los dispositivos ensayados pueden verse en la figura 2.9. Los dispositivos están formados por 22 capas de elastómero de 2 mm de espesor y 21 capas de acero de 0.8 mm. La sección transversal es circular con un diámetro de 24 cm. Dos placas de acero, una inferior y otra superior, de mayor espesor y diámetro permiten fijar los dispositivos a la máquina de ensayo (o a la cimentación y base de la estructura).

El material elastomérico utilizado en la construcción de los dispositivos ensayados es descrito como de alta rigidez y alto amortiguamiento compuesto por una mezcla de caucho natural y sintético con un 31% de agregados (*carbon filler*).

Los ensayos de laboratorio consistieron en ciclos de desplazamiento horizontal de amplitud creciente desde un 5% hasta un 350% de deformación por esfuerzo cortante (estos porcentajes de deformación se dan con referencia al espesor total de elastómero). Estos ciclos de desplazamiento horizontal se han impuesto en tres secuencias de carga:

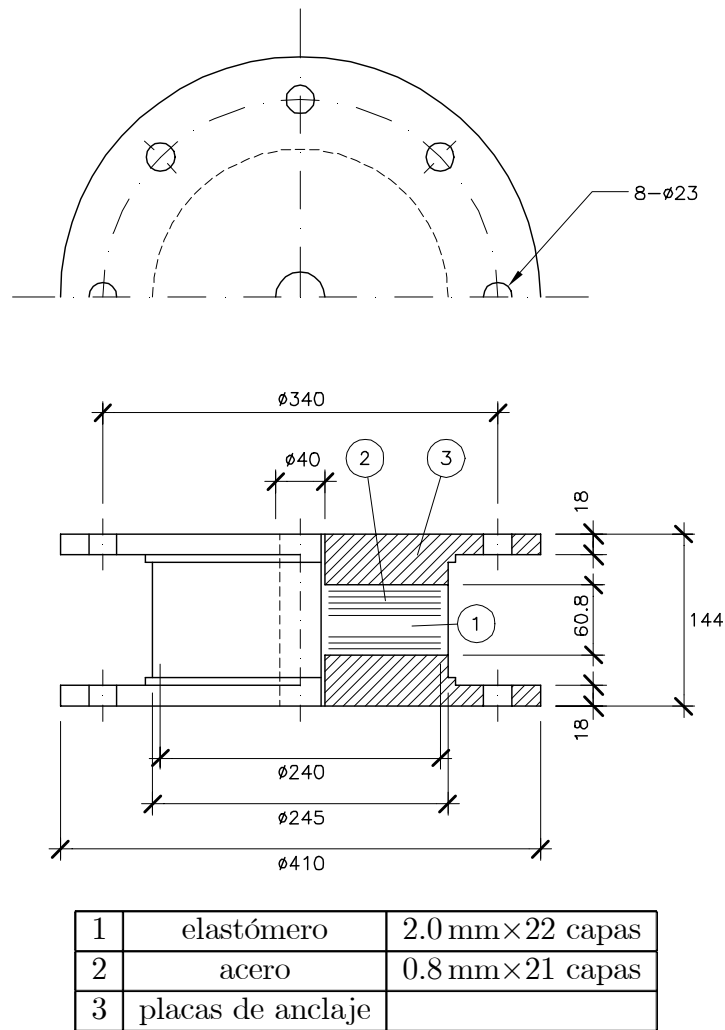
- Secuencia 1      $\pm 5\%, \pm 10\%, \pm 25\%, \pm 50\%, \pm 75\%, \pm 100\%$
- Secuencia 2      $\pm 100\%, \pm 150\%, \pm 200\%, \pm 250\%$
- Secuencia 3      $\pm 200\%, \pm 250\%, \pm 300\%, \pm 350\%$

En cada secuencia de carga se han impuesto 5 ciclos de desplazamiento horizontal a cada nivel de deformación, con una frecuencia de 0.5 Hz y solo unos minutos entre secuencias.

Los ciclos de desplazamiento horizontal impuesto se aplicaron considerando cuatro situaciones de carga vertical, correspondientes a distintos niveles de presión:

- 0.00 kg/cm<sup>2</sup> (0 psi)
- 35.15 kg/cm<sup>2</sup> (500 psi)
- 70.30 kg/cm<sup>2</sup> (1000 psi)
- 105.45 kg/cm<sup>2</sup> (1500 psi)

Estas presiones verticales pueden considerarse como 0%, 50%, 100% y 150% de la presión vertical de diseño.

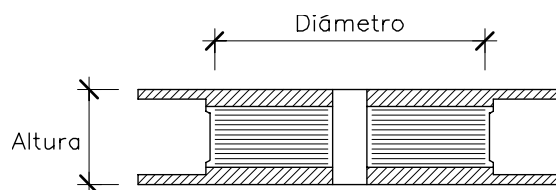


**Figura 2.9** Características geométricas de los dispositivos ensayados (Kelly, 1991).

También se analizan aquí resultados experimentales con dispositivos de caucho natural (*NRB = Natural Rubber Bearing*), de caucho natural con núcleo de plomo (*LRB = Lead Rubber Bearing*) y de caucho de alto amortiguamiento (*HRB = High Damping Rubber Bearing*) publicados en (SMiRT11 1991). Las características geométricas y mecánicas de estos dispositivos son las indicadas en la figura 2.10.

En este caso los ensayos se han realizado imponiendo ciclos de desplazamiento horizontal con una frecuencia de carga cuasi estática (0.01 Hz). En los dispositivos a escala natural (1/1), cuyas características se indican en la figura 2.10, se aplicaron cuatro ciclos de desplazamiento horizontal sinusoidal con carga vertical constante. La amplitud de los ciclos de desplazamiento horizontal corresponde a





Tipo	NRB	LRB	HRB
Diámetro (mm)	1600	1600	1420
Sección transversal $\pi \Phi^2/4$ (m <sup>2</sup> )	2.0106	2.0106	1.5837
Altura (mm)	440	580	620
Espesor de las láminas de caucho (mm)	11.5	9	8
Número de láminas de caucho	19	25	31
Espesor de las láminas de acero (mm)	4.5	5.8	5.8
Número de láminas de acero	18	24	30
Carga vertical, $P_0$ (T)	500	500	500
Frecuencia natural horizontal, $f_H$ (Hz)	0.5	0.5	0.5
Frecuencia natural vertical, $f_V$ (Hz)	20	20	20

**Figura 2.10** Características geométricas y mecánicas de los dispositivos ensayados (SMiRT11, 1991).

deformaciones por cortante en el elastómero de  $\pm 25\%$ ,  $\pm 50\%$ ,  $\pm 100\%$  y  $\pm 200\%$ . La amplitud de la carga vertical corresponde a valores de  $-20\%$  a  $+200\%$  de la carga vertical de diseño.

En esta serie de ensayos (SMiRT11 1991) se han utilizado también modelos a escala reducida, escala 1/1.58 para los dispositivos de caucho natural y escala 1/1.83 para los dispositivos con núcleo de plomo y de alto amortiguamiento. Sobre estos dispositivos a escala se aplicaron ciclos de desplazamiento horizontal sinusoidal con amplitud variable desde  $\pm 25\%$  hasta  $\pm 400\%$  de deformación por cortante del elastómero y carga vertical igual a la carga vertical de diseño.

Luego de estos ciclos de desplazamientos, se ensayaron los modelos a escala con carga horizontal monótona hasta la rotura. Adicionalmente a los modelos a escala ya señalados, en los ensayos a rotura se utilizaron modelos a escala 1/3.16.

Los resultados experimentales analizados en los apartados siguientes de esta sección se comparan con resultados obtenidos de la simulación numérica propuesta en esta monografía en las secciones 5.3.3 y 5.3.5.

### 2.5.1 Módulo de elasticidad transversal y rigidez horizontal

El módulo de elasticidad transversal  $G$  y/o la rigidez horizontal  $K_H$  conjuntamente con el amortiguamiento se señalan como propiedades clave de los dispositivos de caucho laminado (SMiRT11 1991, Kelly 1991*b*, Skinner et al. 1993, Fuller et al. 1997). Estas propiedades han sido evaluadas experimentalmente y en las citadas referencias se presentan algunos resultados de estos ensayos.

En ensayos de dispositivos sometidos a una fuerza cíclica horizontal de amplitud variable, se miden fuerzas  $Q$  y desplazamientos  $u$  y con estos se determinan tensiones tangenciales  $\tau = Q/A$  y deformaciones de cortante  $\gamma = u/(n t)$ , siendo  $n$  el número de capas de caucho de espesor  $t$  y área  $A$ . Cuando se trata de determinar el módulo de elasticidad transversal dinámico, la fuerza cíclica horizontal se aplica con una frecuencia de 0.5 Hz, que es la frecuencia fundamental de vibración con la que se diseñan estos dispositivos (SMiRT11 1991). Con estos valores se calcula el módulo de elasticidad transversal  $G$

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (2.1)$$

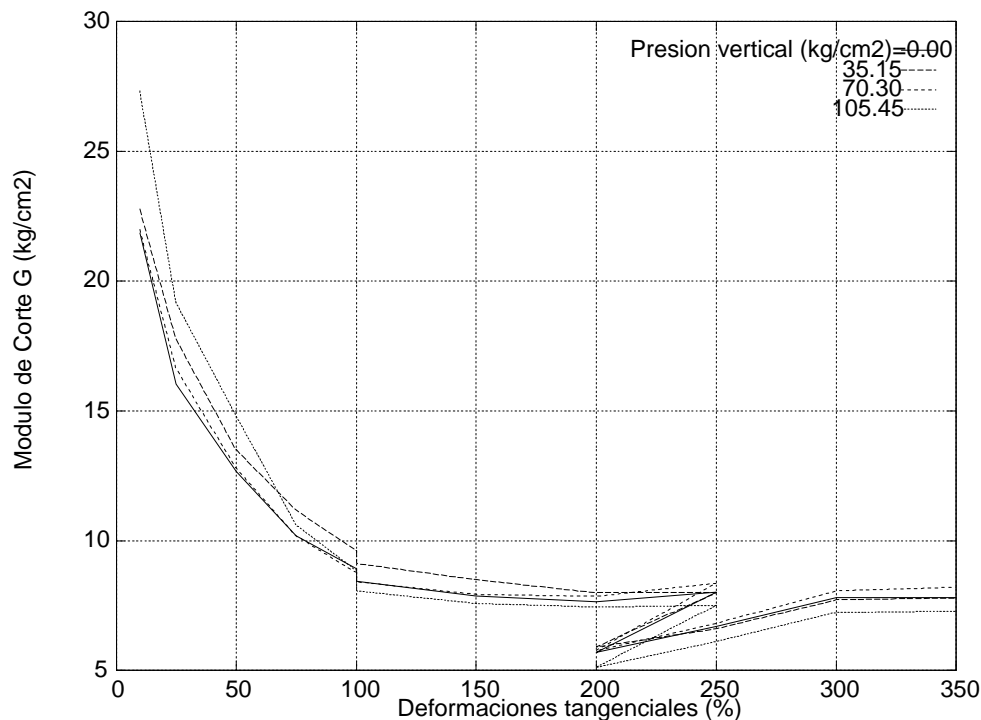
La rigidez horizontal del dispositivo,  $K_H = Q/u$ , es relacionada con el módulo de elasticidad transversal  $G$  mediante la expresión:

$$K_H = \frac{G A}{n t} \quad (2.2)$$

Se considera que las capas de acero sólo contribuyen a la rigidez vertical del dispositivo y no tienen efecto sobre su comportamiento horizontal. La ecuación (2.2) tampoco contempla la influencia de la carga vertical sobre el dispositivo, considerando que la magnitud de esta carga estará muy por debajo de la de inestabilidad.

El valor del módulo de elasticidad transversal  $G$  en la ecuación (2.1) y por lo tanto la rigidez horizontal  $K_H$  en la ecuación (2.2) están lejos de ser una constante, como sería en el caso de un material elástico lineal. Utilizando valores publicados por Kelly (1991*b*) y correspondientes a los ensayos descritos en la página 25 para dispositivos de apoyo de alto amortiguamiento de las características indicadas en la figura 2.9, puede graficarse la relación entre el módulo de elasticidad transversal  $G$  y la deformación  $\gamma$  tal como se presenta en la figura 2.11.

Las curvas graficadas en la figura 2.11 corresponden a los valores de fuerza máximos registrados en el primer ciclo de desplazamientos horizontales a cada nivel de deformación.



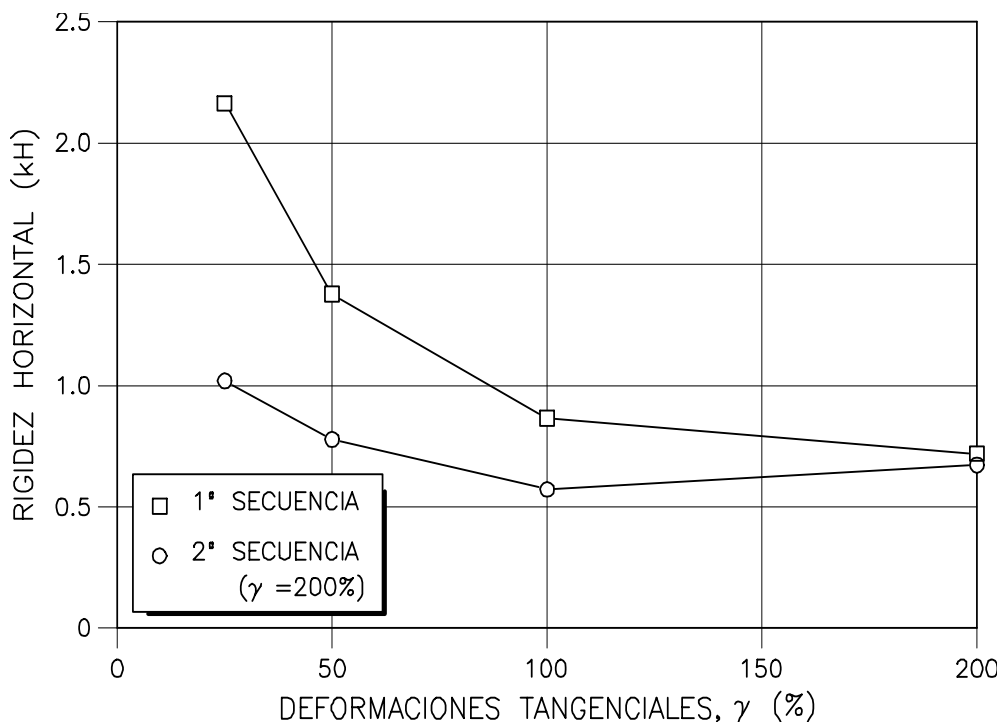
**Figura 2.11** Variación del módulo de elasticidad transversal  $G$  con la deformación tangencial  $\gamma$  a diferentes niveles de presión vertical. Ensayos experimentales de dispositivos de alto amortiguamiento (Kelly, 1991).

- **Incidencia de la carga vertical en el módulo  $G$**

En la misma figura 2.11 se grafican cuatro curvas, correspondientes a los distintos niveles de presión vertical (0%, 50%, 100% y 150% de la presión vertical de diseño), y por lo tanto puede afirmarse que la variación del módulo de elasticidad transversal  $G$  no es significativa en relación a la presión vertical y puede no incluirse en los cálculos de la rigidez horizontal, dada por la ecuación (2.2).

- **Degradación**

En la figura 2.11 puede verse que el módulo de elasticidad transversal  $G$  y por lo tanto también la rigidez horizontal  $K_H$  sufren un cambio de valor según sea la primera vez que el dispositivo de apoyo es sometido a una cierta deformación o ya haya experimentado tal deformación en ciclos previos. Este cambio es particularmente notable en la figura 2.11 para deformaciones del 200% y 250%, según éstas correspondan a la segunda o tercera secuencias de carga.



**Figura 2.12** Variación de la rigidez horizontal  $K_H$  con la deformación tangencial  $\gamma$ . Ensayos experimentales de dispositivos de alto amortiguamiento (SMiRT11, 1991).

Este fenómeno también puede apreciarse en la figura 2.12 que grafica la relación entre la rigidez horizontal  $K_H$  y las deformaciones tangenciales  $\gamma$  utilizando los resultados de los ensayos (SMiRT11 1991) de dispositivos de alto amortiguamiento (figura 2.10). En este caso, los dispositivos fueron sometidos a dos secuencias de desplazamientos horizontales de amplitud correspondiente a deformaciones por cortante de  $\pm 25\%$ ,  $\pm 50\%$ ,  $\pm 100\%$  y  $\pm 200\%$  con una frecuencia de carga cuasi estática (0.01 Hz). La diferencia entre la primera secuencia de carga, estando el material virgen, y la segunda secuencia, después de experimentar un 200% de deformación, puede verse en la figura 2.12.

El cambio de valor en la rigidez horizontal según sea la primera o la segunda secuencia de carga, no se mantiene en ciclos de carga posteriores. En SMiRT11 (1991) *Bridgestone*, Japón, señala haber sometido dispositivos a escala reducida a 200 ciclos continuos de deformaciones por esfuerzo cortante del 75%, indicando una reducción en la rigidez del 20%. Esta reducción de rigidez es atribuida al incremento de temperatura en los elastómeros causado por las deformaciones cíclicas (véase el apartado 2.5.4).

Fuller et al. (1997) también puntualizan la pérdida de valor del módulo  $G$  en dispositivos de caucho de alto amortiguamiento, cuando éstos son sometidos a deformaciones previas. En este sentido, indican una pérdida del 30% en el valor de  $G$  para deformaciones  $\gamma$  del 100%, cuando previamente se ha alcanzado una deformación  $\gamma$  del 300%. Pero señalan que el valor de  $G$  se recupera parcialmente con el tiempo, en forma logarítmica, alcanzando una recuperación del orden del 50% después de 10 días. A más largo término, se menciona un ensayo en el cual un material de módulo inicial  $G = 8 \text{ kg/cm}^2$  y pre-deformado a un 300% fue ensayado después de un año mediante aplicación de deformaciones del 100% y 200% y dio como resultado un valor del módulo  $G$  sólo un 5% menor al inicial. Una pequeña parte, alrededor de un 4% de esta recuperación, se atribuye al efecto de envejecimiento del caucho (véase el apartado 2.5.5). Para menores deformaciones  $\gamma$ , la recuperación también fue menor, obteniéndose un valor de  $G$  un 20% inferior al inicial para una deformación  $\gamma$  del 10%.

- *Casos de los dispositivos de caucho natural y de caucho natural con núcleo de plomo*

La dependencia de la rigidez horizontal  $K_H$  con respecto a las deformaciones por cortante  $\gamma$  es menos pronunciada y por lo tanto más próxima a la de un material elástico lineal en el caso de dispositivos de caucho natural. Esta dependencia se grafica en la figura 2.13 tomando resultados experimentales de la referencia SMiRT11 (1991).

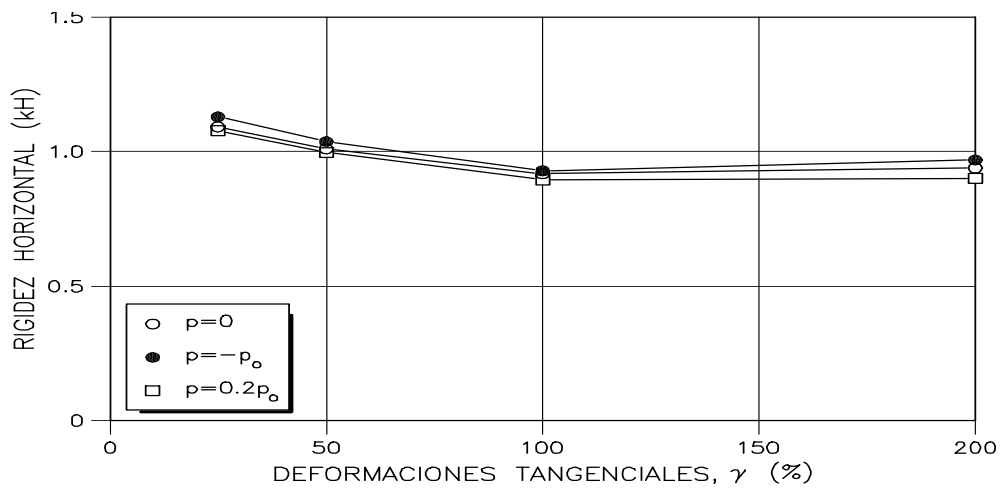
Para dispositivos de caucho natural con núcleo de plomo, la dependencia entre la rigidez horizontal  $K_H$  y las deformaciones por cortante  $\gamma$  se encuentra en una situación intermedia entre la que presentan los dispositivos de caucho natural y los de alto amortiguamiento, tal como puede verse en la figura 2.14. En estas últimas figuras también se pone de manifiesto que la incidencia de la presión vertical sobre el valor de la rigidez horizontal es apenas apreciable.

### 2.5.2 Amortiguamiento

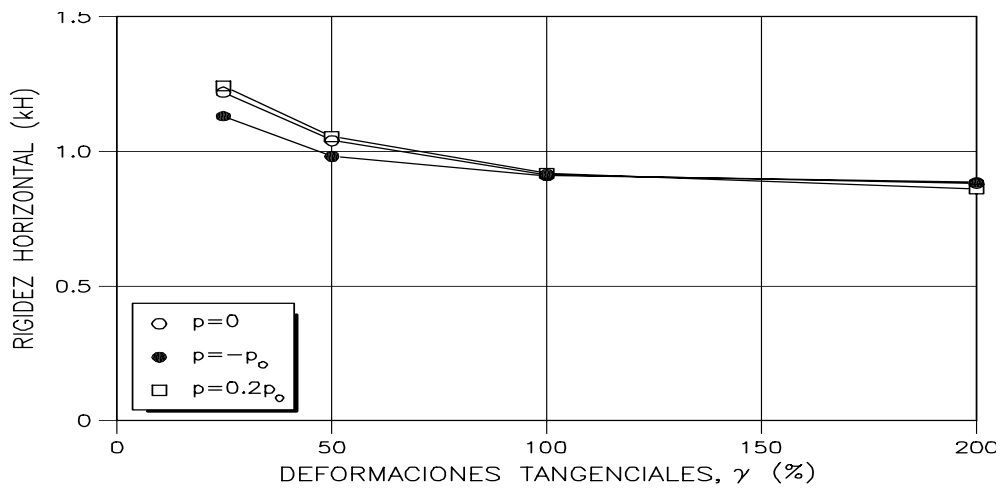
El amortiguamiento que presentan los dispositivos de apoyo de caucho laminado es función del tipo de elastómero utilizado en su construcción. Como se mencionó en el apartado 2.3 estos pueden ser de caucho natural o una mezcla de caucho natural y sintético con agregados que incrementan sus propiedades disipativas dando lugar a cauchos de alto amortiguamiento.

- *Dispositivos de caucho natural*

En el caso de dispositivos de caucho natural el amortiguamiento resulta mínimo, tal como puede observarse en la figura 2.15 para deformaciones de cortante de



**Figura 2.13** Variación de la rigidez horizontal  $K_H$  con la deformación tangencial  $\gamma$ . Ensayos experimentales de dispositivos de caucho natural (SMiRT11, 1991).  $P$  = Carga vertical de ensayo,  $P_0$  = Carga vertical de diseño.



**Figura 2.14** Variación de la rigidez horizontal  $K_H$  con la deformación tangencial  $\gamma$ . Ensayos experimentales de dispositivos con núcleo de plomo (SMiRT11, 1991).  $P$  = Carga vertical de ensayo,  $P_0$  = Carga vertical de diseño.

hasta  $\pm 200\%$ . Para deformaciones superiores el amortiguamiento se incrementa (véase la figura 2.16). En ambas figuras la carga impuesta fue cuasi estática y los desplazamientos horizontales fueron de frecuencia 0.01 Hz con amplitud variable de  $\pm 25\%$  a  $\pm 200\%$  y de  $\pm 25\%$  a  $\pm 400\%$  de deformación por cortante, respectivamente (SMiRT11 1991).

- *Dispositivos de caucho natural con núcleo de plomo*

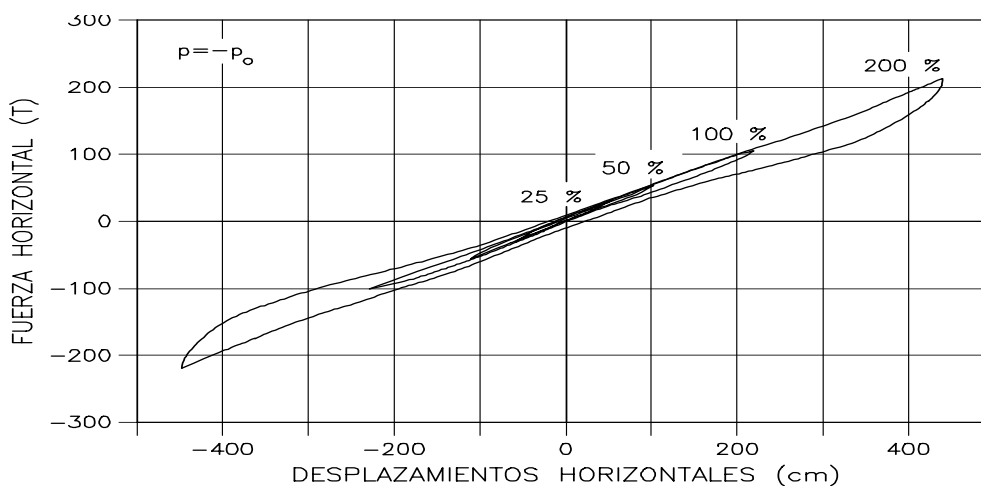
El amortiguamiento en dispositivos de caucho natural con núcleo de plomo resulta incrementado debido a la presencia del plomo y la plastificación del mismo. Al ser baja la tensión de plastificación del plomo, ésta se alcanza con deformaciones por cortante relativamente pequeñas y a partir de allí permanece constante en todo el rango de deformaciones, como puede verse en las figuras 2.17 y 2.18. Estos resultados corresponden a la misma serie de ensayos ha que se hace referencia en el punto anterior (SMiRT11 1991), realizados sobre dispositivos con la misma componente elastomérica y cuyas características geométricas son las indicadas en la figura 2.10. Naturalmente, el incremento de amortiguamiento dependerá de la proporción relativa de plomo en el dispositivo. Resultados de ensayos experimentales realizados sobre diversos dispositivos con núcleo de plomo pueden consultarse en la referencia (Skinner et al. 1993).

- *Dispositivos de alto amortiguamiento*

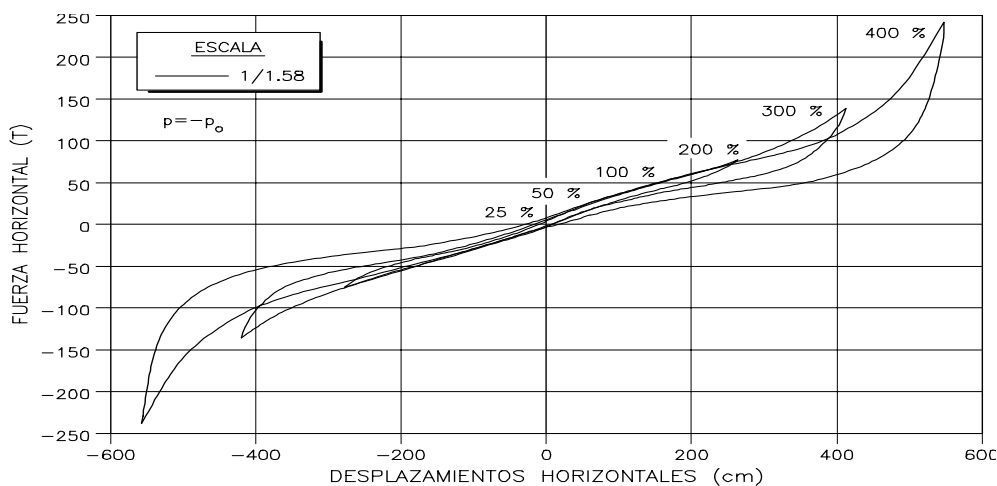
De la misma serie de ensayos mencionada en los puntos anteriores (SMiRT11 1991) se obtienen las figuras 2.19 y 2.20, correspondientes a dispositivos de caucho laminado de alto amortiguamiento. En ambas curvas la frecuencia de carga horizontal fue cuasi estática (0.01 Hz) y la carga vertical  $P$  constante e igual a la carga de diseño  $P_o$ .

Para carga cíclica con frecuencia igual a 0.5 Hz, de la referencia (Kelly 1991b) se obtienen las figuras 2.21, 2.22 y 2.23 correspondientes a la primera, segunda y tercera secuencia de carga descritas en la página 25, sobre dispositivos de alto amortiguamiento con las características indicadas en la figura 2.9. Cada secuencia de carga incluyó cinco ciclos de desplazamientos para cada nivel de deformación.

La figura 2.24 engloba los resultados de las tres secuencias de carga (figuras 2.21, 2.22 y 2.23) y corresponde al primer ciclo de desplazamientos máximos de cada una de estas secuencias. En la figura 2.25 se presenta el resultado de las mismas secuencias de carga horizontal, pero en este caso con una carga vertical correspondiente a un 150% de la presión vertical de diseño. Observando estas figuras (2.24 y 2.25) puede afirmarse, una vez más, que la incidencia de la carga vertical en la respuesta a esfuerzos de cortante de los dispositivos de caucho laminado es mínima.

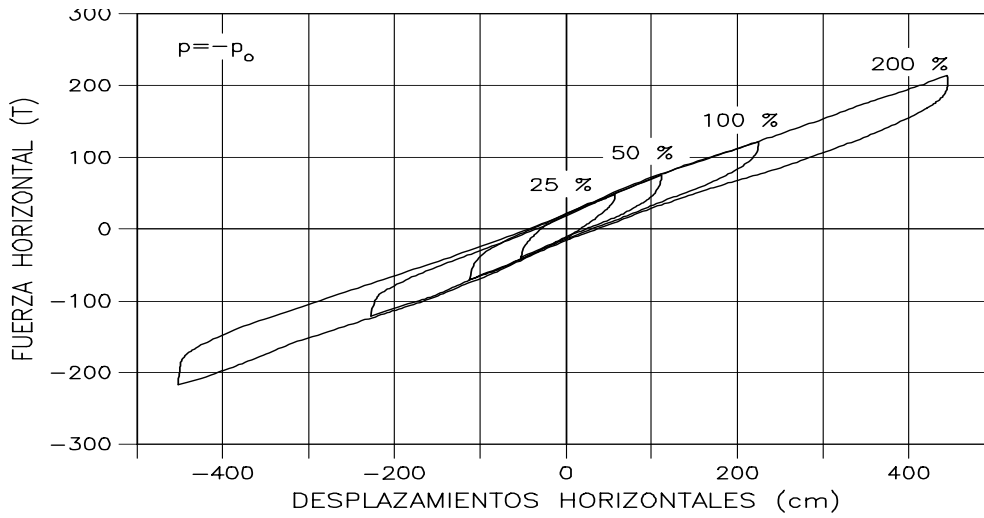


**Figura 2.15** Diagrama fuerza-desplazamiento horizontal para deformaciones  $\gamma \leq 200\%$ . Ensayos experimentales (SMiRT11, 1991) de dispositivos de caucho natural.  $P$  = Carga vertical de ensayo,  $P_0$  = Carga vertical de diseño.

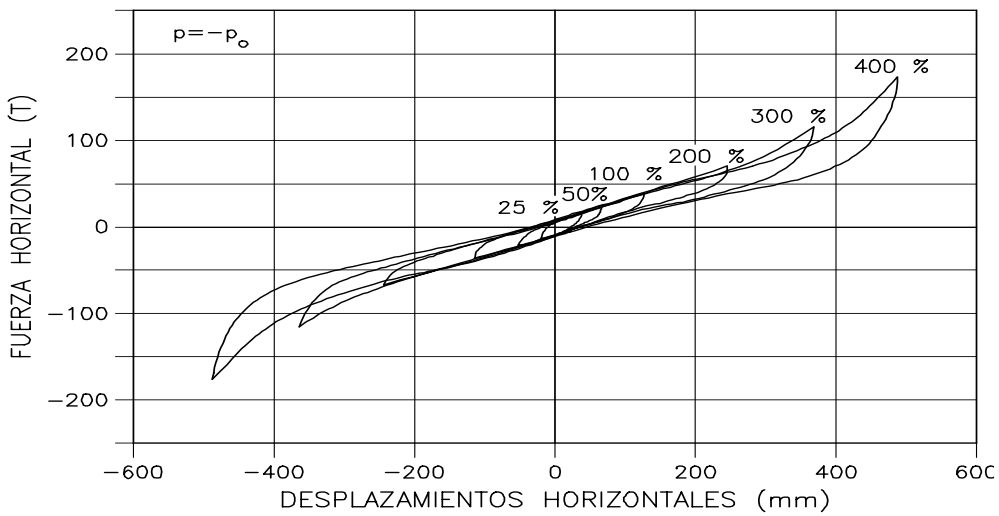


**Figura 2.16** Diagrama fuerza-desplazamiento horizontal para deformaciones  $\gamma \leq 400\%$ . Ensayos experimentales (SMiRT11, 1991) de dispositivos de caucho natural en escala reducida (1/1.58).  $P$  = Carga vertical de ensayo,  $P_0$  = Carga vertical de diseño.

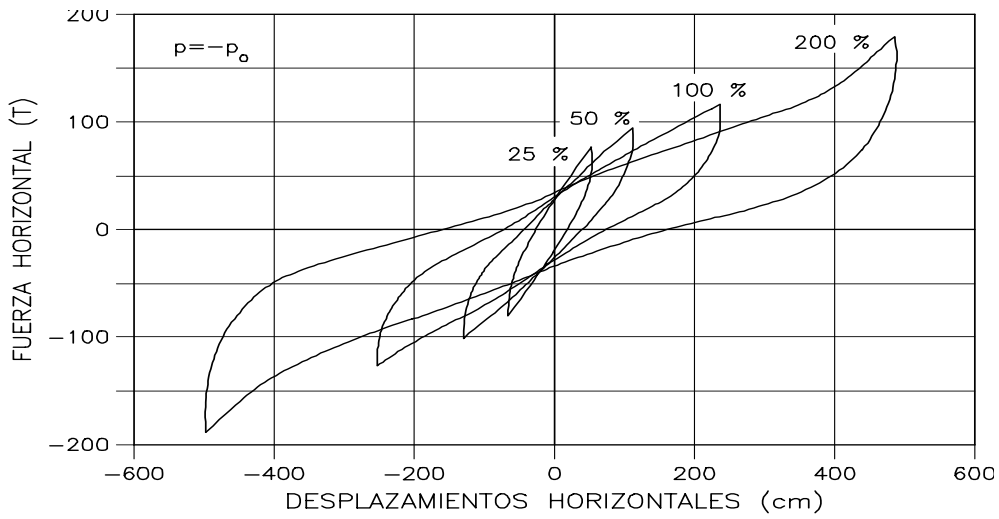




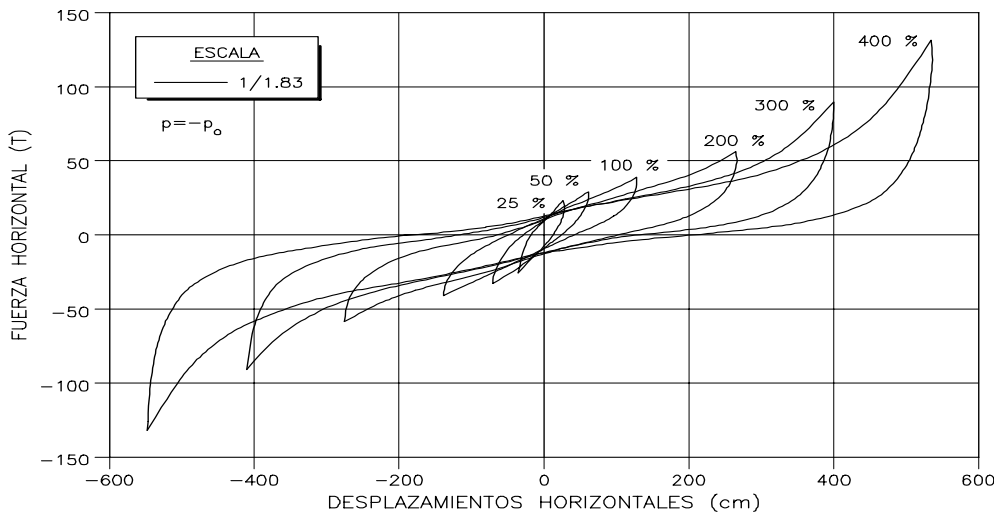
**Figura 2.17** Diagrama fuerza-desplazamiento horizontal para deformaciones  $\gamma \leq 200\%$ . Ensayos experimentales (SMiRT11, 1991) de dispositivos de caucho natural con núcleo de plomo.  $P$  = Carga vertical de ensayo,  $P_0$  = Carga vertical de diseño.



**Figura 2.18** Diagrama fuerza-desplazamiento horizontal para deformaciones  $\gamma \leq 400\%$ . Ensayos experimentales (SMiRT11, 1991) de dispositivos de caucho natural con núcleo de plomo en escala reducida (1/1.83).  $P$  = Carga vertical de ensayo,  $P_0$  = Carga vertical de diseño.



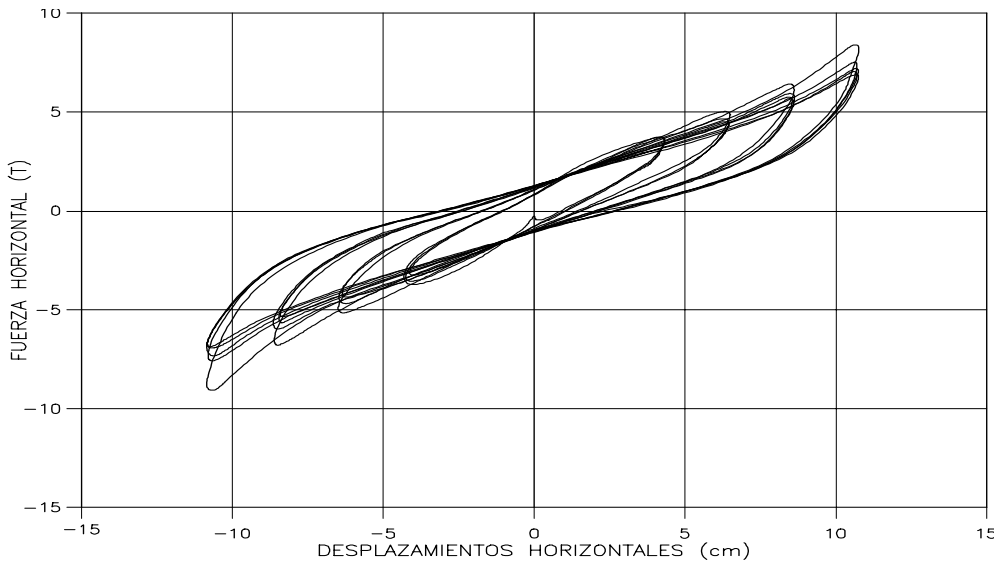
**Figura 2.19** Diagrama fuerza-desplazamiento horizontal para deformaciones  $\gamma \leq 200\%$ . Ensayos experimentales (SMiRT11, 1991) de dispositivos de alto amortiguamiento.  $P$  = Carga vertical de ensayo,  $P_0$  = Carga vertical de diseño.



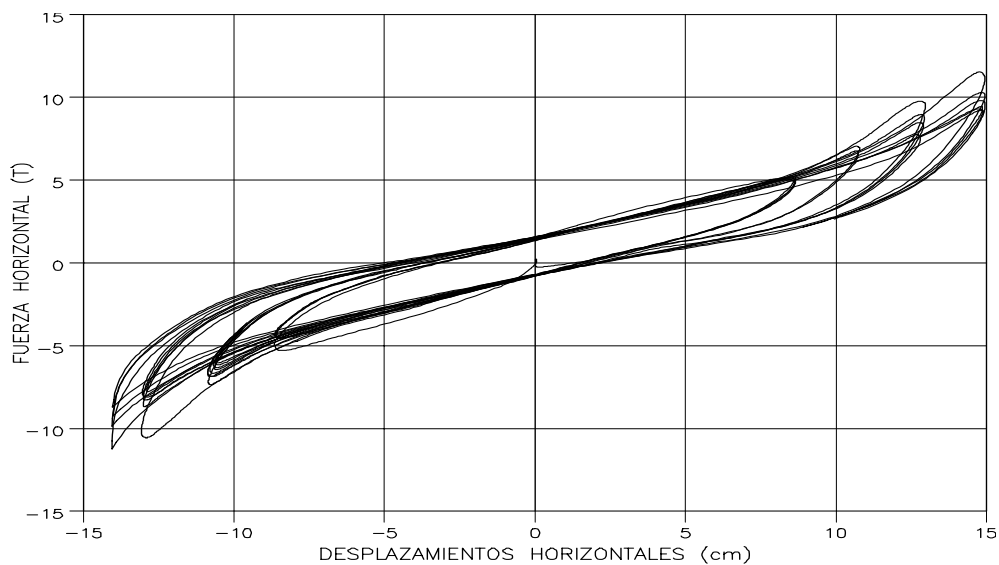
**Figura 2.20** Diagrama fuerza-desplazamiento horizontal para deformaciones  $\gamma \leq 400\%$ . Ensayos experimentales (SMiRT11, 1991) de dispositivos de alto amortiguamiento en escala reducida (1/1.83).  $P$  = Carga vertical de ensayo,  $P_0$  = Carga vertical de diseño.



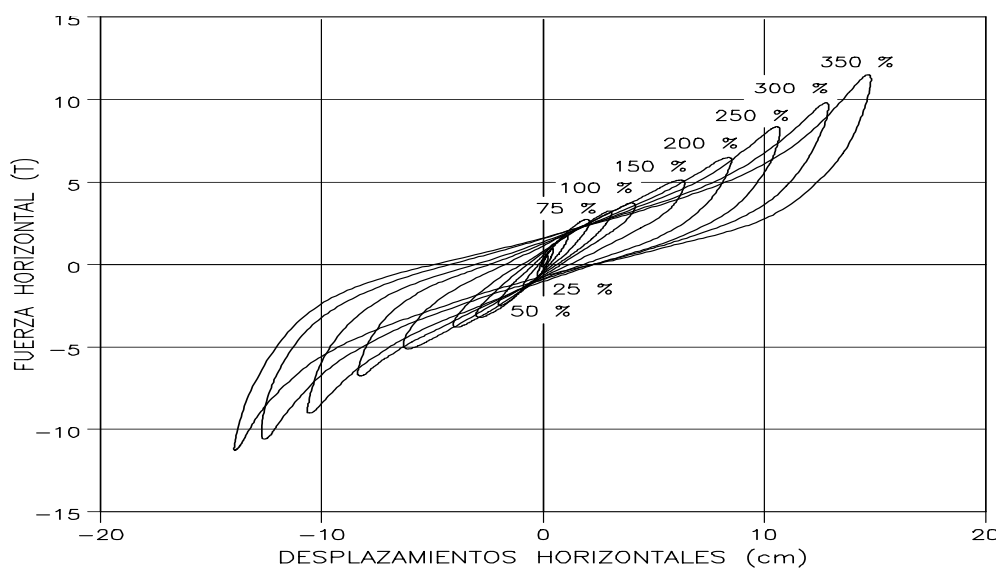
**Figura 2.21** Diagrama fuerza-desplazamiento horizontal para carga vertical nula y deformaciones  $\gamma = \pm 5\% - \pm 100\%$  (Kelly, 1991).



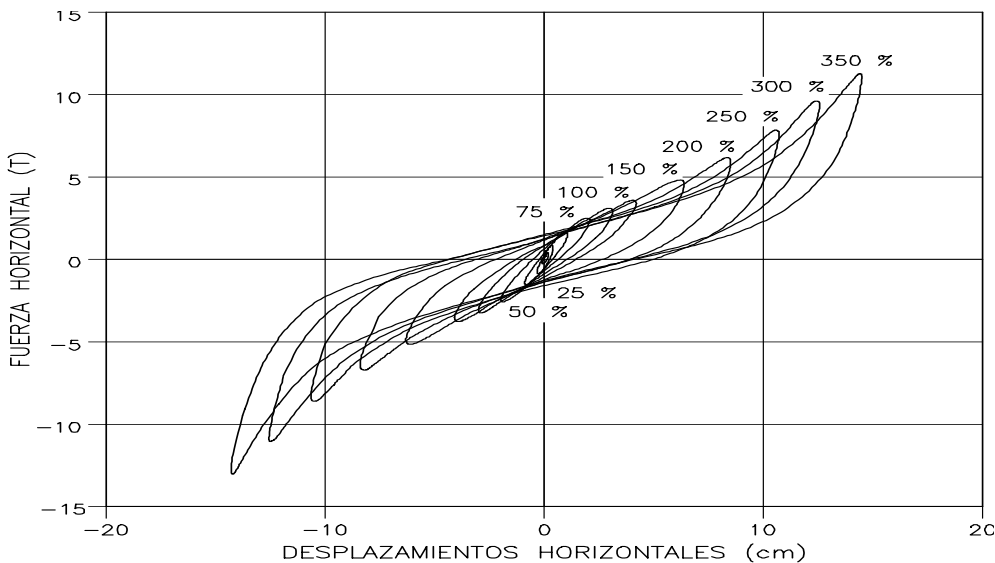
**Figura 2.22** Diagrama fuerza-desplazamiento horizontal para carga vertical nula y deformaciones  $\gamma = \pm 100\% - \pm 250\%$  (Kelly, 1991).



**Figura 2.23** Diagrama fuerza-desplazamiento horizontal para carga vertical nula y deformaciones  $\gamma = \pm 200\% - \pm 350\%$  (Kelly, 1991).



**Figura 2.24** Diagrama fuerza-desplazamiento horizontal para carga vertical nula y primer ciclo de desplazamientos para deformaciones  $\gamma = \pm 5\% - \pm 350\%$  (Kelly, 1991).



**Figura 2.25** Diagrama fuerza-desplazamiento horizontal para carga vertical correspondiente a un 150% de la carga de diseño y primer ciclo de desplazamientos para deformaciones  $\gamma = \pm 5\% - \pm 350\%$  (Kelly, 1991).

La pérdida de rigidez horizontal para valores de deformaciones de cortante inferiores a los alcanzados en ciclos de deformación previos es evidente en las figuras 2.19 a 2.25 y corresponde a la variación en el valor del módulo de elasticidad transversal  $G$  entre distintas secuencias de carga graficada en las figuras 2.12 y 2.11.

• **Estimación del amortiguamiento**

A partir de los resultados de ensayos de dispositivos de apoyo sometidos a fuerzas cíclicas y graficados en las figuras precedentes, puede estimarse el amortiguamiento de estos dispositivos de la siguiente forma (Kelly 1991b):

- Se expresa la relación fuerza-desplazamiento utilizando la forma estándar,

$$F = K \cdot u + C \cdot \dot{u} \tag{2.3}$$

- Si en la ecuación (2.3) el desplazamiento impuesto  $u$  es de forma sinusoidal,  $u = u_o \sin \omega t$ , la fuerza resultante es

$$F = K \cdot u_o \sin \omega t + C \cdot \omega u_o \cos \omega t \tag{2.4}$$

- La máxima fuerza es dada por el valor de  $\omega t$  para el cual  $\dot{F} = 0$ ,

$$F_{\max} = K \cdot u_o \frac{K/C \omega + C \omega/K}{(1 + (K/C \omega)^2)^{1/2}} \quad ; \quad F_{\max} = K \cdot u_o \left( 1 + \left( \frac{C \omega}{K} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

- La rigidez efectiva  $K_{ef}$  es definida por

$$K_{ef} = \frac{F_{\max}}{u_{\max}} = K \cdot \left( 1 + \left( \frac{C \omega}{K} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

- La energía total disipada por el elemento en un ciclo completo es

$$W_D = \int_0^{2\pi/\omega} F(t) \cdot \dot{u}(t) dt = \pi C \omega u_o^2 \quad (2.7)$$

En ensayos con desplazamientos impuestos de tipo sinusoidal se determina el área de los ciclos de histéresis y el valor de  $K_{ef}$  y, con estos valores, se calcula  $C$  de la ecuación (2.7) y  $K$  de la ecuación (2.6).

Si  $K$  y  $C$  se suponen asociados con una masa  $m$  en un sistema de un grado de libertad,

$$K/m = \omega_o^2 \quad \text{y} \quad C/m = 2 \omega_o \beta \quad (2.8)$$

donde  $\omega_o$  es la frecuencia fundamental y  $\beta$  es la fracción del amortiguamiento crítico. De la ecuación (2.8)

$$C = \frac{2\beta}{\omega_o} K \quad (2.9)$$

y reemplazando este valor en la ecuación (2.7) se tiene:

$$W_D = 2\pi K \frac{\omega}{\omega_o} u_o^2 \beta \quad (2.10)$$

lo cual conduce a una estimación de  $\beta$  de la forma:

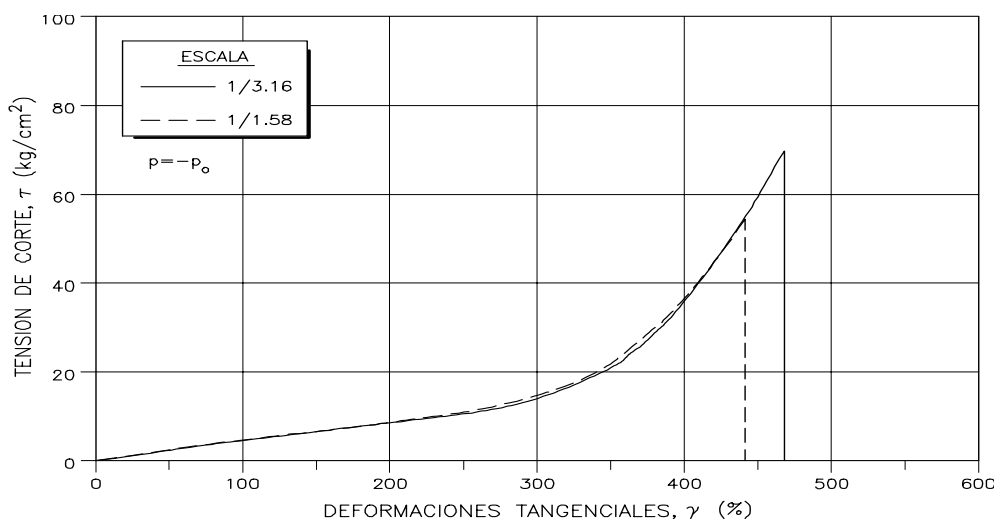
$$\beta = \frac{\omega_o}{\omega} \frac{W_D}{2\pi K u_o^2} \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) indica que la predicción de la energía disipada por el modelo viscoso varía en forma lineal con la frecuencia y en forma cuadrática con los desplazamientos.

### 2.5.3 Deformaciones y tensiones de rotura

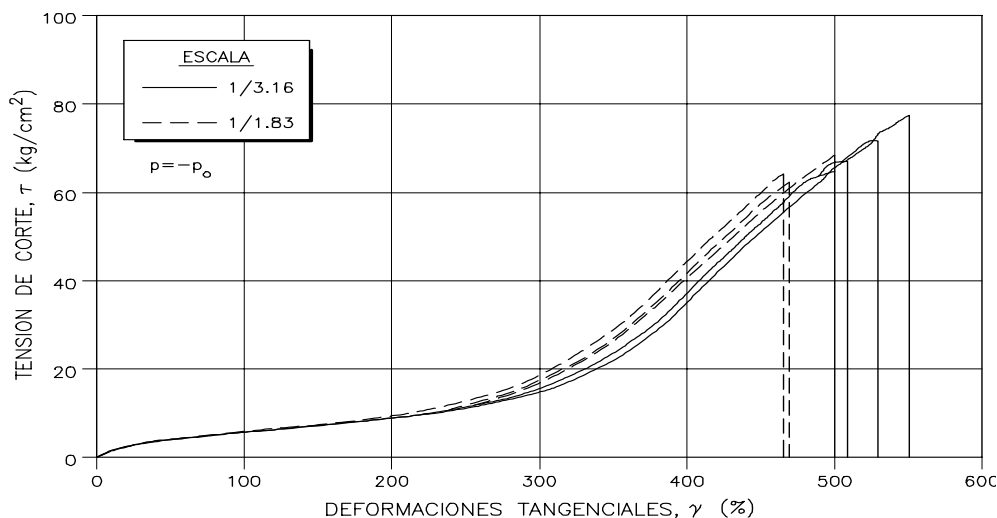
La deformación última en tracción de diferentes elastómeros puede variar en un rango muy amplio, entre 100% y 1000%, dependiendo de del tipo de caucho y los ingredientes utilizados en la formulación del compuesto (Nagdi 1993).

En lo referente a deformaciones de rotura a esfuerzo cortante para elastómeros utilizados en la construcción de dispositivos de aislamiento de base, se han señalado valores de 490% y 570% para una pieza de caucho de 2 mm de espesor y 25 mm de diámetro vinculada rígidamente a piezas metálicas (Fuller et al. 1997). Naturalmente, de estos valores dependerá la máxima deformación de los dispositivos de aislamiento, pero también esta máxima deformación será función del diseño de los dispositivos y un análisis completo de esta dependencia aún no se ha publicado. En las referencias (Kelly 1991a, Kelly 1993) y (Skinner et al. 1993) se dan algunas recomendaciones de diseño.



**Figura 2.26** Diagramas tensión-deformación para fuerza horizontal monótona cuasi estática hasta la rotura. Dispositivos de caucho natural (SMiRT11, 1991) en escala reducida (1/1.58 y 1/3.16).  $P$  = Carga vertical de ensayo,  $P_0$  = Carga vertical de diseño.

En las figuras 2.26 y 2.27 puede verse la respuesta de dispositivos de caucho natural y de alto amortiguamiento cuando éstos son sometidos a una fuerza horizontal monótona cuasi estática hasta la rotura (SMiRT11 1991). Esta fuerza fue aplicada después de las cargas cíclicas, con deformaciones de cortante  $\gamma$  hasta  $\pm 400\%$ , descritas en el apartado anterior y con carga vertical  $P$  de magnitud igual a la de la carga de diseño  $P_0$ . Para dispositivos de caucho natural, las de-



**Figura 2.27** Diagramas tensión-deformación para fuerza horizontal monótona cuasi estática hasta la rotura. Dispositivos de alto amortiguamiento (SMiRT11, 1991) en escala reducida (1/1.83 y 1/3.16).  $P$  = Carga vertical de ensayo,  $P_o$  = Carga vertical de diseño.

formaciones de rotura  $\gamma$  se encuentran entre un 440% y 470%, con tensiones de rotura que varían entre  $50 \text{ kg/cm}^2$  y  $70 \text{ kg/cm}^2$ . Para dispositivos de alto amortiguamiento las deformaciones de rotura son aún superiores, con valores  $\gamma$  que varían entre 450% y 550% y tensiones del orden de  $60 \text{ kg/cm}^2$  a  $75 \text{ kg/cm}^2$ .

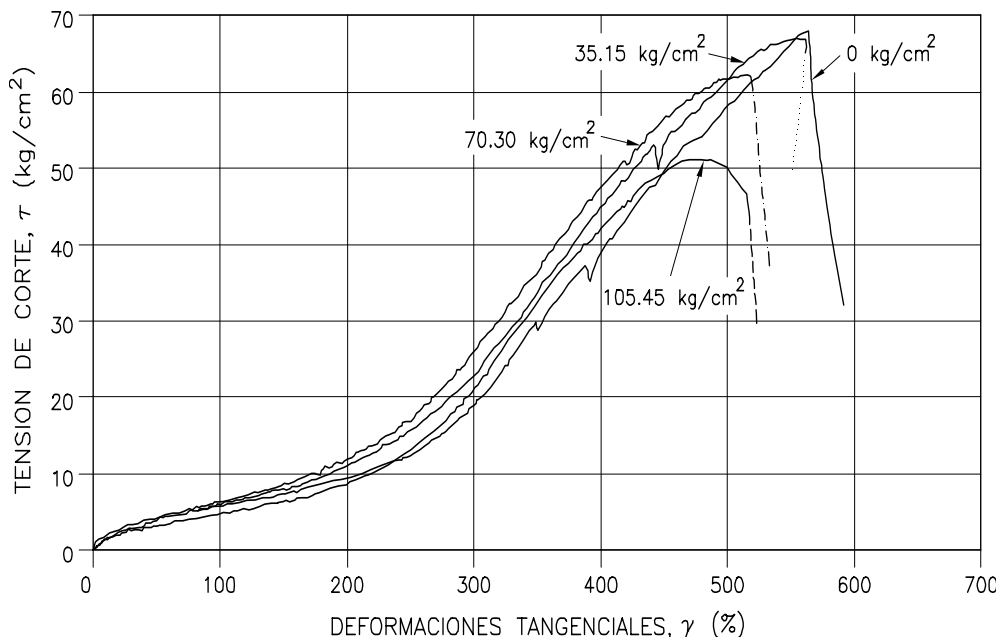
Adicionalmente, a estos ensayos de dispositivos de caucho natural y de alto amortiguamiento, en la misma referencia (SMiRT11 1991) se mencionan ensayos a rotura de dispositivos con núcleo de plomo donde la carga vertical se hizo variar desde  $+2 P_o$  (tracción) hasta  $-10 P_o$  (compresión), siendo  $P_o$  la carga prevista de diseño. Las deformaciones de cortante  $\gamma$  al momento de la rotura varían entre 430% y 470%, lo que indica la poca incidencia de la carga vertical en la magnitud de la deformación de rotura.

Con el mismo objetivo, esto es, para poner en evidencia la dependencia entre la presión vertical y las deformaciones de rotura, se presenta la figura 2.28 correspondiente a ensayos de dispositivos de alto amortiguamiento con fuerza horizontal monótona cuasi estática y cargas verticales correspondientes a tensiones de compresión del 0%, 50%, 100% y 150% de la tensión de diseño (Kelly 1991b).

#### 2.5.4 Efectos de la temperatura

En general, las propiedades físicas de los elastómeros son dependientes de la temperatura, la tensión, el módulo elástico y la dureza disminuyen cuando aumenta





**Figura 2.28** Diagramas tensión-deformación para fuerza horizontal monótona cuasi estática hasta la rotura. Dispositivos de alto amortiguamiento (Kelly, 1991).

la temperatura. La deformación de rotura aumenta con el incremento de temperatura hasta cierto valor y disminuye para temperaturas superiores a dicho valor (Nagdi 1993). Estos efectos, inmediatos, son físicos y reversibles en cuanto la temperatura retorna a su valor ambiente. Los efectos a largo plazo del cambio de temperatura son causados por reacciones químicas en los elastómeros y son irreversibles. La incidencia de estos cambios permanentes en las propiedades elásticas de los elastómeros depende principalmente del tipo de polímero y del sistema de vulcanización.

Tachibana & Li (1996) y Fuller et al. (1997) señalan la dependencia del módulo de elasticidad transversal dinámico y del amortiguamiento con respecto a la temperatura. Las bajas temperaturas, por debajo de  $0^{\circ}\text{C}$ , producen una rigidización del caucho. Este efecto es más marcado en el caso del caucho de alto amortiguamiento en el cual se agregan partículas para incrementar su amortiguamiento al afectar la temperatura la interacción entre el caucho y las partículas.

En el caso del caucho natural no vulcanizado, este puede cristalizar parcialmente cuando se encuentra sometido a bajas temperaturas. Puede alcanzar un máximo del 30% de cristalización después de permanecer durante 8 horas a una temperatura de  $-24^{\circ}\text{C}$  (Fuller et al. 1997). El vulcanizado mejora esta situación

haciendo el proceso mucho más lento, puede requerir días, semanas o meses, dependiendo este tiempo del proceso de vulcanizado. La aplicación de tensión generalmente incrementa la tasa de cristalización, pero este proceso según Nagdi (1993) no es un problema para elastómeros sujetos a movimientos frecuentes, ya que el calor generado durante estos movimientos impide la cristalización. Debido a que los elastómeros son malos conductores de calor, cuando una pieza de considerable espesor es sometida a deformaciones cíclicas con frecuencias altas la temperatura en su interior puede alcanzar los  $150^{\circ}C$  (Nagdi 1993).

A partir de resultados de ensayos de laboratorio se desprende que para una carga con frecuencia de 0.5 Hz y deformación por esfuerzo cortante equivalente a un 100% de la altura del elastómero, el módulo de elasticidad transversal varía con la temperatura en una relación  $G(-20^{\circ}C)/G(20^{\circ}C)$  entre 1.5 y 1.8, dependiendo estos valores de la composición del caucho (Fuller et al. 1997). A pesar de ser esta una variación de rigidez muy importante, no es de esperar temperaturas tan bajas ( $-20^{\circ}C$ ) en los dispositivos de aislamiento instalados en edificios reales, pues estos están usualmente ubicados en compartimientos cerrados y no al aire libre.

Por otra parte, en los mismos ensayos (Fuller et al. 1997) se pone de manifiesto que la variación del módulo de elasticidad transversal con la composición del elastómero es más pronunciada que su variación en función de la temperatura. Para los casos analizados, el módulo de elasticidad transversal  $G$  a  $20^{\circ}C$  y 100% de deformación por cortante, puede variar entre 4 y 12 kg/cm<sup>2</sup> según la composición del elastómero.

En SMiRT11 (1991) *Bridgestone*, Japón, presenta un gráfico de la dependencia del módulo de elasticidad transversal con la temperatura para dispositivos con caucho de alto amortiguamiento. La relación  $G(-30^{\circ}C)/G(30^{\circ}C)$  es igual a 1.5. Con relación a la rigidez horizontal y amortiguamientos en referencia a estos valores a una temperatura de  $20^{\circ}C$  se da la siguiente tabla:

Temperatura	$-15^{\circ}C$	$0^{\circ}C$	$20^{\circ}C$	$40^{\circ}C$
Rigidez relativa	1.31	1.31	1.00	0.91
Factor de amortiguamiento relativo	1.11	1.06	1.00	0.90

El efecto del fuego en el comportamiento de los dispositivos de apoyo elastoméricos es señalado por Skinner et al. (1993), indicando ensayos en los cuales los dispositivos han sido sometidos a temperaturas superiores a  $800^{\circ}C$  por más de 100 minutos mientras se encontraban soportando cargas verticales. Después de haber sido sometidos a estas temperaturas, los dispositivos se comportaron de forma satisfactoria, sin cambios apreciables en su capacidad de carga o en su respuesta fuerza-desplazamiento.

Otro efecto de los cambios de temperatura es el cambio volumétrico de los elastómeros, con un coeficiente de expansión térmica unas 10 veces superior al

del acero (Nagdi 1993). Esta diferencia en el coeficiente de expansión térmica puede causar tensiones en láminas de caucho vulcanizadas con láminas de acero, cuando el conjunto es sometido a grandes cambios de temperatura.

### 2.5.5 Envejecimiento

No se dispone de datos de dispositivos de alto amortiguamiento hallados durante un largo período de tiempo en servicio. Sí pueden mencionarse, en este sentido, datos de dispositivos de caucho natural utilizados en apoyos de puentes. Fuller et al. (1997) mencionan el caso del primer puente en el Reino Unido soportado por dispositivos de caucho laminado, el Puente Pelham en Lincoln, Inglaterra. En este caso los dispositivos manufacturados en 1957 han estado en servicio desde entonces sin presentar problemas. Algunos de estos dispositivos han sido reemplazados en 1994 y ensayados en Japón (Kato, Watanabe & Yoneda 1996, Kato, Watanabe & Kato 1997). Los resultados de estos ensayos indican una rigidez a esfuerzo cortante un 5% superior a la obtenida en ensayos realizados sobre los dispositivos al tiempo de su instalación.

Un estudio experimental sobre la primera estructura construida con aislamiento de base mediante dispositivos elastoméricos puede consultarse en Garevski, Kelly & Bojadziev (1998). Se trata de una escuela de tres plantas en Skopje (Macedonia) construida en 1969 con dispositivos de apoyo de caucho natural sin refuerzo de placas de acero.

En dispositivos de alto amortiguamiento se pueden realizar ensayos de envejecimiento acelerado en laboratorio. Un problema a considerar en estos ensayos es lograr que la relación tiempo/temperatura en laboratorio sea equivalente a someter el dispositivo a un largo período de tiempo a temperaturas de servicio. Otro factor a tener en cuenta es el importante efecto del oxígeno en el proceso de envejecimiento del caucho natural, a efectos de reducir su incidencia es usual el agregado de antioxidantes en el proceso de vulcanizado (Nagdi 1993, White 1995).

Ensayos en el laboratorio de envejecimiento anaeróbico indican un incremento del 20% en el valor del módulo de elasticidad transversal  $G$ , para carga dinámica de frecuencia 0.5 Hz y deformación  $\gamma$  del 100%, después de 120 días de envejecimiento a una temperatura de  $70^{\circ}\text{C}$  (Fuller et al. 1997). Los mismos ensayos indican una disminución del amortiguamiento, en todos los casos, inferior al 20% del valor inicial. La utilidad de estos datos es relativa, al no ser posible relacionarlos con un período de tiempo equivalente a temperaturas de servicio (Fuller et al. 1997).

*Brigestone*, Japón, realizó ensayos de envejecimiento acelerado mediante incrementos de temperatura y reacciones químicas y estableció una relación de 24 horas en laboratorio con 2.5 años en condiciones de servicio. Utilizando esta relación

señala que el cambio de rigidez en 60 años será, como máximo, un 20% del valor inicial (SMiRT11 1991).

### 2.5.6 Capacidad de carga vertical

La capacidad de carga vertical de los dispositivos de apoyo de caucho laminado viene dada por el fabricante de los mismos en base a resultados experimentales. Para una determinada composición de elastómero y una superficie dada, la capacidad de carga vertical se incrementa reduciendo el espesor de cada capa de elastómero y la rigidez horizontal se reduce incrementando el espesor total de las capas de caucho (Skinner et al. 1993).

El aumento de capacidad de carga vertical con la reducción de espesor de las capas de caucho se debe a la restricción que presentan las capas de acero a la deformación de expansión en el plano del elastómero, causada por su incompresibilidad, cuando el dispositivo es cargado verticalmente (Roeder & Stanton 1983).

Como guía de diseño Kelly (1993) sugiere una tensión vertical  $\sigma$  de alrededor de 70 kg/cm<sup>2</sup> y con esta tensión seleccionar  $G$  de acuerdo al tipo de elastómero a utilizar en la construcción del dispositivo. Según los valores dados por *Bridgestone*, para los dispositivos cuyas características se indican en la página 26, la tensión vertical resulta de unos 25 kg/cm<sup>2</sup> para caucho natural y unos 31 kg/cm<sup>2</sup> para caucho de alto amortiguamiento. Esta "reducción" de tensiones puede deberse a que, para determinada carga vertical, el desplazamiento vertical que sufre el dispositivo aumenta con la deformación tangencial por esfuerzo cortante que simultáneamente este actuando en él. Para el dispositivo de alto amortiguamiento (página 26), una carga vertical de 500 T genera un desplazamiento de 0.9 mm para 0% de deformación tangencial y de 1.6 mm para 200% de deformación tangencial. Para el dispositivo de caucho natural, las 500 T de carga vertical generan un desplazamiento de 1.2 mm para 0% de deformación tangencial y de 2.8 mm cuando la deformación tangencial es del 200%.

Roeder & Stanton (1983) presentan una fórmula empírica para la determinación de la deformación vertical  $\epsilon$  de dispositivos de caucho laminado por efectos de cargas de compresión, esta es:

$$\epsilon = \frac{\bar{\sigma}}{f_c E} \quad (2.12)$$

siendo  $f_c$  un coeficiente adimensional,  $E$  el módulo de elasticidad del caucho y  $\bar{\sigma}$  la tensión de compresión media. Con esta tensión de compresión media  $\bar{\sigma}$  determinan una tensión de cortante  $\tau_{max}$ ,

$$\tau_{max} = g_c \bar{\sigma} \quad (2.13)$$

siendo  $g_c$  otro coeficiente adimensional. En la citada referencia (Roeder & Stanton 1983) se dan valores para estos coeficientes,  $f_c$  y  $g_c$ , en función de un factor de

forma  $S$  y para dispositivos de planta rectangular. Para dispositivos de planta axisimétrica se citan otras referencias con expresiones empíricas similares.

## 2.6 ESTUDIO CRÍTICO DE LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS CON AISLAMIENTO DE BASE

### 2.6.1 Modelización dinámica de edificios porticados

En el apartado 2.4 se han descrito los principales tipos de dispositivos utilizados en el aislamiento sísmico de base y en el apartado 2.5 se analizan las propiedades mecánicas del tipo de dispositivos más utilizado, esto es, dispositivos de caucho laminado, a partir de resultados de ensayos experimentales. En este apartado se hace una revisión del cálculo numérico de estructuras con aislamiento sísmico, en especial de aquellas que utilizan sistemas de aislamiento con dispositivos de caucho laminado.

Desde el punto de vista del cálculo numérico, la respuesta sísmica de una estructura es el resultado de “filtrar” la señal sísmica a través de la misma estructura. La obtención de dicha respuesta, es decir, un análisis sísmico, requiere la definición previa tanto del movimiento del terreno como de las características estructurales. Obviamente, el sujeto del análisis no es la propia estructura, sino un modelo mecánico de la misma que, en este caso, es uno dinámico. La definición de tal modelo depende del tipo de estructura analizado y pretende no sólo proporcionar una descripción realista de su comportamiento, sino también desarrollar una serie de relaciones entre las acciones y la respuesta, que describan el *modelo matemático* del problema (Barbat & Miquel-Canet 1994).

Las características físicas a tener en cuenta en la definición de un modelo matemático son la masa, el amortiguamiento y la rigidez de la estructura. En el caso de los edificios de hormigón armado, la masa de la estructura está generalmente concentrada en unas zonas de la estructura fácilmente identificables. Por este motivo, los modelos dinámicos que suelen considerarse en este caso utilizan el *método de las masas concentradas*, de fácil aplicación y que proporciona resultados suficientemente precisos.

Si se hace la simplificación de despreciar la deformación por esfuerzo axial de los pilares, los pórticos pueden modelarse mediante un sistema de varios grados de libertad con masas concentradas a nivel de los forjados. Si, además, se supone que los forjados de las plantas son rígidos, el número de grados de libertad queda reducido a los desplazamientos de los pisos. En el supuesto de que los pórticos no tuvieran un plano de simetría o si la dirección del terremoto no estuviera contenida en dicho plano, se tendrían que considerar en el modelo grados de

libertad adicionales, a fin de incluir en el análisis la posibilidad de giro de las plantas en su propio plano, es decir, el fenómeno de torsión.

El método de las masas concentradas es eficiente en la modelización de los edificios, que son estructuras caracterizadas por una concentración real de su masa en algunos puntos discretos. En este caso, el modelo dinámico se obtiene concentrando la totalidad de la masa en estos puntos, suponiendo que el resto de la estructura tiene solamente rigidez, pero no masa. En el caso de estructuras continuas, el procedimiento de discretización más riguroso y que más se utiliza actualmente es el método de los elementos finitos.

- **Formulación General**

Utilizando aislamiento de base en un edificio se trata de conseguir que la estructura del mismo se mantenga en el rango elástico lineal, concentrando la no linealidad en los dispositivos de aislamiento. Considerando la notación de la figura 2.29, la ecuación de movimiento del sistema sujeto a una excitación sísmica  $a(t)$  se expresa como

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K} \mathbf{D} = -\mathbf{M} \mathbf{J} [\ddot{d}_b + a] \quad (2.14)$$

donde  $\mathbf{D}$  es un vector con la historia de desplazamientos relativos a la base,  $d_b$  es el desplazamiento de la base relativo al suelo,  $\mathbf{M}$  es la matriz de masas,  $\mathbf{C}$  es la matriz de amortiguamiento,  $\mathbf{K}$  la matriz de rigidez y  $\mathbf{J}$  es el vector que relaciona el movimiento de cuerpo rígido con los grados de libertad del modelo. Para edificios de cortante,  $\mathbf{J}$  es un vector unidad. Las condiciones de borde son

$$\text{para } t = 0 \rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

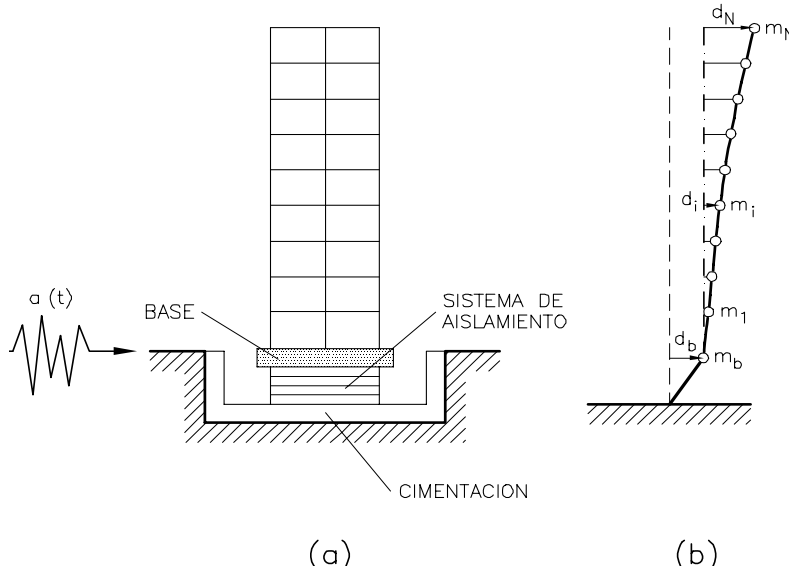
Las fuerzas de rigidez y amortiguamiento ejercidas por el edificio sobre la base se obtienen de la ecuación (2.14) como

$$\mathbf{J}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{J}^T \mathbf{K} \mathbf{D} = -\mathbf{J}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}} - \mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} [\ddot{d}_b + a] \quad (2.16)$$

Por lo que, la ecuación de movimiento de la base es

$$m_b(\ddot{d}_b + a) + \mathbf{J}^T \mathbf{M} [\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{J}(\ddot{d}_b + a)] + f = 0 \quad (2.17)$$

siendo  $m_b$  la masa de la base (encima del aislador) y  $f$  la fuerza ejercida por el aislador sobre  $m_b$ . La ecuación de  $f$  depende del tipo de aislador utilizado. Las



**Figura 2.29** Edificio de base aislada. (a) Esquema. (b) Modelo dinámico.

correspondientes a los aisladores mas utilizados son analizadas en Su, Ahmadi & Tadjbakhsh (1989), Su, Ahmadi & Tadjbakhsh (1990), Bozzo & Mahin (1990), Molinares & Barbat (1994) y Barbat & Bozzo (1997).

La solución general de la ecuación (2.14) puede obtenerse utilizando la superposición modal en la forma:

$$\mathbf{D}(t) = \sum_{i=1}^q \boldsymbol{\varphi}_i \eta_i(t) \quad (2.18)$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}_i$  son las formas modales,  $q$  es el número de modos incluido en el análisis y  $\eta_i$  las amplitudes modales, las cuales son determinadas por la siguiente expresión:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\nu_i\omega_i\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = -\frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_i} [\ddot{d}_b + a] = Q_i [\ddot{d}_b + a] \quad (2.19)$$

En esta ecuación,  $\omega_i$  y  $\nu_i$  son las frecuencias naturales y coeficientes de amortiguamiento del edificio y  $Q_i$  es el factor de participación modal. Reemplazando la ecuación (2.18) en la (2.17), la ecuación de movimiento de la base resulta

$$m_b(\ddot{d}_b+a)+\mathbf{J}^T\mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^q\varphi_i\ddot{\eta}_i(t)+\mathbf{J}(\ddot{d}_b+a)\right]+f=0 \quad (2.20)$$

- **Caso de las estructuras con dispositivos de caucho laminado**

Un esquema de dispositivos de caucho laminado y su correspondiente modelo dinámico es el presentado en la figura 2.2. La ecuación de movimiento para la base de un edificio apoyado sobre este tipo de dispositivos y excitado por una aceleración sísmica  $a(t)$  puede ser representada como

$$m_b(\ddot{d}_b+a)+c_b\dot{d}_b+k_b d_b+\mathbf{J}^T\mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^q\varphi_i\ddot{\eta}_i(t)+\mathbf{J}(\ddot{d}_b+a)\right]=0 \quad (2.21)$$

donde  $c_b$  es el amortiguamiento equivalente y  $k_b$  es la rigidez equivalente del sistema de aislamiento (Kelly 1991a). Nótese que esta ecuación es igual a las ecuaciones generales (2.17) y (2.20) donde la fuerza  $f$  ejercida por los dispositivos de aislamiento ha sido reemplazada por el valor correspondiente a esta fuerza en caso de dispositivos de caucho laminado, esto es  $f = c_b\dot{d}_b+k_b d_b$ .

El sistema lineal equivalente permite una solución numérica aproximada del problema. Las amplitudes modales  $\eta_i(t)$  y el desplazamiento de base  $d_b$  se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas dado por las ecuaciones (2.19) y (2.21).

El período de diseño más aceptado para dispositivos de caucho laminado es  $T_b = 2\text{ s}$  (donde  $T_b = 2\pi\sqrt{m_{tot}/k_b}$ ). El coeficiente de amortiguamiento equivalente del caucho varía considerablemente. Para pequeñas deformaciones, puede tener un valor de  $\nu_b = 0.3$  (donde  $\nu_b = c_b/2\omega_b$ ) pero para grandes deformaciones puede bajar a 0.05. Un valor  $\nu = 0.1$  suele ser aceptado como parámetro de diseño. La rigidez equivalente del sistema  $k_b$  será función de la rigidez de los dispositivos individuales  $K_H$  y ésta también varía significativamente (véase el apartado 2.5.1).

## 2.6.2 Teoría lineal del aislamiento de base

- **Introducción**

Un análisis preciso de estructuras soportadas por dispositivos aisladores de base requiere un análisis no lineal paso a paso en el tiempo. No obstante para ciertos sistemas, como los dispositivos de caucho laminado, es posible linealizar las ecuaciones no lineales utilizando los conceptos de rigidez equivalente y coeficientes de amortiguamiento equivalente. Esta simplificación propuesta por Kelly (1991a)



permite conocer, en forma aproximada, el comportamiento de estructuras con aislamiento elastomérico. En el caso de dispositivos de fricción resulta difícil de linealizar la ecuación de movimiento, por lo que se han propuesto (Bozzo & Mahin 1990) sistemas no lineales de un grado de libertad.

Un hecho importante es que el período fundamental de las estructuras aisladas con dispositivos de caucho laminado es similar al período de estos dispositivos. El período fundamental de la estructura de base fija sufre un corrimiento hacia un período mucho mayor. El objetivo es apartar este período del período predominante de los terremotos. Para estructuras con aislamiento, los factores de participación para modos superiores son despreciables comparados con la participación del primero.

Si la frecuencia natural del sistema de aislamiento es próxima a la frecuencia predominante de un terremoto, la respuesta estructural del edificio aislado sería mayor que la respuesta de la estructura convencional de base fija. Por lo que resulta esencial predecir con la mejor exactitud posible el contenido de frecuencias de los terremotos en la zona.

El primer modo de vibración será excitado, aún cuando la frecuencia fundamental de la estructura de base aislada se encuentre lejos de la predominante del terremoto, por lo que cierto amortiguamiento es necesario para limitar los desplazamientos máximos.

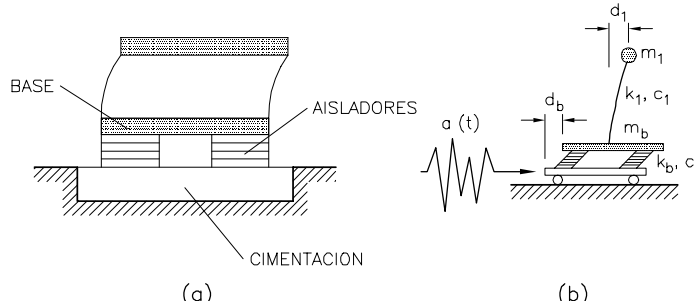
#### • Estructuras de un grado de libertad

En la figura 2.30 se indica una estructura de un grado de libertad apoyada sobre dispositivos de caucho laminado y su correspondiente modelo dinámico. Las masas  $m_b$  y  $m_1$  corresponden a la base y a la estructura, respectivamente, la rigidez  $k_b$  y el coeficiente de amortiguamiento  $c_b$  definen las propiedades mecánicas del sistema aislador y la rigidez  $k_1$  y el coeficiente de amortiguamiento  $c_1$  definen las propiedades mecánicas de la estructura.

El movimiento sísmico es representado por el desplazamiento  $d(t)$ , la velocidad  $v(t)$  y la aceleración  $a(t)$  del terreno actuando sobre la base. Las vibraciones del suelo se propagan a través de los dispositivos aisladores induciendo desplazamientos en la base y en la estructura, siendo  $d_1(t)$  el desplazamiento de la masa  $m_1$  con respecto a la base y  $d_b(t)$  el desplazamiento de la masa  $m_b$  con respecto al terreno. El principio de equilibrio dinámico de D'Alembert permite escribir las ecuaciones de movimiento para las masas  $m_1$  y  $m_b$

$$m_1 \left[ \ddot{d}_1(t) + \ddot{d}_b(t) + a(t) \right] + k_1 d_1(t) + c_1 \dot{d}_1(t) = 0 \quad (2.22)$$

$$m_b \left[ \ddot{d}_b(t) + a(t) \right] + m_1 \left[ \ddot{d}_1(t) + \ddot{d}_b(t) + a(t) \right] + k_b d_b(t) + c_b \dot{d}_b(t) = 0 \quad (2.23)$$



**Figura 2.30** Estructura de un grado de libertad con aislamiento de base. (a) Esquema. (b) Modelo dinámico.

En notación matricial estas ecuaciones son representadas como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} = -\mathbf{M}\mathbf{J}a(t) \quad (2.24)$$

donde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_b + m_1 & m_1 \\ m_1 & m_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_b \\ d_1 \end{bmatrix}$$

El problema en autovalores y autovectores asociado a la ecuación (2.24) puede expresarse como

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia del sistema y  $\boldsymbol{\varphi}$  es su correspondiente forma modal. La ecuación característica para este sistema puede ser escrita en forma explícita como

$$\omega^4(1-\gamma) - \omega^2 \left( \frac{k_b}{m_1 + m_b} + \frac{k_1}{m_1} \right) + \frac{k_1}{m_1} \frac{k_b}{m_1 + m_b} = 0 \quad (2.26)$$

siendo  $\gamma = m_1/(m_1 + m_b)$ . De la solución de esta ecuación se obtienen las dos frecuencias naturales del sistema. Definiendo las frecuencias fundamentales de la estructura  $\omega_s$  y del sistema de aislamiento sísmico  $\omega_b$  como

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_b = \sqrt{\frac{k_b}{m_b + m_1}} \quad (2.27)$$

se puede expresar la ecuación (2.26) como

$$\omega^4 (1 - \gamma) - \omega^2 (\omega_b^2 + \omega_s^2) + \omega_b^2 \omega_s^2 = 0 \quad (2.28)$$

La solución de la ecuación (2.28) es

$$\omega^2 = \frac{\omega_b^2 + \omega_s^2}{2(1 - \gamma)} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(1 - \gamma)\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2}} \right] \quad (2.29)$$

en la cual se ha introducido el coeficiente  $\varepsilon = \omega_b^2/\omega_s^2$ .

Al ser la rigidez estructural  $k_1$  mucho mayor que la rigidez del sistema de aislamiento sísmico  $k_b$ , la ecuación (2.27) indica que el parámetro  $\varepsilon$  resulta muy pequeño, aproximadamente 1% según Kelly (1991a). Por consecuencia, considerando  $\varepsilon^2 \simeq 0$  y  $(1 + \varepsilon)^2 \simeq 1$ , la ecuación (2.29) resulta

$$\omega^2 \simeq \frac{\omega_b^2 + \omega_s^2}{2(1 - \gamma)} [1 \pm (1 - 2(1 - \gamma)\varepsilon)] \quad (2.30)$$

Los correspondientes autovalores son

$$\omega_1^2 \simeq \frac{\omega_b^2 + \omega_s^2}{2(1 - \gamma)} 2(1 - \gamma)\varepsilon \simeq \omega_b^2 (1 + \varepsilon) \simeq \omega_b^2 \quad (2.31)$$

$$\omega_2^2 \simeq \frac{\omega_b^2 + \omega_s^2}{2(1 - \gamma)} (2 - 2\varepsilon(1 - \gamma)) \simeq \frac{\omega_s^2}{1 - \gamma} \quad (2.32)$$

En estas ecuaciones  $\omega_1$  representa la frecuencia natural modificada del sistema aislador y  $\omega_2$  la frecuencia natural modificada de la estructura. Los autovectores  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , siguiendo el desarrollo de Barbat & Bozzo (1997), se obtienen empleando las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  para resolver el sistema lineal (2.25)

$$\varphi_1^T = [1 \quad -\varepsilon/\gamma] \quad (2.33)$$

$$\varphi_2^T = [1 - 1/\gamma] \quad (2.34)$$

Los vectores  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  forman una base completa y son utilizados para desacoplar las ecuaciones de movimiento (2.24),

$$\mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} d_b(t) \\ d_1(t) \end{bmatrix} = \eta_1(t) \varphi_1 + \eta_2(t) \varphi_2 \quad (2.35)$$

donde  $\eta_1(t)$  y  $\eta_2(t)$  son funciones de tiempo. Tomando las componentes  $x_b(t)$  y  $x_1(t)$  individualmente y considerando las ecuaciones (2.33) y (2.34), se obtiene

$$x_b(t) = \eta_1(t) \varphi_1^b + \eta_2(t) \varphi_2^b = \eta_1(t) + \eta_2(t) \quad (2.36)$$

$$x_1(t) = \eta_1(t) \varphi_1^s + \eta_2(t) \varphi_2^s = \frac{-\varepsilon}{\gamma} \eta_1(t) - \frac{\eta_2(t)}{\gamma} \quad (2.37)$$

Las ecuaciones presentadas en esta sección permiten realizar algunas observaciones generales acerca del comportamiento de estructuras con aislamiento de base. Si la frecuencia fundamental de los terremotos esta próxima a la frecuencia natural del edificio de base fija, el sistema de aislamiento de base debería tener una frecuencia alejada de estas.

A diferencia de una estructura de un solo grado de libertad y base fija, que tiene una única frecuencia  $\omega_s$ , una estructura aislada tendrá dos frecuencias naturales  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . La ecuación (2.31) indica que la frecuencia  $\omega_1$  es similar a  $\omega_b$ . Para evitar la resonancia entre el primer modo y la frecuencia predominante de un terremoto, es conveniente que  $\omega_1$  sea menor que  $\omega_s$ . Además la ecuación (2.33) indica que los desplazamientos en el primer modo están concentrados en la base, mientras que el desplazamiento relativo dintel-base resulta muy pequeño; el sistema se comporta casi como un sólido rígido.

La segunda frecuencia natural,  $\omega_2$ , resulta mayor que  $\omega_s$ , y puede ser suficiente para evitar la resonancia en el segundo modo. La ecuación (2.34) indica el peligro potencial de una vibración en el segundo modo ya que el desplazamiento relativo dintel-base resulta mayor que el correspondiente al primer modo.

Una conclusión general aplicable a estructuras aisladas mediante dispositivos de caucho laminado es que la respuesta es minimizada por el cambio de la dinámica del sistema original (de base fija), no por disipación de energía.

Pueden existir, no obstante, terremotos cuya frecuencia predominante sea baja y próxima a  $\omega_1$ . En este caso la respuesta de la estructura con aislamiento puede ser muy desfavorable, incluso peor a la de una estructura similar de base fija, y la respuesta deberá ser limitada por el amortiguamiento  $\nu_b$ , cuyo valor puede

variar entre el 5% y el 30% del amortiguamiento crítico. Un valor del 10% es frecuentemente utilizado (Barbat & Bozzo 1997).

Resulta por lo tanto obvia la necesidad de estudios sismológicos para determinar el rango de los períodos predominantes que son posibles en una determinada región.

- **Estructuras de varios grados de libertad**

Una extensión de la teoría lineal de aislamiento de base presentada en el apartado anterior ha sido desarrollada por Kelly (1993). El modelo analítico es similar al de estructuras de un solo grado de libertad. En este caso, la ecuación de movimiento en notación matricial es

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} = -\mathbf{M}\mathbf{J}a(t) \quad (2.38)$$

donde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_b + m_T & \mathbf{J}^T \mathbf{M}_S \\ \mathbf{M}_S \mathbf{J} & \mathbf{M}_S \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_b & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_S \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_b & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_S \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_b \\ \mathbf{D}_S \end{bmatrix}$$

En estas expresiones  $\mathbf{K}_S$  es la matriz de rigidez lateral de la estructura,  $\mathbf{C}_S$  es la matriz de amortiguamiento estructural,  $\mathbf{M}_S$  es la matriz de masas de la estructura,  $m_T$  es la masa estructural total  $m_T = \sum_{i=1}^N m_i$  y  $m_i$  es la masa correspondiente a una planta.

De forma análoga al procedimiento seguido en la sección anterior para sistemas de un grado de libertad, el problema de autovalores y autovectores asociado a la ecuación (2.38) puede expresarse como

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (2.39)$$

asumiendo que  $\boldsymbol{\varphi}_i \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_j = 0$ , si  $i \neq j$ .

Las formas modales y frecuencias naturales se pueden obtener directamente de estas ecuaciones utilizando procedimientos estándar. No obstante, Kelly (1993) indica que esta alternativa puede conducir a errores numéricos causados por el mal condicionamiento de la matriz de rigidez, ya que un elemento de la diagonal tendría dos ordenes de magnitud inferiores a los demás. Por ello propone un procedimiento iterativo basado en los autovalores y autovectores de la estructura de

base fija. Resultados numéricos indican que las frecuencias altas no son afectadas por los dispositivos de aislamiento y resultan próximas a las de base fija. Las frecuencias bajas, por el contrario, si sufren un corrimiento significativo causado por los aisladores.

### 2.6.3 Teoría no lineal del aislamiento de base

La simulación numérica de estructuras con aislamiento de base necesita de algoritmos no lineales eficientes que permitan su análisis paso a paso (Barbat & Bozzo 1997). Varios procedimientos han sido propuestos para realizar esta integración en el tiempo y en esta sección se hace una breve revisión de los más importantes.

Los procedimientos más empleados corresponden a los denominados monolíticos (Barbat & Bozzo 1997). Éstos no distinguen entre los grados de libertad correspondientes a la estructura y aquellos correspondientes a los aisladores. Si la estructura esta aislada, generalmente, permanece en el rango elástico lineal y, por ello, estos procedimientos monolíticos son ineficientes.

Los algoritmos basados en una condensación estática reducen el orden del problema no-lineal limitándolo al número de grados de libertad inelásticos. Además de la condensación estática se pueden desacoplar las ecuaciones de movimiento de los aisladores y de la estructura de forma iterativa. Estos métodos iterativos, combinados con la correspondiente linealización de los términos no-lineales se denominan esquemas iterativos por bloques (Barbat, Molinares & Codina 1996).

- **Esquemas de integración paso a paso monolíticos**

La ecuación de movimiento

$$M\ddot{D} + C\dot{D} + f(D) = F \quad (2.40)$$

es similar a la ecuación (2.38) pero el vector  $f(D)$  representa las fuerzas no-lineales. Los procedimientos de simulación monolíticos resuelven el problema no-lineal estático en cada paso de tiempo, considerando el sistema completo, de forma similar a procedimientos de análisis inelásticos de estructuras convencionales. En cada paso, la solución se obtiene usando la matriz de rigidez tangente o usando las pseudo-fuerzas equivalentes. La evaluación y descomposición de la matriz tangente en cada paso es un procedimiento costoso computacionalmente y por ello estos procedimientos no son adecuados en aislamiento de base. Una alternativa más eficiente es evaluar las fuerzas equivalentes pseudo-estáticas en cada paso de tiempo. De esta forma la ecuación de movimiento es

$$M\ddot{\mathbf{D}} + C\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}_o\mathbf{D} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_N \quad (2.41)$$

donde el vector  $\mathbf{f}(D)$  se linealiza de la siguiente forma

$$\mathbf{f}(D) = \mathbf{K}_o\mathbf{D} + \mathbf{F}_N$$

La matriz de rigidez  $\mathbf{K}_o$  es lineal y el vector de pseudo fuerzas  $\mathbf{F}_N$  es dependiente del tiempo. La matriz  $\mathbf{K}_o$  puede ser la de rigidez tangente inicial.

La principal ventaja de emplear pseudo-fuerzas es de que la matriz de rigidez original se descompone una sola vez al inicio de la integración, siendo esta operación la que más contribuye a la ineficiencia numérica. En cada paso, el problema no lineal se limita a la evaluación de las fuerzas equivalentes. Si estas fuerzas corresponden a unos pocos grados de libertad el procedimiento puede ser eficiente ya que los cálculos se limitan al nivel de los elementos.

- **Esquemas de iteración por bloques**

Los algoritmos monolíticos requieren procedimientos de discretización de las ecuaciones de movimiento que incluyan su linealización y acoplamiento (Su et al. 1989). El sistema global no es de fácil solución debido a las distintas rigideces relativas de la estructura y de la base, por lo que suele necesitar incrementos de tiempo muy pequeños. Estos procedimientos suelen necesitar un importante número de iteraciones y su convergencia es lenta. Por ello se propusieron esquemas de iteración por bloques que reducen el número de iteraciones y disminuyen el tiempo de convergencia (Codina 1992). Un estudio de la eficiencia comparativa entre los esquemas monolíticos y los de bloques iterativos para edificios con aislamiento de base se presenta en Barbat et al. (1996). Los procedimientos de bloques iterativos tratan la no-linealidad del problema como una actualización iterativa de la fuerza  $\mathbf{f}$  en los aisladores.

Las ecuaciones que se presentan a continuación representan un problema genérico acoplado (Codina 1992)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}(\mathbf{y}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

donde  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  son vectores a determinar,  $\mathbf{q}_1$  y  $\mathbf{q}_2$  son los vectores de carga y  $\mathbf{A}_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  son matrices, donde  $\mathbf{A}_{22}$  depende de  $\mathbf{y}$ . Las ecuaciones del sistema (2.42) están acopladas linealmente. La matriz  $\mathbf{A}_{22}$  se linealiza de la siguiente forma

$$\mathbf{A}_{22}(\mathbf{y}^{(i)})\mathbf{y}^{(i)} \approx \mathbf{A}_{22}^L \mathbf{y}^{(i)} + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}^{(i-1)}) \quad (2.43)$$

donde  $\mathbf{A}_{22}^L$  es la forma linealizada de  $\mathbf{A}_{22}$ . A partir de la ecuación (2.42) se puede plantear el siguiente procedimiento monolítico, similar al presentado anteriormente para las pseudo-fuerzas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(i)} \\ \mathbf{y}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 - \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}^{(i-1)}) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Alternativamente a partir de la ecuación (2.44) y empleando la iteración por bloques de Gauss-Seidel se pueden formular las siguientes ecuaciones acopladas

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{y}^{(i-1)} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{A}_{22}^L \mathbf{y}^{(i)} = \mathbf{q}_2 - \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}^{(i-1)}) - \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}^{(i)} \quad (2.46)$$

Esta es una primera alternativa para formular un procedimiento iterativo por bloques. La ecuación (2.45) se resuelve primero dando un valor para  $\mathbf{x}^{(i)}$  y este valor se emplea para resolver la ecuación (2.46) para obtener el vector  $\mathbf{y}^{(i)}$ .

Las ecuaciones desacopladas del movimiento para la estructura (2.19) y el aislador (2.20) se pueden expresar en la siguiente forma compacta

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + 2\nu\boldsymbol{\Omega}\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{\eta} + \frac{\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}} \ddot{d}_b = -\frac{\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{J}}{\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}} a(t) \quad (2.47)$$

$$\mathbf{J}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + (\mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J} + m_b) \ddot{d}_b + f = -(\mathbf{J}^T \mathbf{M} \mathbf{J}) a(t) - m_b a(t) \quad (2.48)$$

donde  $\boldsymbol{\Phi}$  es la matriz modal correspondiente a los primeros  $q$  modos de vibración de orden  $(n \times q)$ ,  $\nu$  es la matriz diagonal de amortiguamiento y  $\boldsymbol{\Omega}$  es la matriz diagonal de frecuencias. Los términos  $\ddot{\eta}_k$  y  $\dot{\eta}_k$  para el instante de tiempo  $k$  en la ecuación (2.47) y  $\ddot{d}_{b,k}$  en la ecuación (2.48) se pueden expresar en función de los desplazamientos  $\eta_k$  y  $d_{b,k}$  empleando, por ejemplo, la discretización de Newmark. Se formula entonces el siguiente problema, similar al representado por las ecuaciones (2.44)



$$\mathbf{A}_{11} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{I} + \frac{2\gamma}{\beta\Delta t}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\Omega}^2, \quad \mathbf{A}_{12} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{Q} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{A}_{21} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{J}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi} \quad \mathbf{A}_{22} = \frac{m_{tot}}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c_b + k_b \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 = & [-a(t) + \frac{d_{bk}}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{d}_{bk}}{\beta\Delta t} + (1 - \frac{\gamma}{2\beta})\ddot{d}_{bk}]\mathbf{Q} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\boldsymbol{\eta}_k + \frac{2\gamma}{\beta\Delta t}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\eta}_k + \\ & \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\boldsymbol{\eta}}_k - 2(1 - \frac{\gamma}{\beta})\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\nu}\dot{\boldsymbol{\eta}}_k + (1 - \frac{\gamma}{2\beta})\ddot{\boldsymbol{\eta}}_k - 2(1 - \frac{\gamma}{2\beta})\Delta t\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\nu}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_k \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_2 = & [-a(t) + \frac{d_{bk}}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{d}_{bk}}{\beta\Delta t} + (1 - \frac{\gamma}{2\beta})\ddot{d}_{bk}]m_{tot} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{J}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\eta}_k + \\ & \frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{J}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\dot{\boldsymbol{\eta}}_k + (1 - \frac{\gamma}{2\beta})\mathbf{J}^T\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c_b d_{bk} - (1 - \frac{\gamma}{\beta})c_b \dot{d}_{bk} - \\ & (1 - \frac{\gamma}{2\beta})\Delta t c_b \ddot{d}_{bk} - f \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde  $\mathbf{Q}$  es un vector que contiene los factores de participación modal y  $\boldsymbol{\eta}_k$ ,  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_k$  y  $\ddot{\boldsymbol{\eta}}_k$  son vectores que contienen desplazamientos, velocidades y aceleraciones conocidas, respectivamente, en el intervalo de tiempo  $k$ .



# 3

## MODELOS CONSTITUTIVOS PARA ELASTÓMEROS

### 3.1 INTRODUCCIÓN

Las leyes o modelos constitutivos describen la naturaleza (macroscópica) del comportamiento de los materiales. Diferentes leyes constitutivas gobiernan distintos tipos de comportamiento material, o más precisamente, un modelo constitutivo describe un material ideal y las predicciones de este modelo deberían resultar una aproximación cercana al comportamiento observado del material real que la ley constitutiva trata de describir.

Los modelos constitutivos son necesarios para distinguir entre diferentes medios continuos, por ejemplo entre un material como el acero y otro material como el caucho, distinción que la descripción geométrica del movimiento de un medio continuo no puede realizar. Estas leyes constitutivas establecen la relación entre dos campos, el campo donde se cumplen las condiciones de equilibrio tensión-fuerza y el campo donde se cumplen las condiciones cinemáticas de compatibilidad deformación-desplazamientos.

Una relación lineal tensión-deformación puede ser un modelo aceptable, dentro de ciertos límites, para representar el comportamiento de algunos materiales sólidos homogéneos y elásticos, como el acero, en el rango de pequeñas deformaciones. No obstante, cuando las estructuras construidas con tales materiales, deben soportar acciones extraordinarias tales como terremotos, es necesario utilizar modelos constitutivos más sofisticados para simular el comportamiento del material con el fin de predecir con cierta exactitud la respuesta de estas estructuras.

Otros materiales, tales como los elastómeros, cuando son sometidos a cargas presentan grandes cambios de forma y una respuesta fuertemente no lineal. Una vez retiradas las cargas retornan a posiciones muy cercanas a la inicial y cuando son sometidos a cargas cíclicas exhiben en la respuesta una considerable disipación de energía, especialmente aquellos conocidos como elastómeros de alto amortiguamiento (véase la Sección 2.5). Un modelo constitutivo destinado a simular el comportamiento de estos materiales deberá ser capaz de captar estos fenómenos.

En este capítulo se realiza, en primer lugar, una breve revisión de las leyes fundamentales de la termodinámica que deben cumplir los modelos constitutivos. A continuación se propone un modelo hiperelástico generalizado para el análisis de elastómeros multi-fase. Se utiliza teoría de mezclas para incorporar las expresiones constitutivas básicas propuestas para cada sustancia, esto es, viscoelasticidad para el caucho y elastoplasticidad para las partículas agregadas, en una formulación de sólido compuesto. Todo el modelo se desarrolla en grandes deformaciones en función de los estiramientos principales. La resolución numérica de esta formulación se implementa en el Capítulo 5, utilizando el método de los elementos finitos, con especial consideración al tratamiento de la presión interna generada por la cuasi incompresibilidad de los elastómeros.

## 3.2 FORMULACIÓN DE MODELOS CONSTITUTIVOS

En esta sección se hace una breve revisión de algunos conceptos básicos de termodinámica de medios continuos, que serán luego utilizados en la formulación de los modelos constitutivos. Para un estudio más amplio de estos conceptos pueden consultarse las referencias clásicas de mecánica del continuo (Trusdell & Noll 1965, Malvern 1969, Gurtin 1981, Marsden & Hughes 1983).

### 3.2.1 Leyes fundamentales de la termodinámica

Considérese un cuerpo continuo  $\mathcal{B}$  el cual ocupa una región  $\Omega$  con contorno  $\partial\Omega$  en el espacio de tres dimensiones  $\mathcal{E}^3$  en su configuración de referencia. Sea  $\mathcal{B}$  sujeto a un movimiento  $\varphi$  tal que para cada tiempo  $t$ , la deformación  $\varphi(\cdot) : \mathcal{E}^3 \rightarrow \mathcal{E}^3$  mapea cada partícula material  $\mathbf{X}$  de  $\mathcal{B}$  en el lugar  $\mathbf{x}$  que esta ocupa al tiempo  $t$ . Para establecer las leyes fundamentales de la termodinámica, es conveniente introducir los campos escalares  $\theta(\mathbf{x}, t)$ ,  $e(\mathbf{x}, t)$ ,  $s(\mathbf{x}, t)$  y  $r(\mathbf{x}, t)$  definidos en la configuración deformada  $\varphi(\Omega, t)$  de  $\mathcal{B}$ , los cuales representan la *temperatura*, *energía específica interna*, *entropía específica* y *densidad de producción de calor*. Además de estos campos escalares, el campo tensorial  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  representará el *tensor de tensiones de Cauchy* y

los campos vectoriales  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  y  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  representarán, respectivamente, las *fuerzas másicas* y el *flujo de calor*.

### Conservación de masa

El postulado de conservación de masa requiere el cumplimiento de:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}[\mathbf{v}] = 0 \quad (3.1)$$

donde  $\rho$  es el campo de *densidad de masa*,  $\mathbf{v}$  es la *velocidad* espacial y  $\operatorname{div}[\cdot]$  representa la *divergencia espacial* de  $[\cdot]$ .

### Balance de momento

En su forma local euleriana, el balance de momento puede ser expresado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}] + \rho \mathbf{b} &= \rho \dot{\mathbf{v}} && \text{en } \varphi(\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma}^T &= \boldsymbol{\sigma} && \\ \mathbf{f} &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} && \text{en } \varphi(\partial\Omega) \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal al contorno deformado  $\varphi(\partial\Omega)$  de  $\mathcal{B}$ ,  $\mathbf{f}$  es el campo vectorial de fuerzas de superficie y  $\dot{\mathbf{v}}$  el campo de *aceleraciones*.

### El primer principio

El primer principio de la termodinámica, que postula la conservación de energía, en forma local euleriana, se expresa en forma explícita por la ecuación

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho r - \operatorname{div}[\mathbf{q}] \quad (3.3)$$

donde

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$$

es la *tasa de deformación*, siendo  $\nabla(\cdot)$  el gradiente espacial de  $(\cdot)$ .

### El segundo principio

El segundo principio de la termodinámica postula la irreversibilidad de producción de entropía. Es expresado por medio de la desigualdad:

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \left[ \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right] - \frac{\rho r}{\theta} \geq 0 \quad (3.4)$$

### La desigualdad de Clausius-Duhem

Combinando el primer y segundo principio de la termodinámica se obtiene la desigualdad

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \left[ \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right] - \frac{1}{\theta} (\rho \dot{e} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \operatorname{div} [\mathbf{q}]) \geq 0$$

De la introducción de la *energía libre específica*  $\psi$ , también conocida como energía libre de *Helmholtz* por unidad de masa, definida por

$$\psi = e - \theta s \quad (3.5)$$

junto con la identidad

$$\operatorname{div} \left[ \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right] = \frac{1}{\theta} \operatorname{div} [\mathbf{q}] - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta$$

en la desigualdad anterior resulta la desigualdad de *Clausius-Duhem*:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (3.6)$$

donde  $\mathbf{g} = \nabla \theta$  es el gradiente de temperatura.

### 3.2.2 Axiomas constitutivos

Los principios presentados en el apartado anterior son válidos para cualquier cuerpo continuo; para distinguir entre diferentes tipos de material debe introducirse un modelo constitutivo. En este apartado se presentan tres axiomas, los cuales forman la base para el desarrollo de modelos constitutivos de tipo general y también deben cumplirse cualquiera sea el material modelado.

Se introducen a continuación las definiciones de procesos termocinético y calordinámico. Un *proceso termocinético* sobre  $\mathcal{B}$  es el desarrollado por el par de campos  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$  y  $\theta(\mathbf{x}, t)$ . Un *proceso calordinámico* es definido por el conjunto de campos  $\{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t), e(\mathbf{x}, t), s(\mathbf{x}, t), r(\mathbf{x}, t), \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)\}$  en  $\mathcal{B}$ , tal que se satisfacen el balance de momento y el primer y segundo principio de la termodinámica.

### Determinismo termodinámico

El *principio de determinismo termodinámicamente compatible* postula que “la historia del proceso termocinético al que se ha sometido una zona próxima al punto  $\mathbf{X}$  de  $\mathcal{B}$  determina un proceso calordinámico para  $\mathcal{B}$  en  $\mathbf{X}$ ”. Para un *material simple* la historia local de  $\mathbf{F}$ ,  $\theta$  y  $\mathbf{g}$  es suficiente para determinar la historia del proceso termocinético para propósitos constitutivos. En este caso, considerando a las fuerzas masicas  $\mathbf{b}$  y de calor  $r$  como entregadas por el balance de momento lineal,

ecuación (3.2), y la conservación de energía, ecuación (3.3), respectivamente e introduciendo la energía libre específica, el principio de determinismo termodinámico implica la existencia de los funcionales  $F$ ,  $G$ ,  $N$ ,  $J$  tal que, para un punto  $\mathbf{X}$ , se cumplen las siguientes relaciones durante todo el proceso termocinético,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(t) &= F(\mathbf{F}^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) \\ \psi(t) &= G(\mathbf{F}^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) \\ s(t) &= N(\mathbf{F}^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) \\ \mathbf{q}(t) &= J(\mathbf{F}^t, \theta^t, \mathbf{g}^t)\end{aligned}\tag{3.7}$$

y la desigualdad de Clasius-Duhem, ecuación (3.6). La dependencia en  $\mathbf{X}$  de ambos lados de la ecuación (3.7) se da por sobreentendida y  $(\cdot)^t$  en el lado derecho de esta ecuación señala la historia de  $(\cdot)$  en el punto  $\mathbf{X}$  hasta el tiempo presente  $t$ .

### Objetividad material

Otro importante axioma de la teoría constitutiva es el *principio de objetividad material*. Este principio sostiene que “la respuesta material es independiente del observador”. El movimiento  $\boldsymbol{\varphi}^*$  es relacionado con el movimiento  $\boldsymbol{\varphi}$  por un cambio en el observador si

$$\boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)\tag{3.8}$$

donde  $\mathbf{y}(t)$  es un punto y  $\mathbf{Q}(t)$  un tensor ortogonal. Esta relación corresponde a un movimiento relativo rígido entre diferentes observadores y el gradiente de deformación correspondiente a  $\boldsymbol{\varphi}^*$  es dado por

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}\tag{3.9}$$

Los campos escalares, tales como  $\theta$ ,  $\psi$ , y  $s$ , no son afectados por un cambio en el observador, pero las tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}(t)$ , el flujo de calor  $\mathbf{q}(t)$  y el gradiente de temperatura  $\mathbf{g}(t)$  se transforman según las reglas

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &\rightarrow \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{q} &\rightarrow \mathbf{q}^* = \mathbf{Q}\mathbf{q} \\ \mathbf{g} &\rightarrow \mathbf{g}^* = \mathbf{Q}\mathbf{g}\end{aligned}\tag{3.10}$$

El principio de objetividad material introduce restricciones a los funcionales de la ecuación (3.7). Formalmente requiere que  $F$ ,  $G$ ,  $N$ ,  $J$  cumplan con

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^*(t) &= F(\mathbf{F}^{t*}, \theta^t, \mathbf{g}^{t*}) \\ \psi(t) &= G(\mathbf{F}^{t*}, \theta^t, \mathbf{g}^{t*}) \\ s(t) &= N(\mathbf{F}^{t*}, \theta^t, \mathbf{g}^{t*}) \\ \mathbf{q}^*(t) &= J(\mathbf{F}^{t*}, \theta^t, \mathbf{g}^{t*})\end{aligned}\tag{3.11}$$

para cualquier transformación de la forma expresada por las ecuaciones (3.9) y (3.10).

### Simetría material

El grupo simétrico de un material es el grupo de cambios de configuración de referencia que preservan la densidad y para los cuales los funcionales  $F$ ,  $G$ ,  $N$ ,  $J$  no son afectados. El grupo simétrico de un material sólido es un subgrupo de un grupo ortogonal  $\mathcal{O}$ . Un subgrupo  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{O}$  es un grupo simétrico del material definido por los funcionales  $F$ ,  $G$ ,  $N$ ,  $J$  si las relaciones

$$\begin{aligned} F(\mathbf{F}^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) &= F([\mathbf{F} \mathbf{Q}]^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) \\ G(\mathbf{F}^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) &= G([\mathbf{F} \mathbf{Q}]^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) \\ N(\mathbf{F}^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) &= N([\mathbf{F} \mathbf{Q}]^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) \\ J(\mathbf{F}^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) &= J([\mathbf{F} \mathbf{Q}]^t, \theta^t, \mathbf{g}^t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

se cumplen para cualquier  $\mathbf{Q} \in \mathcal{S}$  independiente del tiempo. Un sólido es *isótropo* si su grupo simétrico es todo el grupo ortogonal  $\mathcal{O}$ . En el desarrollo de cualquier modelo constitutivo los funcionales deben cumplir con las restricciones impuestas por las simetrías del material.

### 3.2.3 Termodinámica con variables internas

Las ecuaciones constitutivas (3.7) escritas en términos de funcionales de la historia de  $\mathbf{F}$ ,  $\theta$  y  $\mathbf{g}$ , en dicha forma, son demasiado generales para tener utilidad práctica en la modelización de materiales reales sujetos a procesos termodinámicos reales. Esto es especialmente cierto cuando se tienen en cuenta identificación experimental de funciones constitutivas y la solución de los correspondientes problemas de contorno.

Una alternativa efectiva a la descripción general basada en la historia de funcionales es la adopción de la *termodinámica con variables internas*. El punto de partida de la termodinámica con variables internas es la hipómonografía que sostiene que en cualquier instante del proceso termodinámico, el estado termodinámico (definido por  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\psi$ ,  $s$  y  $\mathbf{q}$ ) en un punto dado  $\mathbf{X}$  puede ser completamente determinado por el conocimiento de un número finito de *variables de estado*. El estado termodinámico depende solo del valor instantáneo de las variables de estado y de su variación temporal y no de su historia pasada. Esta hipómonografía está conectada con la aceptación de la existencia de un estado (ficticio) de equilibrio termodinámico conocido como *estado de acompañamiento local* descrito por el valor actual de las variables de estado. Todo proceso es considerado como una sucesión de estados de equilibrio.



Desde el punto de vista matemático, las variables de estado pueden ser consideradas como parámetros de la historia del proceso termocinético que reemplazan la compleja descripción constitutiva en términos de la historia de funcionales por una aproximación con un número finito de parámetros. Es conveniente asumir que en un cierto tiempo  $t$ , el estado termodinámico en un punto es determinado por el grupo  $\{\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}\}$  de variables de estado donde  $\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}$  son valores *instantáneos* de gradiente de deformación, temperatura y gradiente de temperatura y  $\boldsymbol{\alpha}$  es un grupo  $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$  de  $k$  variables internas asociadas con mecanismos disipativos. Cada elemento  $\alpha_i \in \boldsymbol{\alpha}$  puede ser en general una entidad de naturaleza escalar, vectorial o tensorial.

Siguiendo esta hipómonografía, se asume que la energía libre específica tiene la forma

$$\bar{\psi} = \psi(\mathbf{F}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \quad (3.13)$$

tal que la tasa de cambio es dada por

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (3.14)$$

donde se adopta la convención:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i$$

Introduciendo la relación

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \quad (3.15)$$

donde  $\mathbf{P} = \det[\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$  es el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y  $\rho_0$  es la densidad en la configuración de referencia, se obtiene la desigualdad de Clausius-Duhem:

$$\left( \mathbf{P} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \right) : \dot{\mathbf{F}} - \rho_0 \left( s + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{\rho_0}{\rho \theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (3.16)$$

Considerando que esta desigualdad debe cumplirse para cualquier proceso termodinámico, de aquí resultan las expresiones del primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$  y la entropía  $s$ :

$$\mathbf{P} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (3.17)$$

Luego, con la definición de

$$A_i = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} \quad (3.18)$$

como la *fuerza termodinámica* conjugada a cada variable interna  $\alpha_i \in \boldsymbol{\alpha}$ , la desigualdad de Clausius-Duhem puede reescribirse como:

$$-A_i \dot{\alpha}_i - \frac{\rho_0}{\rho \theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (3.19)$$

A efectos de completar un modelo constitutivo son necesarias leyes asociadas con los mecanismos disipativos, como ecuaciones para las variables de flujo  $\frac{1}{\theta} \mathbf{q}$  y  $\dot{\alpha}$ . Recordando el principio de determinismo termodinámico compatible, la desigualdad de Clausius-Duhem, ecuación (3.19), debe cumplirse y eso generará restricciones en las relaciones constitutivas. Una manera efectiva de asegurar que se satisface la ecuación (3.19) consiste en postular la existencia de un potencial de disipación de la forma

$$\psi = \psi(\mathbf{A}, \mathbf{g}) \quad (3.20)$$

que tenga las variables de estado como parámetros, el cual se asume convexo con respecto a cada  $A_i$  y  $\mathbf{g}$  y con valor cero en el origen  $\{\mathbf{A}, \mathbf{g}\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}$ . Además se introduce la hipómonografía de *disipatividad normal*, donde se asume que las variables de flujo son determinadas por las leyes

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial \psi}{\partial A_i} \quad \frac{1}{\theta} \mathbf{q} = -\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \quad (3.21)$$

Se hace notar que la descripción constitutiva por medio de potenciales convexos como la aquí descrita *no* es una consecuencia de la termodinámica, pero sí una herramienta para formular ecuaciones constitutivas sin violación de la termodinámica. Un modelo constitutivo definido por las ecuaciones (3.13), (3.17) y (3.21) satisface “a priori” la desigualdad de disipación.

### 3.2.4 Aproximación micro-mecánica y fenomenológica

El éxito de un modelo constitutivo tratando de describir el comportamiento de un material en particular depende de la elección de un apropiado grupo de variables internas. Desde que difícilmente un modelo constitutivo será suficientemente amplio para describir la respuesta de un material sometido a todos los procesos posibles, en la definición de las variables internas debe considerarse no sólo el material, también el rango de procesos bajo los cuales este material será analizado.

Básicamente, los modelos constitutivos con variables internas se basan en una de dos aproximaciones posibles: micro-mecánica o fenomenológica. La aproximación micro-mecánica involucra la determinación de mecanismos y variables relacionadas con los niveles atómico, molecular o cristalino. En general, estas variables son cantidades discretas y sus contrapartes continuas son determinadas

por medio de técnicas de homogeneización. La aproximación fenomenológica, por otra parte, pasa por alto la necesidad de cuantificar cantidades microscópicas y está basada en el estudio de la respuesta de un *elemento de volumen representativo*, un elemento de materia suficientemente grande como para ser considerado un continuo. Las variables internas, en este caso, estarán directamente asociadas con el comportamiento disipativo observado a nivel *macroscópico* en términos de cantidades continuas, como ser deformaciones, tensiones y temperatura. A pesar de la naturaleza macroscópica de los modelos derivados en base a metodologías fenomenológicas es de esperar que “buenas” variables internas estén relacionadas de alguna manera con los mecanismos de disipación microscópicos.

En el campo de la mecánica de sólidos, la aproximación fenomenológica a sido particularmente exitosa con modelos como los de elasto-plasticidad clásica, orientados a modelar materiales (macroscópicamente) homogéneos tales como los metales. En el caso de los elastómeros, cuyas principales características mecánicas han sido analizadas en base a resultados experimentales en el Capítulo 2, la mayoría de los modelos constitutivos que pueden encontrarse en la literatura adoptan un enfoque fenomenológico considerando los elastómeros como material homogéneo e isótropo y tratan solo sus características elásticas (Ogden 1984, Gadala 1991, Miehe 1994, Ali & Abdel-Ghaffar 1995, Salomón, Oller & Barbat 1996). En algunos casos se incorporan al modelo constitutivo efectos disipativos mediante viscoelasticidad y daño (Simo 1987) o sólo viscoelasticidad (Holzapfel 1996) o sólo plasticidad (Kaliske & Rothert 1995) o viscoelasticidad y plasticidad (Kaliske, Gebbeken & Rothert 1997, Salomón, Oller & Barbat 1998).

Excepcionalmente se ha tratado la modelización de elastómeros con una aproximación micro-mecánica, pero al resultar esta modelización inviable computacionalmente para la solución de problemas prácticos, se debe pasar de ésta formulación a una de tipo fenomenológico (Govindjee & Simo 1992b). Algunos autores han desarrollado modelos constitutivos *inspirados* en la micro-mecánica pero implementados en forma macroscópica (Arruda & Boyce 1993, Anand 1996, Bergstrom & Boyce 1998).

### 3.3 DESCRIPCIÓN DEL MODELO PROPUESTO

Los elastómeros sometidos a grandes deformaciones responden en forma principalmente elástica y cuasi-incompresible y, desde un punto de vista macroscópico, como sólido homogéneo e isótropo. Ensayos en laboratorio de dispositivos de elastómero laminado con cargas cíclicas indican una componente no elástica en su respuesta, siendo esta componente de mayor magnitud en el caso de dispositivos construidos con elastómeros de alto amortiguamiento (véase la Sección 2.5.2). En este tipo de elastómeros, una importante proporción de partículas (*carbon-black*

*filler*) son agregadas al caucho a efectos de incrementar sus propiedades disipativas.

En base a dichas características se propone aquí un modelo fenomenológico, donde no se consideran aspectos micro-mecánicos. Debido a la cuasi-incompresibilidad de los elastómeros, se tratan las partes volumétrica y desviadora de la deformación de forma independiente. Y, considerando que la magnitud del amortiguamiento depende de las componentes del material, diferentes modelos son considerados para cada sustancia, viscoelasticidad para el caucho y elastoplasticidad para las partículas agregadas. Utilizando teoría de mezclas (Oller, Oñate, Miquel & Botello 1996) se incorporan las expresiones constitutivas básicas de cada componente en un sólido compuesto multi-fase. El comportamiento global del compuesto es influenciado por las características mecánicas de cada componente simple de acuerdo a su proporción en volumen. Como ecuación de restricción o cierre del modelo se admite una perfecta compatibilidad cinemática en todos los instantes de tiempo del proceso analizado. Finalmente, al no incluir la temperatura como variable de las funciones energía de deformación, el modelo propuesto está limitado a condiciones térmicamente estables.

Limitando la energía libre específica expresada en la ecuación (3.13) a una función dependiente solo del gradiente de deformación  $\mathbf{F}$ , quedando fuera de consideración la temperatura  $\theta$  y, por el momento, las variables internas  $\boldsymbol{\alpha}$ , un cuerpo hiperelástico  $\mathcal{B}$  es caracterizado por la existencia de un potencial  $W(\mathbf{F}, \mathbf{X})$  del cual se obtiene el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff como

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \frac{\partial W(\mathbf{F}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{F}} \quad (3.22)$$

donde  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  representa puntos materiales de  $\mathcal{B}$  y el tensor de segundo orden  $\mathbf{F}$  es el gradiente de deformación en estos puntos. La función  $W$  se denomina *función energía de deformación* o función *potencial*. Para simplificar la notación, de aquí en adelante se omiten los puntos materiales  $\mathbf{X}$  en la función  $W$ . Nótese que la ecuación (3.22) es análoga a la ecuación (3.17).

La función energía de deformación  $W$  en la ecuación (3.22) debe expresarse como función de las nueve componentes de  $\mathbf{F}$  (el gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  puede ser asimétrico, por ejemplo en deformación por esfuerzo cortante) y además cumplir con la restricción antes señalada de no ser afectada por movimientos de sólido rígido. Esto es, según el principio de objetividad material, ecuaciones (3.8 a 3.11), para cualquier rotación en el espacio se debe cumplir la siguiente igualdad,

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F})$$

donde  $\mathbf{Q}$  es un tensor de rotación de cambio de base. Utilizando ahora la descomposición polar de  $\mathbf{F}$  (véase el Apéndice), se puede expresar  $W$  como,

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U})$$

donde  $\mathbf{R}$  es un tensor de rotación y  $\mathbf{U}$  el tensor de estiramiento derecho; y al ser  $\mathbf{Q}$  un tensor ortogonal cualquiera, puede ser  $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$ , entonces

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{U}) \quad (3.23)$$

Existe una correspondencia única entre las componentes del tensor de estiramiento  $\mathbf{U}$  y el tensor derecho de Cauchy-Green  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{1/2}$ , las direcciones principales de  $\mathbf{C}$  coinciden con las de  $\mathbf{U}$  y para un tensor gradiente  $\mathbf{F}$  dado es más fácil calcular  $\mathbf{C}$ , o  $\mathbf{b}$ , que  $\mathbf{U}$ ; por lo que se puede expresar  $W$  en función de las seis componentes del tensor derecho (simétrico) de Cauchy-Green, el cual no cambia su valor con movimientos de sólido rígido,

$$W(\mathbf{F}) = \bar{W}(\mathbf{C}) \quad (3.24)$$

A partir de la ecuación (3.22) pueden calcularse los tensores de tensiones en función de la energía de deformación  $W$ , en la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \bar{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \\ \mathbf{S} &= 2 \frac{\partial \bar{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{y} \quad J\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \bar{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde  $\mathbf{P}$  es el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff,  $\mathbf{S}$  es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones de Cauchy. A efectos de simplificar la notación, de aquí en adelante se utiliza  $W$  para designar la función energía de deformación  $\bar{W}(\mathbf{C})$ .

Cualquier simetría material, como las expresadas por las ecuaciones (3.12), restringiría la forma en que  $\bar{W}$  depende de  $\mathbf{C}$ , esto es,

$$\bar{W}(\mathbf{C}) = \bar{W}(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}) = \bar{W}(\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R})$$

siendo  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  definiciones de simetría material. Si el material es isótropo  $\bar{W}$  tendría la misma forma cualquiera sea el sistema de ejes coordenados tomado como referencia, por lo que  $\bar{W}$  es un invariante del tensor  $\mathbf{C}$ , y puede ser expresado en función de otros invariantes de  $\mathbf{C}$ , en la forma

$$\bar{W}(\mathbf{C}) = \tilde{W}(I_1, I_2, I_3) \quad (3.26)$$

Si además el material es incompresible,  $I_3 = 1$ . Esto conduce a una simplificación en la expresión de  $W$ , pero genera otras dificultades. La incompresibilidad es una restricción cinemática, cuyo efecto mecánico es generar una fuerza reactiva o presión hidrostática, la cual no depende de la ecuación constitutiva y debe determinarse por medio de ecuaciones de equilibrio y condiciones de

borde (Spencer 1992). Para superar esta dificultad y desacoplar las respuestas volumétrica y desviadora,  $\mathbf{F}$  es descompuesto multiplicativamente

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{vol}\bar{\mathbf{F}}, \quad \mathbf{F}_{vol} = J^{1/3}\mathbf{1}, \quad \bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3}\mathbf{F} \quad (3.27)$$

donde

$$J = \det[\mathbf{F}] = \det[\mathbf{F}_{vol}], \quad \det[\bar{\mathbf{F}}] = 1$$

Utilizando (3.27) la función energía de deformación puede ser expresada en una descomposición aditiva de sus partes desviadora y volumétrica

$$W = W(J) + \bar{W}(\bar{\mathbf{C}}) \quad (3.28)$$

siendo  $\bar{\mathbf{C}}$  la parte desviadora del tensor derecho de Cauchy-Green,  $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$ .

Funciones energía de deformación desacopladas conducen a relaciones tensión-deformación desacopladas. Asociada con la deformación volumétrica, existe una presión hidrostática  $p$

$$p = \partial_J W(J) = W'(J) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}_v = W'(J)\mathbf{1} \quad (3.29)$$

O, en términos del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff,  $\mathbf{S}_v = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_v\mathbf{F}^{-T}$ , y considerando que el tensor de tensiones de Cauchy,  $\boldsymbol{\sigma}_v$ , solo tiene elementos no nulos en su diagonal,  $\mathbf{S}_v$  puede ser expresado como  $\mathbf{S}_v = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-T}\boldsymbol{\sigma}_v = J\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_v$ , esto es

$$\mathbf{S}_v = JW'(J)\mathbf{C}^{-1} \quad (3.30)$$

Con relación a la parte desviadora del modelo, considerando (3.27) y (3.28) y de la ecuación de restricción, esto es compatibilidad cinemática en todos los instantes de tiempo, puede escribirse

$$\bar{\mathbf{F}}_{caucho} \equiv \bar{\mathbf{F}}_{particulas} \equiv \bar{\mathbf{F}} \quad (3.31)$$

Debe ahora considerarse que la respuesta del caucho y de las partículas agregadas no es el mismo. Para la parte elastomérica se propone un modelo constitutivo básico de tipo viscoelástico, con  $\bar{W}(\bar{\mathbf{C}})$  válido para historias de deformación infinitamente lentas  $\bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}})$ . Para deformaciones dependientes del tiempo, se incluyen en la función energía de deformación  $W$  variables internas  $\boldsymbol{\alpha}$  (Sección 3.2.3) que toman en consideración los efectos viscoelásticos

$$\bar{W}_{caucho} = \bar{W}_{ve}(\bar{\mathbf{C}}, \boldsymbol{\alpha}) \quad (3.32)$$

Para las partículas agregadas se propone un modelo elasto-plástico, en consecuencia,  $\bar{\mathbf{F}}$  es descompuesto multiplicativamente

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}^e \bar{\mathbf{F}}^p \quad \rightarrow \quad \bar{\mathbf{b}}^e = \bar{\mathbf{F}}^e \bar{\mathbf{F}}^{eT}$$

siendo  $\bar{\mathbf{b}}^e$  la parte elástica del tensor izquierdo de Cauchy-Green, la cual es utilizada para escribir la función energía de deformación de la componente partículas

$$\bar{W}_{particulas} = \bar{W}_{ep}(\bar{\mathbf{b}}^e, \boldsymbol{\xi}) \quad (3.33)$$

Utilizando teoría de mezclas, el comportamiento global del sólido compuesto puede expresarse en forma aditiva (Salomón, Oller & Barbat 1999)

$$\boxed{W = W(J) + kr[\bar{W}_{ve}(\bar{\mathbf{C}}, \boldsymbol{\alpha})] + kp[\bar{W}_{ep}(\bar{\mathbf{b}}^e, \boldsymbol{\xi})]} \quad (3.34)$$

donde  $kr$  y  $kp$  son las proporciones en volumen de las componentes caucho y partículas agregadas. Considerando ahora esta expresión aditiva de la función energía de deformación, el tensor de tensiones resulta,

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{S}_{vol} + kr\bar{\mathbf{S}}_{ve} + kp\bar{\mathbf{S}}_{ep}} \quad (3.35)$$

En las secciones siguientes se analiza en detalle la derivación de las componentes del modelo, comenzando con la componente elástica y la forma de obtener el tensor de tensiones y constitutivo a partir de una función energía de deformación. Posteriormente se analizan la extensión viscoelástica y la componente plástica del modelo.

### 3.4 ELASTICIDAD ISÓTROPA

Considerando que  $W$  puede definirse en función del tensor de deformación  $\mathbf{C}$  o de sus invariantes ( $I_1, I_2, I_3$ ) y teniendo en cuenta que

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{C} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I}$$

el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff puede derivarse de la siguiente forma:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \cdot \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{E}} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{E}} = 2\mathbf{I} \quad ; \quad \frac{\partial C_{ij}}{\partial E_{kl}} = 2\delta_{ijkl} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \cdot \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.38)$$

En caso de incompresibilidad total  $I_3 = 1$ , quedando la ecuación (3.38) reducida a

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.39)$$

Calculando las derivadas  $\partial I_i / \partial \mathbf{C}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial C_{ii}}{\partial C_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{il} = \delta_{kl} \\ \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial (C_{ii} C_{jj} - C_{ij} C_{ij})}{\partial C_{kl}} \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{il} C_{jj} + C_{ii} \delta_{jk} \delta_{jl} - 2 C_{ij} \delta_{ik} \delta_{jl}) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{kl} I_1 + I_1 \delta_{kl} - 2 C_{kl}) \\ &= I_1 \delta_{kl} - C_{kl} \end{aligned} \quad (3.40)$$

reemplazando la ecuación (3.40) en la (3.39), la (3.37) y la (3.39) en la (3.36) y llamando

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = A_{10} \quad \text{y} \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = A_{01} \quad (3.41)$$

se obtiene una expresión del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  de la forma

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = (A_{10} \delta_{kl} + A_{01} (I_1 \delta_{kl} - C_{kl})) 2 \delta_{ijkl} \\ S_{ij} &= 2 A_{10} \delta_{ij} + 2 A_{01} \hat{C}_{ij} \end{aligned} \quad (3.42)$$

siendo  $\hat{C}_{ij} = (I_1 \delta_{ij} - C_{ij})$

Siguiendo un camino análogo al anterior, se puede obtener el tensor constitutivo elástico material  $\mathbf{C}$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} \\ \mathbf{C} &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} \cdot \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \cdot \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{E}} \right) \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{E}} \\ &= \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{E}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{E}} \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}^2} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{E}} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.43)$$



Recordando que  $\mathbf{C} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I}$ , se tiene

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial E_{kl}} = 2\delta_{ijkl} \rightarrow \left(\frac{\partial C_{ij}}{\partial E_{kl}}\right)^2 = 4\delta_{ijkl}\delta_{ijkl} \quad (3.44)$$

A partir de la ecuación (3.39):

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}^2} &= \frac{\partial(\partial W/\partial \mathbf{C})}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial(\partial W/\partial \mathbf{C})}{\partial I_2} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial I_1} \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} \right) &= \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial^2 I_1}{\partial I_1 \partial \mathbf{C}} + \\ &+ \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \frac{\partial^2 I_2}{\partial I_1 \partial \mathbf{C}} \\ \frac{\partial}{\partial I_2} \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} \right) &= \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial^2 I_1}{\partial I_2 \partial \mathbf{C}} + \\ &+ \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \frac{\partial^2 I_2}{\partial I_2 \partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Reemplazando la ecuación (3.46) en la (3.45) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} \cdot \left(\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}}\right)^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} \cdot \frac{\partial^2 I_2}{\partial I_1 \partial \mathbf{C}} + \\ &+ \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2} \cdot \left(\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}}\right)^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} \cdot \frac{\partial^2 I_1}{\partial I_2 \partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Las expresiones  $\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}}$  y  $\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}}$  han sido derivadas en la ecuación (3.40) y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_2}{\partial I_1 \partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial}{\partial I_1} \left( \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} \right) = \frac{\partial(I_1 \delta_{kl} - C_{kl})}{\partial I_1} = \frac{\partial(C_{ii} \delta_{kl} - C_{kl})}{\partial C_{jj}} = \delta_{jj} \cdot \delta_{kl} + 0 - \delta_{kjlj} \\ \frac{\partial^2 I_1}{\partial I_2 \partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial}{\partial I_2} \left( \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} \right) = \frac{\partial(\delta_{kl})}{\partial(C_{ii} C_{jj} - C_{ij} C_{ij})} = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Con lo cual quedan definidas las componentes de la ecuación (3.43) y por lo tanto el tensor constitutivo. Naturalmente, los valores  $\partial W/\partial I_i$  en las ecuaciones (3.41) y (3.47) dependen de la función energía de deformación considerada.

### 3.4.1 Funciones energía de deformación propuestas para elastómeros

Partiendo de los trabajos pioneros de Mooney (1940) y Rivlin (1948), diferentes funciones energía de deformación  $W$  han sido propuestas para analizar elastómeros (*rubber-like materials*). Estas responden a diversos modelos, entre los más utilizados se pueden citar los siguientes:

- **Mooney-Rivlin generalizado** (Ogden 1984)

En el modelo Mooney-Rivlin generalizado la función energía de deformación se expresa como

$$W = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} C_{rst} (I_1 - 3)^r (I_2 - 3)^s (I_3 - 1)^t \quad (3.49)$$

donde  $r, s, t$  son números enteros que pueden variar, teóricamente, de 0 a  $\infty$  y  $C_{rst}$  son parámetros que representan constantes materiales. Este modelo tiene la ventaja de su forma polinómica, con lo cual, disponiendo de resultados de ensayos de laboratorio pueden asignarse valores a los parámetros materiales de tal manera de aproximar el modelo, tanto como se desee, a éstos resultados. Un procedimiento de mínimos cuadrados puede utilizarse para esta parametrización, limitándose los valores  $r, s, t$  a un rango "razonable", por ejemplo de 0 a 2.

En caso de incompresibilidad total se tiene  $I_3 = 1$ , por lo que el modelo tiende a su forma reducida

$$W = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} C_{rs} (I_1 - 3)^r (I_2 - 3)^s \quad (3.50)$$

Tomando de la expresión (3.50) solo los términos lineales en  $I_1$  e  $I_2$ , se obtiene el denominado modelo Mooney-Rivlin de dos parámetros.

- **Mooney-Rivlin de dos parámetros**

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3); \quad C_1 \equiv C_{10}, C_2 \equiv C_{01} \quad (3.51)$$

El modelo Mooney-Rivlin de dos parámetros (usualmente denominado solo Mooney-Rivlin) a diferencia del modelo Mooney-Rivlin generalizado, ecuación (3.49), solo cuenta con dos términos lineales. Por ello, su utilización, si bien más simple, no permite una buena aproximación a resultados experimentales, especialmente en el rango de las grandes deformaciones ( $> 50\%$ ) de los elastómeros.

Si en esta función  $C_2 = 0$  el modelo Mooney-Rivlin se reduce al conocido como modelo Neo-Hooke.

- **Neo-Hooke**

$$W = C_1(I_1 - 3) \quad (3.52)$$

Esta es la forma más simple de energía de deformación válida para hiperelasticidad isótropa y la respuesta que con ella se obtiene al modelar elastómeros es en general pobre, si bien puede coincidir en algún caso de deformación homogénea (tracción simple en deformación plana) con el modelo Mooney-Rivlin de dos parámetros.

Debido a que estas funciones de energía de deformación de la familia Mooney-Rivlin no son válidas (excepto en su forma generalizada) para modelar elastómeros sometidos a estados de tensiones complejos y para rangos de deformación que cubran desde posiciones cercanas a la inicial hasta aquellas próximas a la rotura, se han propuesto otras funciones en base resultados experimentales. Entre las citadas en la literatura, se pueden mencionar las siguientes:

- **Swanson** (Swanson 1985)

$$W = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{3A_r(I_1/3)^{1+a_r}}{2(1+a_r)} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{3B_s(I_2/3)^{1+b_s}}{2(1+b_s)} + \int_0^{I_3} \frac{g(\xi)}{2} d\xi - \left( \sum_{r=1}^{\infty} A_r + 2 \sum_{s=1}^{\infty} B_s \right) \frac{\ln I_3}{2} \quad (3.53)$$

donde  $A_r$  y  $B_s$  son constantes materiales,  $a_r$  y  $b_s$  son números reales (no necesariamente enteros) y

$$g(I_3) = C(I_3 - 1)$$

siendo

$$C = \frac{\chi}{2} - \frac{1}{3} \left[ \sum_{r=1}^{\infty} A_r(1+a_r) + 4 \sum_{s=1}^{\infty} B_s(1+b_s) \right] \quad (3.54)$$

con  $\chi$  como módulo volumétrico.

- **Blatz-Ko** (Blatz & Ko 1962, Brockman 1986)

$$W = \frac{1}{2}\mu \left[ (I_1 - 3) + \frac{2}{a}(I_3^{-a/2} - 1) \right] \quad (3.55)$$

donde  $\mu$  y  $a$  son constantes materiales,  $a$  es función del coeficiente de Poisson,

$$a = \frac{2\nu}{(1-2\nu)} \quad (3.56)$$

- **Hart-Smith** (Hart-Smith 1966, Gadala 1991)

$$W = C \int e^{k_1(I_1-3)^2} dI_1 + k_2 \ln \frac{I_2}{3} \quad (3.57)$$

donde  $C$ ,  $k_1$  y  $k_2$  son constantes materiales.

Ali & Abdel-Ghaffar (1995) señalan que la función energía de deformación propuesta por Hart-Smith proporciona resultados aceptables para estados de tensión uniaxial y equi-biaxial hasta deformaciones del 360%. En caso de deformaciones por esfuerzo cortante, los únicos resultados de simulación numérica presentados, correspondientes a dispositivos de apoyo de elastómero laminado con núcleo de plomo, solo cubren valores de deformación inferiores al 75%.

El uso de modelos sofisticados generalmente mejora la correlación entre resultados experimentales y respuesta del modelo, y/o amplía el rango de aplicabilidad del modelo, pero como puede observarse en las expresiones anteriores, estos requieren de más parámetros y cuantificar estos parámetros no resulta sencillo.

Gadala (1991) realiza un tratamiento unificado para distintas expresiones de energía de deformación  $W(I_i)$  incluyendo los modelos Mooney-Rivlin generalizado, Swanson, Blatz-Ko y Hard-Smith, considerando además que la incompresibilidad puede no ser total y por lo tanto  $I_3 \neq 0$ .

En este caso,  $I_3 \neq 0$ , la ecuación (3.42) del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff debe completarse con la expresión:

$$\frac{\partial W}{\partial I_3} \cdot \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}}$$

tal como se ha indicado en la ecuación (3.38). Siendo,

$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{H} \quad (3.58)$$

con lo cual, el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff puede expresarse como:

$$S_{ij} = \alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 \hat{C}_{ij} + \alpha_3 H_{ij} \quad (3.59)$$

donde  $\hat{C}_{ij}$  ha sido definido en la ecuación (3.42) y

$$\alpha_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1}; \quad \alpha_2 = \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad \text{y} \quad \alpha_3 = \frac{\partial W}{\partial I_3}$$

vienen dados, según la función energía de deformación, por:

- Mooney-Rivlin generalizado

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} 2r C_{rs} (I_1 - 3)^{r-1} (I_2 - 3)^s \\ \alpha_2 &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} 2s C_{rs} (I_1 - 3)^r (I_2 - 3)^{s-1} \\ \alpha_3 &= 0\end{aligned}\tag{3.60}$$

- Swanson

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \sum_{r=1}^{\infty} A_r (I_1/3)^{a_r} \\ \alpha_2 &= \sum_{s=0}^{\infty} B_s (I_2/3)^{b_s} \\ \alpha_3 &= g(I_3) - \frac{\sum_{r=1}^{\infty} A_r + 2 \sum_{s=1}^{\infty} B_s}{I_3}\end{aligned}\tag{3.61}$$

- Blatz-Ko

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \mu \\ \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= \mu I_3^{-1/2(2+a)}\end{aligned}\tag{3.62}$$

- Hart-Smith

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 2C e^{k_1(I_1-3)^2} \\ \alpha_2 &= 2K_2/I_2 \\ \alpha_3 &= 0\end{aligned}\tag{3.63}$$

De manera similar se procede con el tensor constitutivo, ecuaciones (3.43-3.48), arribando a la expresión (Gadala 1991):

$$\mathbf{C} = \beta_1 \{M\} \{M\}^T + \beta_2 \{\hat{C}\} \{\hat{C}\}^T + \beta_3 \{H\} \{H\}^T + \beta_4 [Q] + \beta_5 [\hat{Q}] + \beta_6 [\bar{C}]\tag{3.64}$$

donde  $\beta_i$  son las derivadas segundas de la función  $W$  ha utilizar:

- Mooney-Rivlin generalizado

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} 4r(r-1) C_{rs} (I_1 - 3)^{r-2} (I_2 - 3)^s \\
\beta_2 &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} 4s(s-1) C_{rs} (I_1 - 3)^r (I_2 - 3)^{s-2} \\
\beta_3 &= \beta_4 = 0 \\
\beta_5 &= \alpha_2 \quad \text{con } \alpha_2 \text{ dado por la ecuación (3.60)} \\
\beta_6 &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} 8rs C_{rs} (I_1 - 3)^{r-1} (I_2 - 3)^{s-1}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

- Swanson

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{3} a_r A_r (I_1/3)^{a_r-1} \\
\beta_2 &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2}{3} b_s B_s (I_2/3)^{b_s-1} \\
\beta_3 &= 2C + 2 \left( \sum_{r=1}^{\infty} A_r + 2 \sum_{s=1}^{\infty} B_s \right) / I_3^2
\end{aligned} \tag{3.66}$$

con  $C$  dado por la ecuación (3.54)

$$\beta_4 = 2\alpha_3 \quad \text{con } \alpha_3 \text{ dado por la ecuación (3.61)}$$

$$\beta_5 = 2\alpha_2 \quad \text{con } \alpha_2 \text{ dado por la ecuación (3.61)}$$

$$\beta_6 = 0$$

- Blatz-Ko

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_5 = \beta_6 = 0$$

$$\beta_3 = \mu (a + 2) I_3^{-1/2(a+4)} \quad \text{con } a \text{ dado por la ecuación (3.56)} \tag{3.67}$$

$$\beta_4 = -2\alpha_3 \quad \text{con } \alpha_3 \text{ dado por la ecuación (3.62)}$$

- Hart-Smith

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= 8 C k_1 (I_1 - 3)e^{k_1(I_1-3)^2} \\
\beta_2 &= -4 k_2 / I_2^2 \\
\beta_3 &= \beta_4 = \beta_6 = 0 \\
\beta_5 &= 2\alpha_2 \quad \text{con } \alpha_2 \text{ dado por la ecuación (3.63)}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Las entidades  $\{M\}$ ,  $\{H\}$  y  $\{\hat{C}\}$  en la ecuación (3.64) son  $\{M\} = [111000]^T$  y formas vectoriales de los tensores  $\mathbf{H}$  y  $\hat{\mathbf{C}}$ :

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{ij} &= I_1 \delta_{ij} - C_{ij}, \quad H_{ij} = \frac{\partial I_3}{\partial C_{ij}}, \quad Q_{ijmn} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial C_{mn}} \\
\bar{C}_{ijkl} &= 1/2[\hat{C}_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ij}\hat{C}_{kl}], \quad \hat{Q}_{ijmn} = \frac{\partial \hat{C}_{ij}}{\partial C_{mn}} \\
H_{ij} &= \frac{\partial I_3}{\partial C_{ij}} = \frac{1}{2} e_{imp} e_{jnq} C_{mn} C_{pq}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

donde  $e_{ijk}$  es un tensor de permutación. Por lo que:

$$\begin{aligned}
H_{11} &= C_{22}C_{33} - C_{23}C_{32} \\
H_{23} &= C_{31}C_{12} - C_{11}C_{32}
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Derivando nuevamente el tensor  $\mathbf{H}$  y llamando

$$Q_{ijmn} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial C_{mn}} \tag{3.71}$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & C_{33} & C_{22} & 0 & -C_{23} & 0 \\ & 0 & C_{11} & 0 & 0 & -C_{13} \\ & & 0 & -C_{12} & 0 & 0 \\ & & & -.5C_{33} & .5C_{31} & .5C_{23} \\ \text{sim.} & & & & -.5C_{11} & .5C_{12} \\ & & & & & -.5C_{22} \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

En la Sección 5.3.1 se comparan las respuestas de los modelos resultantes de las funciones energía de deformaciones de Mooney-Rivlin y Neo-Hooke con las

correspondientes a la función energía de deformación propuesta por Ogden (1984) y analizada en la siguiente sección. Comparaciones entre éstas y las ecuaciones propuestas por Swanson, Blatz-Ko o Hart-Smith no se han realizado, debido a la complejidad de la parametrización de estos modelos. Un estudio comparativo de las respuestas obtenidas utilizando las funciones energía de deformación de Mooney-Rivlin y de Swanson, junto a las propuestas por Yeoh (1990), Arruda & Boyce (1993) y Van der Waals (Kilian 1981), ha sido realizado por Kaliske & Rothert (1997), en comparación con resultados experimentales (van den Bogert & de Borst 1994).

### 3.4.2 Funciones energía de deformación en estiramientos principales

Se ha señalado que la función energía de deformación puede ser expresada en función del tensor de Cauchy-Green, ecuación (3.24), o de sus invariantes, ecuación (3.26), y los invariantes de un tensor simétrico de segundo orden pueden expresarse como función de los valores propios de este tensor. Así, se escriben los invariantes como:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= 1/2(I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)) \\ &= \lambda_1^2 \cdot \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \cdot \lambda_1^2 + \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (3.73)$$

siendo  $\lambda_i$  los valores propios del tensor  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{1/2}$ , que reciben el nombre de estiramientos principales (*principal stretches*).

Por lo tanto, una forma alternativa de expresar la función energía de deformación es utilizar los valores propios de los tensores  $\mathbf{U}$  o  $\mathbf{C}$ , en la forma,

$$W(\mathbf{U}) = w(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (3.74)$$

A partir de una función energía de deformación expresada en términos de los estiramientos principales, los tensores de tensiones pueden obtenerse recordando la ecuación (3.25) y aplicando la regla de la cadena. Así, para el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff se obtiene:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \bar{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \sum_{A=1}^3 \frac{1}{\lambda_A} \frac{\partial w(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_A} \frac{\partial (\lambda_A^2)}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.75)$$

Aplicando una descomposición polar de los tensores de Cauchy-Green, en el Apéndice se llegó a la ecuación (A.25), utilizando ésta y la descomposición espectral de los tensores de estiramiento, ecuación (A.26), se tiene:

$$\mathbf{C} = \sum_{i=A}^3 \lambda_A^2 \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A^2 \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad (3.76)$$



donde  $\lambda_A^2$  son los valores propios de  $\mathbf{C}$  o  $\mathbf{b}$ , y  $\mathbf{N}_A$  y  $\mathbf{n}_A$  son sus respectivos autovectores unitarios, definidos por el problema de valores propios:

$$\mathbf{C}\mathbf{N}_A = \lambda_A^2\mathbf{N}_A \quad \text{y} \quad \mathbf{b}\mathbf{n}_A = \lambda_A^2\mathbf{n}_A \quad (3.77)$$

De esta última ecuación puede obtenerse para  $\partial_{\mathbf{C}}\lambda_A^2$  en la ecuación (3.75), la siguiente expresión (Simo 1993):

$$\frac{\partial(\lambda_A^2)}{\partial\mathbf{C}} = \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \quad (3.78)$$

Esto permite expresar el segundo tensor de tensiones de Piola Kirchhoff  $\mathbf{S}$  como

$$\mathbf{S} = \sum_{A=1}^3 \beta_A \mathbf{M}_A \quad \text{con} \quad \mathbf{M}_A = \lambda_A^{-2} \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \quad (3.79)$$

donde  $\beta_A$  expresa las tensiones principales desviadoras,

$$\beta_A = \lambda_A \partial w / \partial \lambda_A \quad (3.80)$$

En forma análoga y recordando la ecuación (3.25), se puede expresar el tensor de tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  en la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \sum_{A=1}^3 \beta_A \mathbf{m}_A \quad \text{con} \quad J = \det[\mathbf{F}] \quad \text{y} \quad (3.81)$$

$$\mathbf{m}_A = \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A = \mathbf{F}\mathbf{M}_A\mathbf{F}^T$$

Las expresiones  $\mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A$  y  $\mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A$  pueden expresarse, en forma explícita, a partir de los tensores  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{b}$  (Morman 1986, Simo & Taylor 1991),

$$\mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A = \lambda_A^2 \frac{\mathbf{C} - (I_1 - \lambda_A^2)\mathbf{1} + I_3 \lambda_A^{-2} \mathbf{C}^{-1}}{D_A}$$

$$\mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A = \frac{\mathbf{b}^2 - (I_1 - \lambda_A^2)\mathbf{b} + I_3 \lambda_A^{-2} \mathbf{1}}{D_A} \quad (3.82)$$

$$D_A = 2\lambda_A^4 - I_1 \lambda_A^2 + I_3 \lambda_A^{-2}$$

Derivando nuevamente la ecuación (3.75) a partir de la ecuación (3.79), aplicando la regla de la cadena y la ecuación (3.78), se obtiene el correspondiente tensor constitutivo en la configuración no deformada,

$$\mathbf{C} = \sum_{A=1}^3 \left[ \sum_{B=1}^3 \gamma_{AB} \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{M}_B \right] + \sum_{A=1}^3 2\beta_A \frac{\partial \mathbf{M}_A}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.83)$$

donde  $\beta_A$  responde a la ecuación (3.80),

$$\gamma_{AB} = \gamma_{BA} = \lambda_B \frac{\partial}{\partial \lambda_B} \left( \lambda_A \frac{\partial w}{\partial \lambda_B} \right) \quad (3.84)$$

y  $\partial_C \mathbf{M}_A$  se obtiene a partir de la ecuación (3.82a), utilizando la ecuación (3.78) y las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial \lambda_A}{\partial I_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_A^3}{D_A}, \quad \frac{\partial \lambda_A}{\partial I_2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_A}{D_A}, \quad \frac{\partial \lambda_A}{\partial I_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_A^{-1}}{D_A} \quad (3.85)$$

donde  $D_A$  viene dado por la ecuación (3.82c). De esta forma se llega a obtener:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}_A}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{D_A} \left[ \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + I_3 \lambda_A^{-2} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{l}_{C^{-1}}) \right] \\ &+ \frac{1}{D_A} \left[ \lambda_A^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{1}) - 1/2 D'_A \lambda_A \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{M}_A \right] \\ &- \frac{1}{D_A} \left[ I_3 \lambda_A^{-2} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{C}^{-1}) \right] \end{aligned} \quad (3.86)$$

siendo  $\mathbf{l}$  el tensor identidad de cuarto orden, y

$$D'_A = 8\lambda_A^3 - 2I_1 \lambda_A - 2I_3 \lambda_A^{-3} \quad (3.87)$$

$$(\mathbf{I}_{C^{-1}})^{ABCD} = 1/2 (\mathbf{C}^{-1AC} \mathbf{C}^{-1BC} + \mathbf{C}^{-1AD} \mathbf{C}^{-1BC})$$

El tensor constitutivo en la configuración espacial  $\mathbf{c}$  se obtiene mediante una operación it push-forward (véase el Apéndice, Sección A.4) de su forma material  $\mathbf{C}$ , expresada en la ecuación (3.83).

$$\mathbf{c} = \frac{1}{J} \sum_{A=1}^3 \left[ \sum_{B=1}^3 \gamma_{AB} \mathbf{m}_A \otimes \mathbf{m}_B \right] + \frac{2}{J} \sum_{A=1}^3 \beta_A \frac{\partial \mathbf{m}_A}{\partial \mathbf{g}} \quad (3.88)$$

donde, al igual que en la ecuación (3.83),  $\beta_A$  responde a la ecuación (3.80) y  $\gamma_{AB}$  a la ecuación (3.84). La expresión  $\partial_g \mathbf{m}_A = \mathbf{F} \partial_C \mathbf{M}_A \mathbf{F}^T$  tiene la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{m}_A}{\partial \mathbf{g}} &= \frac{1}{D_A} \left[ \mathbf{l}_b - \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + I_3 \lambda_A^{-2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{l}) \right] \\ &+ \frac{1}{D_A} \left[ \lambda_A^2 (\mathbf{b} \otimes \mathbf{m}_A + \mathbf{m}_A \otimes \mathbf{b}) - \frac{1}{2} D'_A \lambda_A \mathbf{m}_A \otimes \mathbf{m}_A \right] \\ &- \frac{1}{D_A} \left[ I_3 \lambda_A^{-2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{m}_A + \mathbf{m}_A \otimes \mathbf{1}) \right] \end{aligned} \quad (3.89)$$

siendo

$$(I_b)^{abcd} = \frac{1}{2}(b^{ac}b^{bd} + b^{ad}b^{bc}) \quad (3.90)$$

Nótese que las ecuaciones (3.75) a (3.90) son válidas para cualquier función energía de deformación y por lo tanto constituyen un planteo general de elasticidad en grandes deformaciones formulado en términos de los estiramientos principales.

### 3.4.3 Función energía de deformación de Ogden

Ogden (1984) ha utilizado los estiramientos principales  $\lambda_A$  o valores propios del tensor  $\mathbf{U}$  para proponer una función energía de deformación de la forma:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (3.91)$$

donde  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) son números reales y  $N$  es un entero positivo, tal que

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i = 2\mu \quad (3.92)$$

siendo  $\mu$  el modulo de corte del material que se pretende modelar en la configuración de referencia.

Utilizando valores propios ( $L_i$ ) de  $\mathbf{C}$ , esta función toma la forma:

$$W(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (L_1^{\alpha_i/2} + L_2^{\alpha_i/2} + L_3^{\alpha_i/2} - 3) \quad (3.93)$$

En caso de incompresibilidad total,  $I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = L_1 L_2 L_3 = 1$ .

Al igual que lo señalado para la función de Mooney-Rivlin generalizada, ecuación (3.49), la función energía de deformación de Ogden puede representar la respuesta de materiales reales mediante la asignación de valores a los parámetros  $\alpha_i$  y  $\mu_i$  y cuanto mayor sea el número de términos  $N$  considerado, mayor será la aproximación a la respuesta obtenida mediante ensayos en laboratorio.

Ogden (1984) ha determinado los valores de estos parámetros (para  $N = 3$ ) de forma tal que las tensiones resultantes del modelo ajusten a curvas experimentales de ensayos (tensión simple, tensión plana y tensión biaxial) previamente realizados por Treloar (1975) con caucho natural vulcanizado. Utilizando estos mismos ensayos Twizell & Ogden (1983) han utilizado la técnica de mínimos cuadrados para ajustar los parámetros de la función con  $N = 3$  y  $N = 4$ .

Considerando  $N = 2$ , el modelo de Ogden puede representar el modelo de Mooney-Rivlin de 2 parámetros, es decir

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 1/2\mu_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) - 1/2\mu_2(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_1^2\lambda_2^2 - 3) \quad (3.94)$$

con  $\mu_1 - \mu_2 = \mu$ ,  $\alpha_1 = -\alpha_2 = 2$ ; o en términos de los coeficientes de Mooney-Rivlin  $\mu_1 = 2C_1$ ,  $\mu_2 = -2C_2$ .

Y considerando solo un parámetro,  $N = 1$ , con  $\mu_1 = \mu$  y  $\alpha_1 = 2$ , se obtiene el modelo Neo-Hooke

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 1/2\mu(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (3.95)$$

La función energía de deformación de Ogden ha sido aceptada en los últimos años como la mejor alternativa para simular numéricamente el comportamiento de los elastómeros (Eberlein, Wriggers & Taylor 1993, Miehe 1994, Holzapfel 1996, Salomón et al. 1996), y es la utilizada en esta monografía como base del modelo hiperelástico para modelar la componente elástica de estos materiales. En la Sección 5.3.1 puede apreciarse la diferencia entre las respuestas tensión-deformación para el caso de tracción plana homogénea con deformaciones  $\lambda_1$  de 1 a 8, considerando las formas de energía de deformación de Ogden, Mooney-Rivlin y Neo-Hooke.

Para la función energía de deformación de Ogden,  $\beta_A$  y  $\gamma_{AB}$  en las ecuaciones (3.80) y (3.84) vienen dados por:

$$\beta_A = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left[ \lambda_A^{\alpha_i} - \frac{1}{3} \sum_{B=1}^3 \lambda_B^{\alpha_i} \right]$$

$$\text{Si } A = B \rightarrow \gamma_{AB} = \sum_{i=1}^N \mu_i \left[ \frac{1}{3} \lambda_A^{\alpha_i} + \frac{1}{9} \sum_{C=1}^3 \lambda_C^{\alpha_i} \right] \quad (3.96)$$

$$\text{Si } A \neq B \rightarrow \gamma_{AB} = \sum_{i=1}^N \mu_i \left[ -\frac{1}{3} \lambda_A^{\alpha_i} - \frac{1}{3} \lambda_B^{\alpha_i} + \frac{1}{9} \sum_{C=1}^3 \lambda_C^{\alpha_i} \right]$$

#### 3.4.4 Deformación desviadora y volumétrica

Ensayos realizados con elastómeros (Ogden 1984) demuestran que para grandes deformaciones el cambio de volumen, en este material, es pequeño pero no nulo ( $J - 1 \approx 10^{-4}$ ). Por lo que la hipótesis de incompresibilidad total debe ser sustituida por una de cuasi-incompresibilidad ( $I_3 \approx 1$ ).

En este caso resulta conveniente descomponer el gradiente de deformación en sus partes desviadora y volumétrica, tal lo indicado en la Sección 3.3,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{vol} \cdot \bar{\mathbf{F}} \quad \text{con} \quad \mathbf{F}_{vol} = J^{1/3} \mathbf{1} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F} \quad (3.97)$$

donde

$$J = \det[\mathbf{F}] = \det[\mathbf{F}_{vol}] \quad \text{y} \quad \det[\bar{\mathbf{F}}] = 1$$

Considerando la ecuación(3.97) las funciones de energía de deformación pueden expresarse como:

$$W^*(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, J) \equiv W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (3.98)$$

siendo

$$\lambda_i^* = J^{-1/3} \lambda_i \quad \text{y} \quad J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

tal que

$$\lambda_1^* \lambda_2^* \lambda_3^* = 1$$

Considerando estos estiramientos modificados  $\lambda_i^*$ , el modelo de Ogden puede expresarse, en forma desacoplada, como

$$W(\lambda_i) = W(J) + W^*(\lambda_i^*) \quad (3.99)$$

donde  $W(J)$  describe el cambio de energía libre debido al cambio de volumen del sólido y  $W^*(\lambda^*)$  describe el cambio de energía libre debido a deformaciones a volumen constante. El potencial en función de los estiramientos modificados  $\lambda_i^*$ , se escribe como:

$$W^*(\lambda_i^*) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} [(\lambda_i^*)^{\alpha_p} - 3] \quad (3.100)$$

o utilizando los autovalores  $L_i$  del tensor  $\mathbf{C}$ , se puede reescribir el potencial, como

$$\begin{aligned} W(L_i) &= W(J) + W^*(L_i) \\ W^*(L_i) &= \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left[ (L_1^{\alpha_p/2} + L_2^{\alpha_p/2} + L_3^{\alpha_p/2})(L_1 L_2 L_3)^{-\alpha/6} - 3 \right] \end{aligned} \quad (3.101)$$

Esta descomposición aditiva de la función de energía libre implica una descomposición aditiva de sus derivadas, el tensor de tensiones y tensor constitutivo tangente.

Tal lo señalado en la Sección 3.3, asociada a la deformación volumétrica se tiene una tensión media o presión  $p$ ,

$$p = \partial_J W(J) = W'(J) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}_v = W'(J)\mathbf{1} \quad (3.102)$$

o equivalente en términos del segundo tensor de Piola-Kirchhoff,

$$\mathbf{S}_v = JW'(J)\mathbf{C}^{-1} \quad (3.103)$$

Derivando la ecuación (3.103) respecto a  $\mathbf{C}$  se obtiene la parte del tensor constitutivo en la configuración material correspondiente a la deformación volumétrica,

$$\mathbf{C}_v = [JW'(J)]'J\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - JW'(J)\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}} \quad (3.104)$$

donde  $\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}}$  viene dado por la expresión (3.87)

El correspondiente tensor constitutivo en la configuración espacial, parte volumétrica  $\mathbf{c}_v$ , puede obtenerse mediante una operación *push-forward* de su forma material  $\mathbf{C}_v$ ,

$$\mathbf{c}_v = [JW'(J)]'\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - 2W'(J)\mathbf{I} \quad (3.105)$$

Utilizando las ecuaciones (3.103) y (3.104), y recordando (3.79) y (3.83), el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  y el tensor constitutivo material  $\mathbf{C}$ , empleando estiramientos modificados  $\lambda_i^*$ , están dados por:

$$\boxed{\mathbf{S} = JW'(J)\mathbf{C}^{-1} + \sum_{A=1}^3 \beta_A \mathbf{M}_A} \quad (3.106)$$

y

$$\boxed{\mathbf{C} = J^2 W''(J)\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + JW'(J)[\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}}] + \sum_{A=1}^3 \left[ \sum_{B=1}^3 \gamma_{AB} \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{M}_B \right] + \sum_{A=1}^3 2\beta_A \partial_{\mathbf{C}} \mathbf{M}_A} \quad (3.107)$$

donde  $\beta_A$  y  $\gamma_{AB}$  han sido dados por la ecuación (3.96) para la función energía de deformación de Ogden y la derivada  $\partial_{\mathbf{C}} \mathbf{M}_A$  viene dada por las ecuaciones (3.86-3.87).

En forma análoga, utilizando las ecuaciones (3.102) y (3.105) y recordando las ecuaciones (3.81) y (3.88), pueden expresarse el tensor de tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  y el tensor constitutivo espacial  $\mathbf{c}$  en función los estiramientos modificados  $\lambda_i^*$ ,

$$\sigma = W'(J)\mathbf{1} + \frac{1}{J} \sum_{A=1}^3 \beta_A \mathbf{m}_A \quad (3.108)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = & J^2 W''(J) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + J W'(J) [\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - 2\mathbf{I}] + \\ & + \frac{1}{J} \sum_{A=1}^3 \left[ \sum_{B=1}^3 \gamma_{AB} \mathbf{m}_A \otimes \mathbf{m}_B \right] + \frac{2}{J} \sum_{A=1}^3 \beta_A \frac{\partial \mathbf{m}_A}{\partial \mathbf{g}} \end{aligned} \quad (3.109)$$

con  $\beta_A$  y  $\gamma_{AB}$  dados por la ecuación (3.96) y la derivada  $\partial_g \mathbf{m}_A$  dada por las ecuaciones (3.89-3.90).

En esta monografía se propone utilizar para la parte volumétrica de la función energía de deformación, la expresión:

$$W(J) = 1/2\kappa(J-1)^2 \quad \text{con} \quad J = I_3^{1/2} \quad \text{y} \quad I_3 = \det(\mathbf{C}) \quad (3.110)$$

siendo  $\kappa$  el modulo volumétrico del material en la configuración de referencia. De esta forma se tiene:

$$W'(J) = p = \kappa(J-1) \quad \text{y} \quad W''(J) = \kappa \quad (3.111)$$

### 3.5 VISCOELASTICIDAD

Como se mencionó en la Sección 3.3, los elastómeros, y especialmente aquellos denominados de alto amortiguamiento, cuando son sometidos a cargas cíclicas presentan en su respuesta fuerza-desplazamiento una componente no-elástica. En el caso de dispositivos de apoyo elastomérico sometidos a desplazamientos horizontales impuestos generando esfuerzos de cortante esta componente puede observarse en los ciclos de histéresis de los gráficos correspondientes a ensayos de laboratorio de estos dispositivos (véase la Sección 2.5.2). La amplitud de esta componente no-elástica depende naturalmente del tipo de elastómero y también es función de la frecuencia de los desplazamientos impuestos (SMiRT11 1991), lo cual motiva la consideración de modelos viscoelásticos en la simulación numérica de los elastómeros.

La propuesta de utilizar modelos viscoelásticos en la representación del comportamiento mecánico disipativo de los elastómeros se adjudica a Green & Tobolsky (1946), cuyo trabajo fue luego ampliado a grandes deformaciones por Lubliner (1985a) y utilizado como base por otros autores (Roland & Warzel 1990, Johnson, Quigley & Freese 1995).

Los modelos viscoelásticos en grandes deformaciones que se encuentran en la literatura pueden agruparse entre aquellos que se basan en una descomposición multiplicativa del gradiente de deformación (Sidoroff 1974, Lubliner 1985*a*, LeTallec, Raihier & Kaiss 1993), o en una descomposición aditiva del tensor de deformaciones (Christensen 1980), y otros basados en una descomposición aditiva del tensor de tensiones (Simo 1987, Govindjee & Simo 1992*a*, Holzapfel 1996). Todos estos enfoques son termodinámicamente consistentes, utilizan una descomposición aditiva de la función energía de deformación en sus partes elástica y viscosa y pueden preservar la condición de incompresibilidad. Pero, los primeros resultan más complejos en su implementación por la necesidad de cuantificar la componente viscosa del tensor de deformaciones y en el caso particular de los elastómeros por la necesidad de imponer una deformación viscosa a volumen cuasi constante. Por esta última razón, en este trabajo se opta por una estructura basada en una descomposición aditiva del tensor de tensiones.

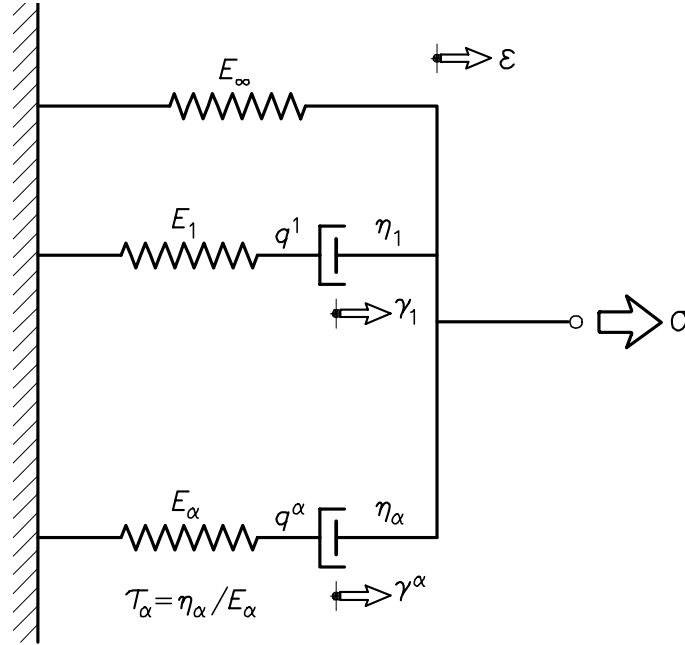
Un modelo de viscoelasticidad en grandes deformaciones, con aditividad de tensiones ha sido tratado por Simo (1987), donde la parte elástica de la formulación respondía a un modelo neo-Hooke. En base a éste trabajo, Govindjee & Simo (1992*a*) han ampliado el modelo considerando la función energía de deformación de Ogden para la parte elástica, pero sin detallar su tratamiento numérico. Posteriormente, en un trabajo dedicado a la memoria del Profesor Juan Carlos Simo, Holzapfel (1996) ha presentado una formulación más detallada utilizando en su implementación elementos finitos mejorados (*enhanced elements*, véase Simo & Armero (1992) o Simo, Armero & Taylor (1993)) con ejemplos de aplicación a fenómenos de relajación en elastómeros. Kaliske et al. (1997) han seguido esta línea de trabajo en un modelo aplicable a piezas de elastómeros aparentemente reforzadas con fibras. Por último, Salomón et al. (1998) han presentado un modelo generalizado de hiperelasticidad, con componentes viscoelásticas y elastoplásticas y ejemplos de aplicaciones concretas a dispositivos de apoyo con capas alternas de elastómero y acero.

En esta sección se analiza una formulación de viscoelasticidad en grandes deformaciones de tal manera que para deformaciones infinitamente lentas la respuesta del material sea elástica, colapsando en el modelo de Ogden (Sección 3.4.3), mientras que para deformaciones de velocidad finita el material presente memoria. El modelo está formulado en la configuración material, suponiendo condiciones isotérmicas con temperatura por sobre el límite de cristalización (véase la Sección 2.5.4). La función energía de deformación total tiene la estructura aditiva indicada en la ecuación (3.34) y, considerando que los elastómeros son materiales cuasi incompresibles, se supone que los cambios dependientes del tiempo solo afectan a la componente desviadora de la deformación y que la parte volumétrica es totalmente elástica.



### 3.5.1 Modelo reológico

Considérese un mecanismo uni-dimensional tal como el indicado en la figura 3.1, compuesto por una combinación de resortes lineales con constantes elásticas  $E_\infty$  y  $E_1$  a  $E_\alpha$  y amortiguadores con coeficientes de viscosidad  $\eta_1$  a  $\eta_\alpha$ .



**Figura 3.1** Modelo reológico uni-dimensional

Por condición de equilibrio se tiene que la tensión total,

$$\sigma = E_\infty \varepsilon + \sum_{\alpha=1}^m q^\alpha \quad (3.112)$$

donde  $\varepsilon$  es la deformación del mecanismo y  $q^\alpha$  las tensiones en los  $\alpha$  dispositivos de Maxwell incluidos en el modelo. Si se asume una relación constitutiva lineal entre la fuerza viscosa y la tasa de deformación en los amortiguadores,

$$q^\alpha = E_\alpha (\varepsilon - \gamma^\alpha) = \eta_\alpha \dot{\gamma}^\alpha \quad (3.113)$$

donde  $\gamma^\alpha$  representa las deformaciones inelásticas de los amortiguadores.

La variación respecto al tiempo de estas tensiones internas  $q^\alpha$  representan las ecuaciones de evolución del modelo,

$$\dot{q}^\alpha + \frac{q^\alpha}{\tau_\alpha} = \frac{d}{dt}(E_\alpha \varepsilon) \quad (3.114)$$

siendo  $\tau_\alpha = \eta_\alpha / E_\alpha$  el tiempo de relajación del elemento  $\alpha$ .

Una generalización de este modelo se logra definiendo una función energía de deformación de la forma

$$W = W^\infty(\varepsilon) + \sum_{\alpha=1}^m W^\alpha(\varepsilon, \gamma^\alpha) \quad (3.115)$$

donde las deformaciones inelásticas de los amortiguadores  $\gamma^\alpha$  se introducen como variables internas. Si se eligen formas cuadráticas para la energía de deformación, se puede escribir,

$$W = \underbrace{\frac{1}{2}E_\infty\varepsilon^2}_{W^\infty} + \sum_{\alpha=1}^m \underbrace{\frac{1}{2}E_\alpha(\varepsilon - \gamma^\alpha)^2}_{W^\alpha} \quad (3.116)$$

y de aquí, la tensión y disipación del modelo,

$$\sigma = \frac{dW}{d\varepsilon} = E_\infty\varepsilon + \sum_{\alpha=1}^m q^\alpha \quad y \quad \dot{q}^\alpha + \frac{q^\alpha}{\tau_\alpha} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{d\varepsilon} W^\alpha(\varepsilon) \right] \quad (3.117)$$

resultan iguales a las ecuaciones (3.112) y (3.114), respectivamente.

Para un tiempo  $t = 0$ ,  $q_0^\alpha = E_\alpha\varepsilon_0$ ; mientras que para un tiempo  $t \rightarrow \infty$ ,  $q_{t \rightarrow \infty}^\alpha = 0$ , por lo que se recobra el modelo elástico clásico.

### 3.5.2 Modelo generalizado en grandes deformaciones

En esta sección se generaliza el modelo reológico anterior llevándolo a un modelo tridimensional en grandes deformaciones. Para ello se utilizan una función de energía libre con variables internas y una función de disipación.

Como se mencionó, se supone que la parte volumétrica de la deformación es elástica y que los efectos dependientes del tiempo afectan a la parte desviadora de la deformación. Por analogía con el modelo reológico, se propone para la parte viscoelástica de la energía de deformación  $W_{ve}$ , en la ecuación (3.34), la forma aditiva

$$W_{ve}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{\Gamma}) = W^\infty(\bar{\mathbf{C}}) + W^\alpha(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{\Gamma}^\alpha) \quad (3.118)$$

donde  $W^\infty(\bar{\mathbf{C}})$  describe la respuesta desviadora del material para un tiempo  $t \rightarrow \infty$ , siendo  $\bar{\mathbf{C}}$  la parte desviadora del tensor derecho de Cauchy-Green,  $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$ , con  $\bar{\mathbf{F}}$  dado por la ecuación (3.27). La otra componente,  $W^\alpha(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{\Gamma}^\alpha)$ , describe la parte viscosa del modelo, la cual desaparece progresivamente durante el proceso de relajación, siendo  $\mathbf{\Gamma}^\alpha$  variables internas tipo tensores de deformación análogas

a  $\gamma^\alpha$  en la ecuación (3.115). El comportamiento viscoso es modelado mediante  $\alpha$  procesos de relajación con  $\tau_\alpha \in (0, \infty)$  tiempos de relajación.

Una forma de la segunda ley de la termodinámica es la desigualdad de Clausius-Duhem, que fue expresada en su forma euleriana completa en la ecuación (3.6). Esta desigualdad, para procesos isotérmicos y en su forma lagrangeana, se expresa como

$$\mathcal{D}_{int} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}}/2 - \dot{W} \geq 0 \quad (3.119)$$

siendo  $\mathcal{D}_{int}$  la disipación interna. Una particularización de (3.119) se obtiene diferenciando (3.118),

$$\mathcal{D}_{int} = (\mathbf{S} - 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}W_{ve}) : \dot{\mathbf{C}}/2 - (\partial_{\Gamma^\alpha}W_{ve}) : \dot{\Gamma}^\alpha \geq 0 \quad (3.120)$$

Considerando que esta desigualdad se debe cumplir para todo proceso termodinámico (en este caso solo mecánico) y para cualquier tasa de deformación, de aquí se obtienen la ecuación constitutiva hiperelástica para el tensor de tensiones  $\mathbf{S}$  y la desigualdad de disipación interna  $\mathcal{D}_{int}$ , de forma análoga a como se obtuvo el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en la ecuación (3.17) y la disipación en las ecuaciones (3.18-3.19),

$$\mathbf{S} = 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}W_{ve} \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_{int} = \sum_{\alpha=1}^m [-(\partial_{\Gamma^\alpha}W_{ve})] : \dot{\Gamma}^\alpha \geq 0 \quad (3.121)$$

Aplicando el modelo constitutivo dado por la ecuación (3.118) se obtiene para la parte desviadora del tensor de tensiones una forma aditiva de tensiones en equilibrio y no-equilibrio,

$$\bar{\mathbf{S}}_{ve} = 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}W^\infty(\bar{\mathbf{C}}) + 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}W^\alpha(\bar{\mathbf{C}}, \Gamma^\alpha) = \bar{\mathbf{S}}^\infty + \sum_{\alpha=1}^m \mathbf{Q}^\alpha \quad (3.122)$$

siendo  $\mathbf{Q}^\alpha$  tensiones no equilibradas termodinámicamente.

De acuerdo con el modelo reológico, se define  $\mathbf{Q}^\alpha$  como variables conjugadas a  $\Gamma^\alpha$  con una relación constitutiva  $\mathbf{Q}^\alpha = -\partial_{\Gamma^\alpha}W^\alpha(\bar{\mathbf{C}}, \Gamma^\alpha)$ . En esta forma, la producción local de entropía (3.121b) es dada por la relación

$$\mathcal{D}_{int} = \sum_{\alpha=1}^m \mathbf{Q}^\alpha : \dot{\Gamma}^\alpha \geq 0 \quad (3.123)$$

que se satisface especificando una ecuación de evolución para las variables internas tal como

$$\dot{\Gamma}^\alpha = \mathbf{V}(\bar{\mathbf{C}}, \Gamma^\alpha) : \mathbf{Q}^\alpha \quad (3.124)$$

donde  $\mathbf{V}$  es un tensor de cuarto orden definido positivo que contiene la viscosidad inversa (véase la similitud con la ecuación (3.113)).

Por analogía con el modelo reológico se propone para la ecuación de evolución de  $\mathbf{Q}^\alpha$  la siguiente expresión

$$\dot{\mathbf{Q}}^\alpha + \frac{\mathbf{Q}^\alpha}{\tau_\alpha} = \frac{d}{dt}[2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}W^\alpha(\bar{\mathbf{C}})] \quad (3.125)$$

donde  $W^\alpha$  es una función de energía libre que corresponde a los  $\alpha$  procesos de relajación con  $\tau_\alpha$  tiempos de relajación. La respuesta instantánea,  $t = 0$ , viene dada por  $\mathbf{Q}_0^\alpha = 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}W^\alpha(\bar{\mathbf{C}}_0)$

Una solución de la ecuación de disipación se obtiene en forma de integral de convolución,

$$\mathbf{Q}^\alpha = \exp[-t/\tau_\alpha]\gamma_\infty^\alpha[2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}W^\infty(\bar{\mathbf{C}}_0)] + \int_0^t \gamma_\infty^\alpha \exp[-(t-s)/\tau_\alpha] \frac{d}{ds}[2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}W^\infty(\bar{\mathbf{C}}_s)] ds \quad (3.126)$$

donde se asume la relación

$$W^\alpha(\bar{\mathbf{C}}) = \gamma_\infty^\alpha W^\infty(\bar{\mathbf{C}}) \quad (3.127)$$

siendo  $\gamma_\infty^\alpha \in (0, \infty)$  factores asociados con  $\tau_\alpha$ . Esta adopción viene motivada por el hecho de que el medio viscoelástico es obviamente el mismo material elastomérico que ha sido modelado previamente como elástico. Por lo que, la función energía de deformación  $W^\infty(\bar{\mathbf{C}})$  utilizada en esta monografía para modelar los elastómeros es la función energía de Ogden (véase la Sección 3.4.3).

En función de las ecuaciones (3.126-3.127) la parte desviadora del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, ecuación (3.122), resulta,

$$\bar{\mathbf{s}}_{ve} = g(t)[2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}W^\infty(\bar{\mathbf{C}}_0)] \int_0^t g(t-s) \frac{d}{ds}[2\partial_{\bar{\mathbf{C}}}W^\infty(\bar{\mathbf{C}}_s)] ds \quad (3.128)$$

donde

$$g(t) = 1 + \sum_{\alpha=1}^N \gamma_\infty^\alpha \exp(-t/\tau_\alpha)$$

es una función normalizada de relajación.

### 3.5.3 Algoritmo de integración

En la formulación del procedimiento en pasos discretos de tiempo la evaluación de la integral de convolución en la ecuación (3.126) puede realizarse mediante una

relación recursiva. Esta integral es definida como  $\mathbf{H}^\alpha$ ,

$$\mathbf{H}^\alpha = \int_0^t \exp[-(t-s)/\tau_\alpha] \frac{d}{ds} [2\partial_{\bar{C}} W^\infty(\bar{C}_s)] ds \quad (3.129)$$

y debe ser evaluada en el tiempo  $t_{n+1}$ , cuando

$$\mathbf{H}_n^\alpha = \mathbf{Q}_n^\alpha - \exp[-\frac{t_n}{\tau_\alpha}] \gamma_\infty^\alpha [2\partial_{\bar{C}} W^\infty(\bar{C})] \quad (3.130)$$

$\mathbf{H}_{n+1}^\alpha$  se determina en función de este valor asumido como conocido,  $\mathbf{H}_n^\alpha$ , y una integral sobre el paso de tiempo  $[t_n, t_{n+1}]$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{n+1}^\alpha &= \int_0^{t_{n+1}} \exp[-\frac{t_n + \Delta t - s}{\tau_\alpha}] \frac{d}{ds} [2\partial_{\bar{C}} W^\infty(\bar{C}_s)] ds \\ &= \int_0^{t_n} \exp[-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}] \exp[-\frac{t_n - s}{\tau_\alpha}] \frac{d}{ds} [2\partial_{\bar{C}} W^\infty(\bar{C}_s)] \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp[-\frac{t_{n+1} - s}{\tau_\alpha}] \frac{d}{ds} [2\partial_{\bar{C}} W^\infty(\bar{C}_s)] \\ &= \exp[-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}] \mathbf{H}_n^\alpha + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp[-\frac{t_{n+1} - s}{\tau_\alpha}] \frac{d}{ds} [2\partial_{\bar{C}} W^\infty(\bar{C}_s)] \end{aligned} \quad (3.131)$$

donde  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ . Esta integral puede estimarse utilizando la regla del punto medio,

$$\begin{aligned} &\int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp[-\frac{t_{n+1} - s}{\tau_\alpha}] \frac{d}{ds} [2\partial_{\bar{C}} W^\infty(\bar{C}_s)] ds \\ &\cong \exp(-\frac{\Delta t}{2\tau_\alpha}) [2\partial_{\bar{C}} W^\infty(\bar{C}_{n+1}) - 2\partial_{\bar{C}} W^\infty(\bar{C}_n)] \end{aligned} \quad (3.132)$$

Con lo que se obtiene para  $\mathbf{H}_{n+1}^\alpha$  la expresión

$$\mathbf{H}_{n+1}^\alpha = \exp[-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}] \mathbf{H}_n^\alpha + \exp(-\frac{\Delta t}{2\tau_\alpha}) [2\partial_{\bar{C}} W^\infty(\bar{C}_{n+1}) - 2\partial_{\bar{C}} W^\infty(\bar{C}_n)] \quad (3.133)$$

### Determinación del tensor de tensiones

De la ecuación (3.128) para el tensor el tensiones y la ecuación (3.129) definiendo las variables internas  $\mathbf{H}^\alpha$ , puede expresarse

$$\boxed{\bar{\mathbf{S}}_{ve} = \bar{\mathbf{S}}^\infty + \sum_{\alpha=1}^N \gamma^\alpha \mathbf{H}^\alpha} \quad (3.134)$$

Suponiendo que  $d/ds[2\partial_{\bar{C}}W^\infty(\bar{C}_s)]$  es constante para  $s \in [t_n, t_{n+1}]$ , la integral de la ecuación (3.132) puede ser evaluada como,

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left[-\frac{t_{n+1}-s}{\tau^\alpha}\right] \frac{d}{ds} [2\partial_{\bar{C}}W^\infty(\bar{C}_s)] ds \\
 & \cong \left. \frac{d}{ds} [2\partial_{\bar{C}}W^\infty(\bar{C}_s)] \right|_{s=\frac{t_n+t_{n+1}}{2}} \cdot \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp\left[-\frac{t_{n+1}-s}{\tau^\alpha}\right] ds \\
 & = [2\partial_{\bar{C}}W^\infty(\bar{C}_{n+1}) - 2\partial_{\bar{C}}W^\infty(\bar{C}_n)] \left. \frac{1}{\Delta t_n} \tau^\alpha \exp\left[-\frac{t_{n+1}-s}{\tau^\alpha}\right] \right|_{s=t_n}^{s=t_{n+1}} \\
 & = \frac{1 - \exp[-\Delta t_n/\tau^\alpha]}{\Delta t_n/\tau^\alpha} [\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^\infty - \bar{\mathbf{S}}_n^\infty]
 \end{aligned} \tag{3.135}$$

Reemplazando esta ecuación en la (3.131) se obtiene

$$\boxed{\mathbf{H}_{n+1}^\alpha = \exp\left[-\frac{\Delta t}{\tau^\alpha}\right] \mathbf{H}_n^\alpha + \frac{1 - \exp[-\Delta t_n/\tau^\alpha]}{\Delta t_n/\tau^\alpha} [\bar{\mathbf{S}}_{n+1}^\infty - \bar{\mathbf{S}}_n^\infty]} \tag{3.136}$$

### Linealización. Tensor constitutivo tangente

En primer lugar se recuerda que en los modelos hiperelásticos el tensor constitutivo tangente se obtiene como derivada segunda de la función energía de deformación  $W$ , o derivada primera del tensor de tensiones (al ser estas tensiones la derivada primera de la energía de deformación). Esto es, recordando las ecuaciones (3.25) y (3.36),

$$\mathbf{S} = 2\partial_{\mathbf{C}}W(\mathbf{C}) = \partial_{\mathbf{E}}W(\mathbf{C}) \quad \mathbf{C} = 2\partial_{\mathbf{C}}\mathbf{S} = 4\partial_{\mathbf{C}\mathbf{C}}W(\mathbf{C}) = \partial_{\mathbf{E}}\mathbf{S} \tag{3.137}$$

siendo  $\mathbf{S}$  el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff,  $\mathbf{C}$  el tensor constitutivo tangente en su forma lagrangeana,  $\mathbf{C}$  el tensor derecho de Cauchy-Green y  $\mathbf{E}$  el tensor de deformación de Green-Lagrange.

En la ecuación (3.34) se ha propuesto una descomposición aditiva de la función energía de deformación  $W$  en sus partes volumétrica y desviadora, y de esta última a su vez en sus partes viscoelástica y elastoplástica, afectadas por coeficientes de participación según la proporción en volumen de las componentes caucho y partículas agregadas, respectivamente. Esta descomposición aditiva de la función  $W$  conduce a formas aditivas del tensor de tensiones, ecuación (3.35), y del tensor constitutivo tangente. Se recuerda nuevamente que la parte volumétrica de la deformación se supone elástica y que para la parte desviadora viscoelástica se adopta la función  $W$  dada por la ecuación (3.118), que en conjunto con la (3.127) conducen a un tensor de tensiones viscoelástico de la forma dada en la ecuación (3.134).

Derivando el tensor de tensiones  $\bar{\mathbf{S}}_{ve}$  dado por la ecuación (3.134), se tiene

$$\bar{\mathbf{C}} = \partial_E \bar{\mathbf{S}}^\infty + \sum_{\alpha=1}^N \gamma^\alpha \partial_E \mathbf{H}^\alpha \quad (3.138)$$

para  $\mathbf{H}^\alpha$  dado por la ecuación (3.136),

$$\partial_E \mathbf{H}_{n+1}^\alpha = \frac{1 - \exp[-\Delta t/\tau^\alpha]}{\Delta t/\tau^\alpha} \partial_E \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^\infty = \frac{1 - \exp[-\Delta t/\tau^\alpha]}{\Delta t/\tau^\alpha} \bar{\mathbf{C}}_{n+1}^\infty \quad (3.139)$$

En consecuencia, se tiene para el tensor constitutivo viscoelástico la expresión

$$\boxed{\bar{\mathbf{C}}_{ve} = g^* \bar{\mathbf{C}}^\infty \quad \text{con} \quad g^* = 1 + \sum_{\alpha=1}^N \gamma^\alpha \frac{1 - \exp[-\Delta t/\tau^\alpha]}{\Delta t/\tau^\alpha}} \quad (3.140)$$

Formas explícitas para  $\mathbf{C}^\infty$  en la ecuación (3.140) y  $\mathbf{S}^\infty$  en la (3.134) fueron derivadas, para funciones energía de deformación  $W$  expresadas en función de los estiramientos principales  $\lambda$ , en las ecuaciones (3.107) y (3.106).

### 3.6 ELASTOPLASTICIDAD

Los elastómeros utilizados en la construcción de dispositivos de apoyo frecuentemente incorporan partículas (*carbon-black filler*) a efectos de incrementar sus propiedades disipativas. Los dispositivos construidos con estos elastómeros se denominan de alto amortiguamiento (*HRB = High Damping Rubber Bearing*); la diferencia de comportamiento entre estos y los dispositivos construidos con caucho natural (*NRB = Natural Rubber Bearing*) ha sido analizada en la Sección 2.5.

Naturalmente, el comportamiento mecánico del caucho y de las partículas agregadas no es el mismo y este hecho debe considerarse al formular un modelo constitutivo que represente el compuesto, caucho de alto amortiguamiento. En esta monografía se propone un modelo hipereelástico basado en teoría de mezclas (Sección 3.3), donde la componente elastomérica es tratada mediante un modelo de viscoelasticidad en grandes deformaciones (Secciones 3.4 y 3.5) y la componente partículas es modelada mediante elastoplasticidad, también, en deformaciones finitas. La función energía de deformación  $W$  para el sólido compuesto ha sido expresada en la ecuación (3.34), separando las componentes volumétrica y desviadora de la deformación y considerando para esta última contribuciones viscoelásticas y elastoplásticas según las proporciones en volumen de las componentes elastómero y partículas, respectivamente. En esta sección se desarrolla el tratamiento del modelo elastoplástico, considerando en primer lugar una formulación general de elastoplasticidad en deformaciones finitas y particularizando luego esta formulación para el modelo propuesto.

### 3.6.1 Modelo constitutivo elastoplástico en grandes deformaciones

Esta formulación elastoplástica está basada en una descomposición multiplicativa del gradiente de deformación  $\mathbf{F}$ , en sus partes elástica y plástica,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (3.141)$$

La descomposición multiplicativa del gradiente de deformación en sus partes elástica y plástica, propuesta por Lee (1969), es aceptada en la actualidad como herramienta base para el tratamiento de elastoplasticidad en deformaciones finitas (Simo 1988a, Simo 1988b, Eterovic & Bathe 1990, Simo 1992, Garcia-Garino 1993). Este enfoque se presentaba como alternativa a la teoría aditiva ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$ ) de Green & Naghdi (1965), si bien, bajo ciertas condiciones, han sido unificados (Garcia-Garino 1993), y sin dudas se ha impuesto sobre los modelos hipoeelásticos que han gozado de gran popularidad en el pasado (Hughes 1984). Un estudio crítico de estas formulaciones (descomposición aditiva, multiplicativa e hipoeelástica) puede consultarse en Garcia-Garino (1993) y algunos resultados comparativos entre formulación multiplicativa y aditiva son presentados por Eterovic & Bathe (1990).

La formulación elastoplástica aquí analizada mantiene la estructura de los modelos clásicos de plasticidad infinitesimal. Las diferencias con el caso infinitesimal son:

- el predictor elástico es evaluado utilizando cinemática de grandes deformaciones,
- se realiza una descomposición espectral de este predictor elástico,
- se utilizan deformaciones logarítmicas,
- el algoritmo predictor-corrector se plantea en tensiones principales.

La utilización de deformaciones logarítmicas en modelos de elastoplasticidad es relativamente reciente (Weber & Anand 1990, Eterovic & Bathe 1990, Peric, Owen & Honnor 1992, Simo 1992), conduce a simplificaciones en el algoritmo de integración de tensiones y permite la aplicación del algoritmo corrector plástico de plasticidad en deformaciones infinitesimales al caso de deformaciones finitas. Además, preserva exactamente los cambios de volumen plástico en caso de criterios de fluencia insensibles a la presión.

En base a la descomposición multiplicativa del gradiente de deformación dada por la ecuación (3.141) se define una función energía de deformación  $W$  en la forma,

$$W = W(\mathbf{b}^e, \boldsymbol{\xi}) \quad \text{con} \quad \mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT} \quad (3.142)$$

donde  $\mathbf{b}^e$  es la parte elástica del tensor izquierdo de Cauchy-Green y  $\boldsymbol{\xi}$  es un tensor de variables internas conjugadas a  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q} = -\partial_{\boldsymbol{\xi}} W$ .



### Dominio elástico

El dominio elástico es definido por un criterio de fluencia en el espacio de tensiones

$$\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad (3.143)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}$  es el tensor de tensiones de Kirchhoff en la configuración espacial y  $\mathbf{q}$  es un tensor, similar al anterior, caracterizando el endurecimiento en la respuesta del material. La superficie de fluencia es definida por  $\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = 0$

### Ecuaciones constitutivas. Desigualdad de disipación

La función de disipación local asociada con un punto material se obtiene a partir de la segunda ley de la termodinámica en su forma denominada desigualdad de Clausius-Duhem, ecuación (3.6). Esta desigualdad, reducida a procesos isotérmicos se expresa como

$$\mathcal{D}_{int} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \dot{W}(\mathbf{b}^e, \boldsymbol{\xi}) \geq 0 \quad (3.144)$$

siendo  $\mathbf{d}$  el tensor tasa de deformación (véase en el Apéndice, Sección A.2.6, ecuación (A.38)). Es decir, la disipación es definida como la diferencia entre el trabajo realizado por las tensiones en el punto y la variación en la función de energía y resulta nula ( $\mathcal{D}_{int} = 0$ ) en caso de procesos de deformación elásticos.

A partir de la ecuación (3.141) puede expresarse la relación

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F} \mathbf{C}^p{}^{-1} \mathbf{F}^T \quad \text{con} \quad \mathbf{C}^p = \mathbf{F}^p{}^T \mathbf{F}^p \quad (3.145)$$

donde  $\mathbf{C}^p$  es el denominado tensor de deformaciones plástico de Cauchy-Green. Derivando esta ecuación se tiene

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \mathbf{l} \mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \mathbf{l}^T + \mathcal{L} \mathbf{b}^e \quad \text{con} \quad \mathcal{L} \mathbf{b}^e = \mathbf{F} [\dot{\mathbf{C}}^p{}^{-1}] \mathbf{F}^T \quad (3.146)$$

siendo  $\mathcal{L} \mathbf{b}^e$  la derivada de Lie de  $\mathbf{b}^e$  (Marsden & Hughes 1983) y  $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$  el tensor gradiente de velocidad (Sección A.2.6). Utilizando esta relación, la derivada de la función energía puede expresarse como

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \partial_{\mathbf{b}^e} W [\mathbf{l} \mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \mathbf{l}^T + \mathcal{L} \mathbf{b}^e] + \partial_{\boldsymbol{\xi}} W \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ &= [2\partial_{\mathbf{b}^e} W \mathbf{b}^e] [\mathbf{l} + 1/2(\mathcal{L} \mathbf{b}^e) \mathbf{b}^{e-1}] + \partial_{\boldsymbol{\xi}} W \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{aligned} \quad (3.147)$$

Reemplazando esta ecuación en la (3.144),

$$\mathcal{D}_{int} = [\boldsymbol{\tau} - 2\partial_{\mathbf{b}^e} W \mathbf{b}^e] \mathbf{d} + [2\partial_{\mathbf{b}^e} W \mathbf{b}^e] [-1/2(\mathcal{L} \mathbf{b}^e) \mathbf{b}^{e-1}] - \partial_{\boldsymbol{\xi}} W \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad (3.148)$$

De esta ecuación, considerando que debe cumplirse para todo proceso termodinámico y para cualquier tasa de deformación, se obtienen la ecuación constitutiva para el tensor de tensiones y la forma reducida de desigualdad de disipación interna,

$$\boldsymbol{\tau} = 2\partial_{\mathbf{b}^e} W \mathbf{b}^e \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_{int} = \boldsymbol{\tau} [-1/2(\mathcal{L} \mathbf{b}^e) \mathbf{b}^{e-1}] + \mathbf{q} \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad (3.149)$$

donde  $\mathbf{q} = -\partial_{\boldsymbol{\xi}} W$

**Ecuaciones de evolución. Disipación máxima**

De acuerdo al postulado de máxima disipación, el estado actual  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})$  en el cuerpo plásticamente deformado con configuración intermedia prescrita y tasas  $\{\mathcal{L}\mathbf{b}^e, \dot{\boldsymbol{\xi}}\}$  prescritas es aquel que conduce a un máximo en la función de disipación  $\mathcal{D}_{int}$ . Esto es,

$$[\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^*][ -1/2(\mathcal{L}\mathbf{b}^e)\mathbf{b}^{e-1}] + [\mathbf{q} - \mathbf{q}^*]\dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad (3.150)$$

para todo  $(\boldsymbol{\tau}^*, \mathbf{q}^*)$  admisible. Para que se cumpla esta desigualdad  $\{[-1/2(\mathcal{L}\mathbf{b}^e)\mathbf{b}^{e-1}], \dot{\boldsymbol{\xi}}\}$  deben estar dentro del cono normal al dominio elástico en el punto  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})$ . Por lo tanto, si el criterio de fluencia es definido por la ecuación (3.143), las ecuaciones de evolución son

$$\begin{aligned} -1/2 \mathcal{L}\mathbf{b}^e &= \gamma[\partial_{\boldsymbol{\tau}}\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})]\mathbf{b}^e \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \gamma \partial_{\mathbf{q}}\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \\ \gamma &\geq 0, \quad \phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \gamma\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = 0 \end{aligned} \quad (3.151)$$

**Predictor elástico y corrector plástico**

El problema planteado en las ecuaciones (3.151) puede ser resuelto con una metodología de pasos fraccionales. Para un incremento dado de desplazamientos, reemplazando la ecuación (3.151) en la (3.146), se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{b}}^e &= [\mathbf{l}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e\mathbf{l}^T] - 2\gamma[\partial_{\boldsymbol{\tau}}\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})]\mathbf{b}^e \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \gamma \partial_{\mathbf{q}}\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.152)$$

$$\text{con restricciones : } \gamma \geq 0, \quad \phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \gamma\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = 0$$

Este sistema de ecuaciones se divide en dos problemas:

I) Predictor elástico.

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{b}}^e)^I &= [\mathbf{l}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e\mathbf{l}^T] \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.153)$$

con restricciones : Ninguna

II) Corrector plástico.

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{b}}^e)^{II} &= -2\gamma[\partial_{\boldsymbol{\tau}}\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})]\mathbf{b}^e \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \gamma \partial_{\mathbf{q}}\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.154)$$

$$\text{con restricciones : } \gamma \geq 0, \quad \phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \gamma\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = 0$$

Recordando que la solución a una ecuación del tipo  $\dot{z}(t) = A z(t)$  en el intervalo de tiempo  $[t_n, t_{n+1}]$  viene dada por  $z(t) = \exp[(t - t_n)A]z(t_n)$ ; una aproximación a la ecuación (3.154) puede expresarse como

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_t^e &= \exp[-2\Delta\gamma\partial_\tau\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})]\mathbf{b}_t^{tr} \\ \boldsymbol{\xi}_t &= \boldsymbol{\xi}_n + \Delta\gamma\partial_q\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.155)$$

donde  $\Delta\gamma = [t - t_n]\gamma$  y  $\mathbf{b}_t^{tr}$  es el predictor elástico determinado en el paso I.

### Algoritmo predictor-corrector en direcciones principales

Como resultado de la restricción a un comportamiento isótropo, las direcciones principales del tensor de tensiones de Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}$  y del tensor elástico izquierdo de Cauchy-Green  $\mathbf{b}^e$  coinciden, siendo sus formas espectrales,

$$\mathbf{b}^e = \sum_{A=1}^3 (\lambda_A^e)^2 \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad \boldsymbol{\tau}^e = \sum_{A=1}^3 \beta_A \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad (3.156)$$

donde  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  son los estiramientos principales, autovalores del tensor de estiramiento izquierdo  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{V}^2$ , y  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$  son las direcciones principales de  $\mathbf{b}$  (véase las ecuaciones A.25-A.26 y 3.76).  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  son las tensiones principales (véase las Secciones A.3.5 y A.3.3 y la ecuación (3.81)).

Además, esta restricción implica la existencia de una función  $\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = \hat{\phi}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \mathbf{q})$  con descomposición espectral

$$\partial_\tau\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = \sum_{A=1}^3 \partial_{\beta_A}\phi(\beta_A, \mathbf{q}) \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad (3.157)$$

Despejando  $\mathbf{b}^{tr}$  de la ecuación (3.155), resulta

$$\mathbf{b}^{tr} = \exp[2\Delta\gamma\partial_\tau\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})]\mathbf{b}^e \quad (3.158)$$

y reemplazando las ecuaciones (3.156) y (3.157) en esta última,

$$\mathbf{b}^{tr} = \sum_{A=1}^3 [(\lambda_A^e)^2 \exp[2\Delta\gamma\partial_{\beta_A}\phi(\beta_A, \mathbf{q})] \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad (3.159)$$

Comparando esta expresión con la descomposición espectral de  $\mathbf{b}^{tr}$ ,

$$\mathbf{b}^{tr} = \sum_{A=1}^3 (\lambda_A^{tr})^2 \mathbf{n}_A^{tr} \otimes \mathbf{n}_A^{tr} \quad (3.160)$$

por unicidad en la descomposición espectral, se obtiene

$$\mathbf{n}_A = \mathbf{n}_A^{tr} \quad (3.161)$$

y

$$(\lambda_A^e)^2 = \exp[-2\Delta\gamma\partial_{\beta_A}\phi(\beta_A, \mathbf{q})](\lambda_A^{tr})^2 \quad (3.162)$$

Esto es, las direcciones principales  $\mathbf{n}_A$  de la configuración elástica final coinciden con las direcciones principales del estado elástico predictor  $\mathbf{n}_A^{tr}$ , y en consecuencia, el algoritmo corrector plástico se produce con ejes principales fijos definidos por el estado elástico de prueba.

Operando con logaritmos a ambos lados de la igualdad (3.162) y denominando  $\epsilon_A = \log[\lambda_A]$  y  $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3]^T$ , se obtiene

$$\boldsymbol{\epsilon}^e = \boldsymbol{\epsilon}^{e\ tr} - \Delta\gamma\partial_{\beta}\phi(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{q}) \quad (3.163)$$

### 3.6.2 Implementación. Algoritmo predictor-corrector en tensiones principales desviadoras

Tal lo indicado en la Sección 3.3 el modelo propuesto en esta monografía para modelar elastómeros descompone la deformación en sus partes volumétrica y desviadora, ecuación (3.27), asignando a la parte volumétrica un comportamiento totalmente elástico. La parte desviadora es considerada con modelos viscoelásticos y elastoplásticos según las proporciones de caucho y de partículas en el compuesto, ecuación (3.34). Se implementa aquí la parte elastoplástica del modelo, combinando la ecuación (3.27) con la (3.141), esto es, considerando un gradiente de deformación de la forma  $\mathbf{F} = (J^{1/3}\mathbf{I})\bar{\mathbf{F}}^e\bar{\mathbf{F}}^p$ , donde  $\bar{\mathbf{F}}^e$  y  $\bar{\mathbf{F}}^p$  son respectivamente las componentes elástica y plástica de la parte desviadora del gradiente de deformación.

A efectos de obtener un algoritmo predictor-corrector idéntico al utilizado en plasticidad con deformaciones infinitesimales, se procede de la siguiente forma:

En primer lugar se determina un estado elástico de prueba, para un incremento prescrito de deformaciones en el intervalo de tiempo  $[t_n, t_{n+1}]$ . Este predictor elástico supone que las deformaciones plásticas  $\bar{\mathbf{F}}^p$  quedan fijas en el tiempo  $t_n$ ,

$$\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{e\ tr} = \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^e \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^{e\ T} = \bar{\mathbf{F}}_{n+1} \bar{\mathbf{C}}_n^{p-1} \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^T \quad (3.164)$$

Después de una descomposición espectral de  $\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{e\ tr}$  los estiramientos logarítmicos principales elásticos son definidos como

$$\bar{\epsilon}_A^{e\ tr} = \log[\bar{\lambda}_A^{e\ tr}], \quad \text{con} \quad A = 1, 2, 3 \quad (3.165)$$

La función energía de deformación, ecuación (3.142), se particulariza para la parte desviadora de la deformación, ecuación (3.33), eligiendo una forma desacoplada cuadrática en estiramientos logarítmicos principales,

$$\bar{W}_{ep}(\bar{\epsilon}_A^e, \xi) = \mu[\bar{\epsilon}^e \cdot \bar{\epsilon}^e] + K(\xi) \quad (3.166)$$

donde  $K(\xi)$  es una función caracterizando el endurecimiento isótropo en la respuesta del material.

Las tensiones principales desviadoras  $\beta$  generadas por las deformaciones logarítmicas  $\bar{\epsilon}^e$  y asociadas con el modelo cuadrático (3.166),  $\beta = \partial_\epsilon \bar{W}_{ep}(\bar{\epsilon}_A^e, \xi)$ , son

$$\beta_{n+1}^{tr} = 2\mu\bar{\epsilon}_{n+1}^{tr} \quad (3.167)$$

Estas tensiones principales  $\beta_{n+1}^{tr}$  corresponden al estado de prueba. Si  $\phi(\beta_{n+1}^{tr}, \mathbf{q}_n) \leq 0$ , el incremento deformación-tensión es puramente elástico, por lo tanto,

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{tr} \quad (3.168)$$

En caso contrario,  $\phi(\beta_{n+1}^{tr}, \mathbf{q}_n) > 0$ , las tensiones  $\beta_{n+1}^{tr}$  son proyectadas sobre el dominio elástico definiendo las tensiones reales  $\beta_{n+1}^e$  en cada punto del material.

Multiplicando ambos lados de la igualdad (3.163) por  $2\mu$  se obtiene un algoritmo en tensiones principales,

$$\beta_{n+1}^e = \beta_{n+1}^{tr} - \Delta\gamma 2\mu\partial_\beta\phi(\beta, \mathbf{q}) \quad (3.169)$$

Para definir el dominio elástico se utiliza el criterio de fluencia de Von Mises, que es escrito en su forma clásica,

$$\phi(\boldsymbol{\tau}, \xi) = \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\| - \sqrt{\frac{2}{3}}[\sigma_Y + K'(\xi)] \leq 0 \quad (3.170)$$

donde  $\sigma_Y$  es la tensión de fluencia,  $\xi$  es la deformación plástica equivalente,  $\|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\|$  es la raíz cuadrada del invariante  $J_2$  del tensor de tensiones de Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}$ . De esta manera, las tensiones  $\beta$  en (3.169) se expresan como

$$\beta_{n+1} = \beta_{n+1}^{tr} - 2\mu\Delta\gamma\nu_{n+1} \quad (3.171)$$

siendo  $\nu$  el vector unitario normal al cilindro de Von Mises en el espacio de tensiones principales

$$\nu_{n+1} = \beta_{n+1} / \|\beta_{n+1}\|, \quad \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\| = \|\beta\| \quad (3.172)$$

y de la ecuación (3.155),

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma, \quad \Delta\gamma \geq 0 \quad (3.173)$$

De la condición de consistencia,  $\phi_{n+1} = 0$ , se obtiene la ecuación para  $\Delta\gamma \geq 0$  durante el proceso de carga plástico

$$\phi_{n+1} = \phi_{n+1}^{tr} - 2\mu\Delta\gamma - \sqrt{\frac{2}{3}}[K'(\xi_n + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma) - K'(\xi_n)] = 0 \quad (3.174)$$

Endurecimiento cinemático puede ser incorporado al modelo considerando un criterio de fluencia de Von Mises con la siguiente forma

$$\phi(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = \|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\xi}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}[\sigma_Y + K'(\boldsymbol{\xi})] \leq 0 \quad (3.175)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}$  representa el vector de valores principales del tensor back-stress

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \boldsymbol{\xi}_n + \frac{2}{3}\Delta\gamma H \boldsymbol{\nu}_{n+1} \quad (3.176)$$

siendo  $H$  el modulo de endurecimiento cinemático. La normal al cilindro de Von Mises,  $\boldsymbol{\nu}$ , resulta entonces

$$\boldsymbol{\nu}_{n+1} = \partial_{\boldsymbol{\beta}}\phi_{n+1} = \frac{\boldsymbol{\zeta}_{n+1}}{\|\boldsymbol{\zeta}_{n+1}\|} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\xi} \quad (3.177)$$

Y la ecuación (3.174) se expresa como

$$\phi_{n+1}^{tr} - 2\mu\Delta\gamma[1 + \frac{H}{3\mu}] - \sqrt{\frac{2}{3}}[K'(\xi_n + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma) - K'(\xi_n)] = 0 \quad (3.178)$$

Resuelta la ecuación (3.171) y utilizando la (3.167) el estado de deformación logarítmico es conocido. El tensor elástico final  $\mathbf{b}^e$ , que será utilizado en el cálculo del tensor de deformaciones plástico  $\mathbf{C}^p$  en (3.164), se obtiene mediante un algoritmo exponencial (Salomón et al. 1998)

$$\bar{\mathbf{b}}^e = \sum_{A=1}^3 \bar{\lambda}_A^e \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A, \quad \bar{\lambda}_A^e = \exp(\bar{\epsilon}_A), \quad \bar{\mathbf{C}}^p{}^{-1} = \bar{\mathbf{F}}^{-1} \bar{\mathbf{b}}^e \bar{\mathbf{F}}^{-t} \quad (3.179)$$

### Preservación de los cambios de volumen

La descomposición del gradiente de deformación en sus partes desviadora y volumétrica,  $\mathbf{F} = (J^{1/3}\mathbf{I})\bar{\mathbf{F}}^e\bar{\mathbf{F}}^p$ , junto con la ecuación (3.164) condicionan un predictor elástico con preservación de los cambios de volumen,  $\det[\mathbf{b}_t^{tr}] = 1$ . Y, si en la expresión del corrector plástico, ecuación (3.155), se opera con determinantes a ambos lados de la igualdad, se obtiene

$$\begin{aligned}\det[\mathbf{b}_t^e] &= \det[\exp[-2\Delta\gamma\partial_\tau\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})]] \det[\mathbf{b}_t^{tr}] \\ &= \exp[-2\Delta\gamma \operatorname{tr}[\partial_\tau\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})]] \det[\mathbf{b}_t^{tr}]\end{aligned}\quad (3.180)$$

Si en esta ecuación,

$$\operatorname{tr}[\partial_\tau\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})] = 0 \quad \rightarrow \quad \det[\mathbf{b}_t^e] = \det[\mathbf{b}_t^{tr}] \quad (3.181)$$

Por lo tanto, para criterios de fluencia insensibles a la presión,  $\operatorname{tr}[\partial_\tau\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})] = 0$ , el esquema predictor-corrector aquí planteado preserva exactamente los cambios de volumen, independientemente de la magnitud de deformaciones.

### Tensor constitutivo elastoplástico

Las relaciones tensión-deformación en ejes principales asociadas con un modelo elástico cuadrático, se expresan como

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{a}\boldsymbol{\epsilon} \quad \text{con} \quad \mathbf{a} = \kappa\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu[\mathbf{I}_3 - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \quad (3.182)$$

donde  $\kappa = \lambda + 2/3\mu$  es el modulo volumétrico,  $\lambda > 0$  y  $\mu > 0$  son las constantes de Lamme y  $\mathbf{I}_3$  es un tensor identidad de orden 3. Al considerar que la parte volumétrica de la deformación responde a un comportamiento elástico, en esta sección solo se trata con la parte desviadora del tensor  $\mathbf{a}$ , quedando este reducido a

$$\bar{\mathbf{a}} = 2\mu[\mathbf{I}_3 - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}]$$

Este tensor responde al predictor elástico, su correspondiente elastoplástico  $\bar{\mathbf{a}}^{ep}$  asociado con el algoritmo predictor-corrector toma la forma (Simo 1992)

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}}_{n+1}^{ep} &= 2\mu[s_{n+1}(\mathbf{I}_3 - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - \delta_{n+1}(\boldsymbol{\nu}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\nu}_{n+1})] \\ \text{con} \quad s_{n+1} &= 1 - \frac{2\mu\Delta\gamma}{\|\boldsymbol{\zeta}_{n+1}^{tr}\|} \quad \text{y} \quad \delta_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{K''+H}{3\mu}} - \frac{2\mu\Delta\gamma}{\|\boldsymbol{\zeta}_{n+1}^{tr}\|}\end{aligned}\quad (3.183)$$

donde  $\boldsymbol{\nu}_{n+1}$  y  $\boldsymbol{\zeta}$  fueron dados por la ecuación (3.177)

La forma general de un tensor constitutivo (hiper)elástico en la configuración espacial, asociado a una descomposición espectral del tensor de deformaciones  $\mathbf{b}$  tal como la indicada en la ecuación (3.156), fue dada en la Sección 3.4.2 por las ecuaciones (3.88-3.90). De acuerdo con la ecuación (3.161) las direcciones principales  $\mathbf{n}_A$  de la configuración elástica final coinciden con las direcciones principales del estado elástico predictor  $\mathbf{n}_A^{tr}$ , por lo tanto, los tensores de rango dos,  $\mathbf{m}_A = \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A$ , y rango cuatro,  $\mathbf{m}_A \otimes \mathbf{m}_B$ , formados con el producto tensorial de estas direcciones principales  $\mathbf{n}_A$  resultan independientes del criterio de fluencia adoptado y, en consecuencia, el tensor constitutivo elastoplástico viene dado por

$$\bar{\mathbf{c}}^{ep} = \sum_{A=1}^3 \sum_{B=1}^3 \bar{a}_{AB}^{ep} \mathbf{m}_A^{tr} \otimes \mathbf{m}_B^{tr} + 2 \sum_{A=1}^3 \beta_A \frac{\partial \mathbf{m}_A}{\partial \mathbf{g}} \quad (3.184)$$

Una forma explícita de  $\partial_{\mathbf{g}} \mathbf{m}_A$  fue dada en la ecuación (3.89). Las tensiones principales  $\beta_A$  se obtienen de la ecuación (3.171) y los coeficientes  $\bar{a}_{AB}^{ep}$  de la (3.183).



# 4

## MODELIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA

### 4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se desarrolla la modelización de las estructuras apoyadas sobre los dispositivos de aislamiento sísmico cuyas características son descritas en el Capítulo 2. Estas estructuras pueden ser de cualquier tipo y destinadas a cualquier función, por ejemplo plantas nucleares (SMiRT11 1991), pero en esta monografía se limita la modelización a edificios formados por estructuras de pórticos de hormigón armado.

En el Capítulo 3 se han tratado modelos constitutivos hiperelásticos destinados a modelar la componente elastomérica de los dispositivos de apoyo y por lo tanto se ha trabajado en grandes deformaciones. Las estructuras de hormigón armado apoyadas sobre estos dispositivos pueden presentar grandes desplazamientos pero no grandes deformaciones, por lo que en este capítulo se tratan modelos constitutivos elastoplásticos con degradación y/o viscosidad particularizados para pequeñas deformaciones, para ser aplicados a materiales friccionales, tales como el hormigón y para materiales metálicos elastoplásticos como el acero. Estos modelos constitutivos son analizados en la Sección 4.2

El hormigón presenta un comportamiento complejo con respuestas muy distintas a esfuerzos de compresión y tracción, con degradación de rigidez por microfisuración y otros fenómenos que hacen de los modelos de daño continuo una alternativa válida para la modelación numérica de su comportamiento. El acero, por otra parte, ha sido estudiado ampliamente como material estructural, siendo los modelos de comportamiento elastoplásticos los más aceptados para obtener una buena aproximación numérica a su comportamiento; elasticidad lineal para

deformaciones inferiores a la tensión de fluencia y plasticidad de Von Mises para deformaciones superiores al límite elástico.

Los pórticos se modelan utilizando elementos de barra de Timoshenko, por lo que en los apartados siguientes se analizan estos elementos y su discretización espacial. La sección transversal de estas barras se discretiza en capas, estando las capas internas compuestas por un único material, hormigón, y las capas externas por dos materiales, hormigón y acero. Para modelar adecuadamente estas últimas se utiliza la teoría de mezclas que permite el trabajo en conjunto de los modelos constitutivos destinados a materiales friccionales con aquellos destinados al acero.

En la Sección 4.5 se trata de cuantificar el daño global que puede sufrir la estructura a causa de una acción sísmica. El daño en un edificio puede ser de dos tipos: estructural, que se produce en elementos que forman parte del sistema resistente y no estructural, que ocurre en los elementos que no forman parte del sistema resistente principal, incluyendo el daño arquitectónico o en los sistemas mecánicos, eléctricos, sanitarios así como en su contenido. El daño estructural depende del comportamiento de los elementos del esquema resistente, vigas, columnas, muros de corte, sistemas de piso, etc. y puede cuantificarse mediante un índice de daño global, asociado a estos elementos o a toda la estructura en conjunto, a partir de las contribuciones de índices de daño local en los distintos puntos de la estructura. El daño local se expresa mediante un índice que mide en forma objetiva la degradación de rigidez que sufre un punto material de un sólido sometido a acciones externas.

A efectos de analizar el comportamiento conjunto estructura-sistema de aislamiento de base es necesario el desarrollo de un elemento de conexión entre los elementos de barra, utilizados en la discretización de los pórticos, y los elementos de estado plano, utilizados en la discretización de la base y dispositivos de aislamiento sísmico. Este elemento de conexión se analiza en la Sección 4.6.

## 4.2 MODELOS CONSTITUTIVOS DE DEGRADACIÓN-PLASTICIDAD-VISCOSIDAD

En esta sección se presentan las bases de un modelo constitutivo que trata de una manera unificada los fenómenos de plasticidad, degradación y viscosidad elástica, que ocurren a la vez en un punto del sólido. Dicho modelo es apropiado para describir el comportamiento de geomateriales y metales en pequeñas deformaciones.

Cuando se trabaja en pequeñas deformaciones las configuraciones de referencia y deformada resultan próximas y, tal lo señalado en el Apéndice, los tensores de deformación  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{e}$  en estas configuraciones resultan aproximadamente iguales,  $\mathbf{E} \approx \mathbf{e} \approx \boldsymbol{\epsilon}$ , ecuación (A.41). De forma análoga, en este capítulo no se hacen

diferencias entre tensores de tensión en una u otra configuración, utilizando la nomenclatura  $\sigma$  para identificar tensiones (Cauchy).

La ecuación constitutiva y la disipación se obtienen en forma estándar (Oller 1989, Lubliner 1990, Luccioni 1993), verificando el cumplimiento de la desigualdad de Clasius-Duhem para problemas térmicamente estables, véanse las Secciones 3.2.1 y 3.2.3. Es decir, que dada una forma de la energía libre de Helmholtz  $\psi(\epsilon^e, \dot{\epsilon}^e, \alpha^n, \beta^r)$ , y su variación  $\delta\psi = \partial_{\epsilon^e}\psi \delta\epsilon^e + \partial_{\dot{\epsilon}^e}\psi \delta\dot{\epsilon}^e + \partial_{\alpha^n}\psi \delta\alpha^n + \partial_{\beta^r}\psi \delta\beta^r$ , resulta la ley constitutiva y la expresión explícita de dicha disipación para problemas plásticos y/o degradación y/o viscoelásticos

$$\sigma = m \frac{\partial\psi(\epsilon^e, \dot{\epsilon}^e, \alpha^n, \beta^r)}{\partial\epsilon^e} \quad (4.1)$$

$$\delta\Xi_m = \delta\Xi_m^p + \delta\Xi_m^{np} = \underbrace{\frac{\sigma}{m} \delta\epsilon^p - \frac{\partial\psi}{\partial\alpha^n} \delta\alpha^n - \frac{\partial\psi}{\partial\beta^r} \delta\beta^r}_{\delta\Xi_m^d} - \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\epsilon}^e} \delta\dot{\epsilon}^e}_{\delta\Xi_m^{vi} \equiv \delta\Xi_m^{dt}} \geq 0 \quad (4.2)$$

En esta última ecuación  $(\cdot)^p$ ,  $(\cdot)^d$ ,  $(\cdot)^{np}$ ,  $(\cdot)^{vi}$ ,  $(\cdot)^{it}$  y  $(\cdot)^{dt}$  representan las contribuciones plásticas, de daño, no plásticas, viscosas, independiente del tiempo y dependiente del tiempo, respectivamente, de la disipación mecánica  $\delta\Xi_m$ ;  $\psi$  es la energía libre de Helmholtz,  $\epsilon^e$  es la deformación elástica adoptada como variable libre del problema,  $\sigma$  es el tensor de tensiones de Cauchy,  $\alpha^n$  es el grupo de  $n$  variables internas plásticas,  $\beta^r$  es el grupo de  $r$  variables internas no plásticas (degradación) y  $m$  es la densidad del material.

#### 4.2.1 Energía libre y deformación

Para el caso particular que aquí se presenta, se escribe la energía libre como la suma de una parte correspondiente al fenómeno elástico más otra independiente, correspondiente al fenómeno plástico, lo que se denomina *elasticidad desacoplada*

$$\psi(\epsilon^e, \dot{\epsilon}^e, \alpha^n, \beta^r) = \overbrace{\frac{1}{2m} \epsilon^e : C^s(\beta^r) : \epsilon^e + \frac{\tau}{m} \epsilon^e : C^s(\beta^r) : \dot{\epsilon}^e}^{\psi^e(\epsilon^e, \beta^r)} + \psi^p(\alpha^n) \quad (4.3)$$

donde  $\epsilon^e$  y  $\dot{\epsilon}^e$  son el tensor de deformaciones elástico y su velocidad, respectivamente. Sus relaciones con la deformación total y con su variación temporal vienen dadas por la clásica forma aditiva:  $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$  y  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$ , respectivamente y

$C^s$  el tensor constitutivo secante que depende de la variable interna no plástica, denominada variable de degradación, de la siguiente manera:

$$C^s \equiv C^s(\beta^r) = f(\beta^r) C^o \quad (4.4)$$

donde  $C^o$  es la rigidez constitutiva inicial de un material no degradado y  $f(\beta^r)$  es una función de transformación entre el espacio real degradado y el ficticio no degradado (Oller, Oñate, Oliver & Lubliner 1990). La expresión más simple para la función  $f(\beta^r)$  coincide con la forma de degradación isótropa propuesta por Kachanov (1958) como  $f(\beta^r) = (1 - d)_{r=1}$  y en este caso  $d \equiv \{\beta^r\}$ . Nótese que en adelante el superíndice  $s$  representará las variables en la configuración degradada.

#### 4.2.2 Función de fluencia, potencial y variables internas para el problema puramente plástico

Las funciones de fluencia y potencial se expresan como funciones homogéneas de primer grado en tensiones

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^s(\boldsymbol{\sigma}, \alpha^n) &= f^s(\boldsymbol{\sigma}, \phi) - c(\kappa^p) = 0 \\ \mathcal{G}^s(\boldsymbol{\sigma}, \alpha^n) &= g^s(\boldsymbol{\sigma}, \phi) = \mathcal{K} \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde  $c$  y  $\phi$  representan la cohesión y la fricción interna si se trata de un geomaterial, respectivamente. Si se trata de metales,  $c$  es la resistencia a tensiones tangenciales, en tanto que la fricción interna es nula. Ejemplos de estas funciones son las de Tresca o de Von Mises para metales y de Mohr-Coulomb o Drucker-Prager para geomateriales.

La definición de la ley de evolución de las variables internas plásticas se obtiene a partir de una extensión conceptual de la definición de la regla de evolución de la deformación plástica

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\epsilon}^p &= \delta \lambda \mathbf{R}^s(\boldsymbol{\sigma}, \alpha^n) = \delta \lambda \frac{\partial \mathcal{G}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \delta \alpha_i^n &= \delta \lambda H_i^s(\boldsymbol{\sigma}, \alpha^n) = \delta \lambda [\mathbf{h}_i^s(\boldsymbol{\sigma}, \alpha^n) : \mathbf{R}^s(\boldsymbol{\sigma}, \alpha^n)] \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde la variación del factor de consistencia plástica  $\delta \lambda$  resulta de la propia condición de consistencia y el tensor  $\mathbf{h}_i^s$  debe ser definido para cada variable interna que se quiera introducir al modelo.

### 4.2.3 Función límite de degradación y ley de evolución de las variables internas para el problema puramente de degradación

Se define una función límite escalar para activar la degradación (Simo & Ju 1987, Oliver, Cervera, Oller & Lubliner 1990) en la siguiente forma:

$$\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^r(\beta^r) = 0 \quad \text{o} \quad \mathcal{G}^D(\bar{\sigma}, \beta^r) = g(\bar{\sigma}) - g(\beta^r) = 0 \quad (4.7)$$

donde  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^o)$  es una función de tensión equivalente,  $\boldsymbol{\sigma}^o = \mathbf{C}^o : \boldsymbol{\epsilon}$  es el predictor de tensiones no degradadas,  $g(\cdot)$  es una función escalar positiva con derivada positiva a definir. En este caso particular  $g(\bar{\sigma})$  define la función de degradación y  $g(\beta^r) \equiv g(\bar{\sigma}^r(\beta^r))$  define el umbral de degradación en función de la resistencia uniaxial  $\bar{\sigma}^r(\beta^r)$  que puede interpretarse como función de endurecimiento de degradación.

La ley de evolución para las variables internas de degradación se define de la siguiente forma:

$$\delta\beta^r = \delta\mu \left( \frac{\partial \mathcal{G}^D}{\partial \bar{\sigma}} \right)_r = \underbrace{\left\langle \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^o} : \mathbf{C}^o : \delta\boldsymbol{\epsilon} \right\rangle}_{\langle \delta\bar{\sigma} \rangle} \left( \frac{\partial \mathcal{G}^D}{\partial \bar{\sigma}} \right)_r \quad (4.8)$$

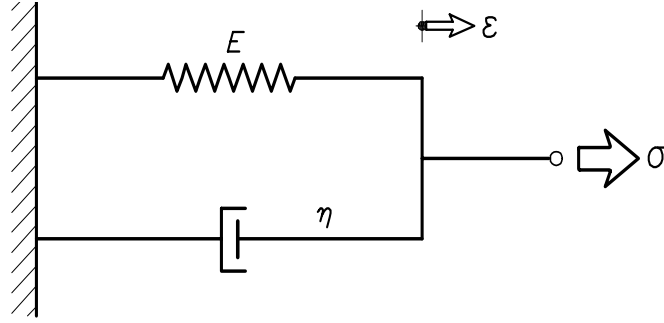
donde  $\delta\mu$  resulta de la condición de consistencia de degradación  $\delta\mathcal{G}^D = 0$ . Más detalles pueden encontrarse en las referencias Simo & Ju (1987), Oliver et al. (1990), Luccioni (1993) y Hanganu, Barbat, Oller & Oñate (1994).

### 4.2.4 Definición de la variable viscosa del material

El amortiguamiento proporcional a la rigidez de la estructura puede incorporarse a la formulación que simula el comportamiento de una estructura mediante el concepto de amortiguamiento viscoso de Kelvin (véase la figura 4.1), tratado a nivel de un punto material del sólido.

En este modelo, el estado tensional puede descomponerse aditivamente  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{it} + \boldsymbol{\sigma}^{dt}$  como lo muestra la ecuación (4.38) y, por lo tanto, se inserta dentro del tratamiento mecánico que se está realizando. Todas las características del modelo independiente en el tiempo  $(\cdot)^{it}$  han sido puntualizadas en subapartados anteriores, quedando ahora por definir las correspondientes al modelo dependiente del tiempo  $(\cdot)^{dt}$ . Para este propósito se hace una analogía con el comportamiento uniaxial viscoso del material y se admite, en este caso particular, un amortiguamiento proporcional a la rigidez del material

$$\tau = \frac{\eta}{E^o} \quad (4.9)$$



**Figura 4.1** Presentación esquemática del modelo de Kelvin para materiales elasto-plásticos.

En problemas de *elasticidad retardada* donde la variable libre es la tensión (o su equivalente deformación elástica),  $\tau$  es el *tiempo de retardo*, es decir, el tiempo que tarda el punto del sólido en alcanzar una configuración estable. Por el contrario, en problemas donde la variable libre es la deformación,  $\tau$  es el *tiempo de relajación*, es decir, el tiempo que tarda el punto del sólido en relajar el estado tensional impuesto. Por otro lado  $\eta$  es la viscosidad del material y  $E^o$  el módulo de Young al iniciar el proceso de carga.

#### 4.2.5 Ecuación constitutiva secante y tangente para el problema acoplado

Sustituyendo la energía libre de la ecuación (4.3), en la ecuación (4.1), se deduce la siguiente ecuación constitutiva secante (Oller 1989, Luccioni 1993):

$$\sigma = m \frac{\partial \psi(\epsilon^e, \dot{\epsilon}^e, \alpha^n, \beta^r)}{\partial \epsilon^e} = \underbrace{C^s(\beta^r) : \epsilon^e}_{\sigma^{it}} + \underbrace{\tau C^s(\beta^r) : \dot{\epsilon}^e}_{\sigma^{dt}} = f(\beta^r) C^o : [\epsilon^e + \tau \dot{\epsilon}^e] \quad (4.10)$$

siendo  $\sigma^{dt} = \tau C^s(\beta^r) \dot{\epsilon}^e$  la denominada ley de Newton. La forma tangente de la ecuación (4.10) resulta de tomar la variación de la tensión total secante

$$\begin{aligned} \delta \sigma &= [\delta C^s(\beta^r) : \epsilon^e + C^s(\beta^r) : \delta \epsilon^e] + \tau [\delta C^s(\beta^r) : \dot{\epsilon}^e + C^s(\beta^r) : \delta \dot{\epsilon}^e] = \\ &= \left\{ \underbrace{\sum_r \frac{\partial C^s(\beta^r)}{\partial \beta^r} \delta \beta^r}_{\delta f(\beta^r) C^o} \underbrace{(\epsilon^e + \tau \dot{\epsilon}^e)}_{C^{s-1} : \sigma} \right\} + \left\{ C^s(\beta^r) : [(\delta \epsilon - \delta \epsilon^p) + \tau (\delta \dot{\epsilon} - \delta \dot{\epsilon}^p)] \right\} \quad (4.11) \end{aligned}$$

Sustituyendo en esta última las ecuaciones (4.4) y (4.10), se tiene

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\sigma} &= \delta f(\beta^r)\mathbf{C}^o : \left[ \frac{1}{f(\beta^r)}\mathbf{C}^{o-1} : \boldsymbol{\sigma} \right] + \mathbf{C}^s(\beta^r) : [(\delta\boldsymbol{\epsilon} - \delta\boldsymbol{\epsilon}^p) + \tau(\delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)] \\ &= \frac{\delta f(\beta^r)}{f(\beta^r)}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{C}^s(\beta^r) : [(\delta\boldsymbol{\epsilon} - \delta\boldsymbol{\epsilon}^p) + \tau(\delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)]\end{aligned}\quad (4.12)$$

Operando algebraicamente y sustituyendo en esta última la ecuación de la variación de la función de degradación que resulta de la ecuación (4.8)

$$\delta f(\beta^r) = \sum_r \frac{\partial f(\beta^r)}{\partial \beta^r} \delta \beta^r = \left[ \sum_r \frac{\partial f(\beta^r)}{\partial \beta^r} \left( \frac{\partial \mathcal{G}^D}{\partial \bar{\sigma}} \right)_r \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma^o} : \mathbf{C}^o \right] : \delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{T} : \delta \boldsymbol{\epsilon}$$

queda la siguiente expresión para la forma tangente:

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\sigma} &= \frac{\mathbf{T} : \delta\boldsymbol{\epsilon}}{f(\beta^r)}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{C}^s(\beta^r) : \delta\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{C}^s(\beta^r) : \delta\boldsymbol{\epsilon}^p + \tau\mathbf{C}^s(\beta^r) : \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \tau\mathbf{C}^s(\beta^r) : \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \\ &= \underbrace{\left[ \frac{\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{T}}{f(\beta^r)} + \mathbf{C}^s(\beta^r) \right]}_{\mathbf{C}^e(\beta^r)} : \delta\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{C}^s(\beta^r) : \delta\boldsymbol{\epsilon}^p + \tau\mathbf{C}^s(\beta^r) : \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \tau\mathbf{C}^s(\beta^r) : \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p\end{aligned}\quad (4.13)$$

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{C}^e(\beta^r) : \delta\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{C}^s(\beta^r) : \delta\boldsymbol{\epsilon}^p] + \tau[\mathbf{C}^s(\beta^r)\delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{C}^s(\beta^r) : \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p]$$

donde  $\mathbf{C}^e(\beta^r)$  es un tensor de cuarto orden que contiene los cambios que producen la degradación de rigidez. Además, cuando no hay daño el tensor  $\mathbf{T}$  es idénticamente nulo y resulta  $\mathbf{C}^e \equiv \mathbf{C}^s$ .

Usando la condición de consistencia plástica y de consistencia de degradación, se obtiene la siguiente expresión para la ley constitutiva tangente:

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{C}}^{ep}(\beta^r) : \delta\boldsymbol{\epsilon} + \tau\mathbf{C}^{ep}(\beta^r) : \delta\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\quad (4.14)$$

donde:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{C}}^{ep}(\beta^r) &= \mathbf{C}^e - \frac{\left[ \mathbf{C}^s : \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \right] \otimes \left[ \mathbf{C}^e : \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \right]}{-\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{F}^s}{\partial \alpha^n} \mathbf{h}_n \frac{\partial \mathcal{G}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + \left[ \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} : \mathbf{C}^s : \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \right]} \\ \mathbf{C}^{ep}(\beta^r) &= \mathbf{C}^s - \frac{\left[ \mathbf{C}^s : \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \right] \otimes \left[ \mathbf{C}^s : \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \right]}{-\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{F}^s}{\partial \alpha^n} \mathbf{h}_n \frac{\partial \mathcal{G}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + \left[ \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} : \mathbf{C}^s : \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}^s}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \right]}\end{aligned}\quad (4.15)$$

Cuando no hay daño  $\tilde{C}^{ep} \equiv C^{ep}$ .

Esta formulación isótropa resulta de la evolución de otros modelos que pueden ser consultados en las referencias: Lubliner, Oliver, Oller & Oñate (1989), Oller (1989), Oller et al. (1990), Oliver et al. (1990) y Luccioni (1993). Una extensión para el tratamiento anisótropo puede ser consultada en las referencias Luccioni (1993) y Oller, Botello, Miquel & Oñate (1995).

### 4.3 TEORÍA DE MEZCLAS

Como se mencionó anteriormente, en esta monografía se supone que las estructuras soportadas por los dispositivos de aislamiento están formadas por pórticos de hormigón armado y estos se modelan utilizando elementos de barra. La sección transversal de estas barras se discretiza con capas, estando las capas internas compuestas por un único material, hormigón, y las capas externas compuestas por dos materiales, hormigón y acero. Para modelar adecuadamente estas últimas se presenta a continuación una teoría de mezclas.

Micro y macro-modelos son las dos alternativas para el estudio del comportamiento mecánico de materiales compuestos. Los micro-modelos centran el estudio a nivel micro mecánico de la interacción entre átomos y la integridad del compuesto mas allá del punto límite de daño (Obraztsov & Vasilev 1982). Estos modelos pueden ser utilizados para la simulación de materiales compuestos pero resultan muy costosos a efectos prácticos. Los modelos macro-mecánicos representan el comportamiento constitutivo del compuesto como si fuera un único material.

La mayoría de los modelos macro-mecánicos están basados en una teoría de mezclas. Esto permite el estudio del comportamiento mecánico del compuesto como una combinación de varios componentes, los cuales deben satisfacer una ecuación de restricción. Esta ecuación establece la compatibilidad cinemática entre materiales componentes, y en el caso más simple asume compatibilidad perfecta entre los distintos componentes. Pero también puede incluir fenómenos mas complejos entre materiales tales como delaminación o cualquier otro comportamiento cinemático.

En esta monografía se utiliza un macro-modelo adecuado para el análisis de respuestas mecánicas no lineales de materiales compuestos (Oller, Oñate, Miquel & Botello 1996). El modelo está basado en la mezcla de sustancias componentes básicas y permite evaluar la inter-dependencia entre el comportamiento constitutivo de los diferentes materiales componentes. El comportamiento de cada componente es modelado mediante un modelo denominado aquí "modelo base". Los diferentes modelos base para cada componente son combinados utilizando teoría de mezclas para simular el comportamiento del material compuesto multifase.



Esta teoría está basada en el principio de interacción de las sustancias componentes y se dan por válidas las siguientes condiciones: a) cada volumen infinitesimal del compuesto es ocupado por un número finito de sustancias componentes; b) cada componente participa en el comportamiento del compuesto en forma proporcional a su volumen; c) todas las componentes están sometidas a las mismas deformaciones (ecuación de restricción) y d) el volumen ocupado por cada componente es mucho menor que el volumen total del compuesto. Las condiciones (b) y (c) implican una distribución homogénea de todas las componentes en una región del compuesto. La interacción entre las diferentes componentes, cada una definida por una ley constitutiva apropiada, conduce a un comportamiento constitutivo global del compuesto en términos del volumen porcentual ocupado por cada componente.

La teoría de mezclas ha sido estudiada en detalle por Trusdell & Toupin (1960) y luego por Green & Naghdi (1965). Años después Ortiz & Popov (1982) ha utilizado teoría de mezclas para proponer un modelo en dos fases destinado al análisis de hormigón.

Aquí la teoría de mezclas es utilizada para simular numéricamente un modelo constitutivo no lineal para materiales compuestos multifase. Cada fase puede tener un comportamiento general anisótropo definido por medio de un modelo isótropo equivalente (Oller, Oñate, Miquel & Botello 1996, Oller & Oñate 1996). Por simplicidad solo fases isótropas son consideradas en esta monografía. Esta teoría está basada en mecánica del continuo y permite la combinación simultánea de las diferentes respuestas constitutivas (elástica, elastoplástica, elasto-frágil, elástica con daño, etc.) de cada sustancia.

Se asume aquí que el comportamiento de cada sustancia del compuesto responde al modelo elastoplástico con daño descrito previamente (Sección 4.2), adecuado para el análisis de metales y geomateriales. Pero, obviamente, otras combinaciones son posibles.

La ecuación de restricción elegida está basada en asumir total compatibilidad inter-componentes, por lo tanto la siguiente compatibilidad en deformaciones es satisfecha:

$$(\epsilon_{ij})_1 = (\epsilon_{ij})_2 = \dots = (\epsilon_{ij})_c = \dots = (\epsilon_{ij})_n \equiv \epsilon_{ij} \quad (4.16)$$

En materiales compuestos la energía libre puede ser escrita como

$$\psi(\epsilon_{ij}^e, \theta, \alpha^m, \beta^r) = \psi\left(\epsilon_{ij}, \theta, \underbrace{\epsilon_{ij}^p, \alpha^m, \beta^r}_{p_s}\right) = \sum_{c=1}^n k_c \psi_c(\epsilon_{ij}, \theta, (p_s)_c) \quad (4.17)$$

donde  $\psi_c(\epsilon_{ij}, \theta, (p_s)_c)$  es la energía libre correspondiente a la componente  $c$  de la mezcla,  $\theta$  es la temperatura como variable libre del problema térmico,  $\alpha^m$  es un

grupo de  $m$  variables internas plásticas,  $\beta^r$  un grupo de  $r$  variables internas de daño,  $k_c = dV_c/dV$  es la fracción de volumen de esta sustancia y  $(p_s)_c$  es un grupo de variables internas de esta componente. Naturalmente, la variable  $k_c$  satisface la siguiente condición:

$$\sum_{c=1}^n k_c = 1 \quad (4.18)$$

La ecuación constitutiva secante para el compuesto se obtiene de la desigualdad de Clausius-Duhem (véase las Secciones 3.2.1 y 3.2.3), siguiendo igual procedimiento al utilizado para materiales de fase única, Sección 4.2, (Lubliner 1985b, Oller 1988, Lubliner et al. 1989).

$$\sigma_{ij} = m^0 \frac{\partial \psi(\epsilon_{pq}, \theta, p_r)}{\partial \epsilon_{ij}} = m^0 \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial \psi_c(\epsilon_{pq}, \theta, (p_r)_c)}{\partial \epsilon_{ij}} = \sum_{c=1}^n k_c (\sigma_{ij})_c \quad (4.19)$$

donde  $(\sigma_{ij})_c$  es el tensor de tensiones de Cauchy correspondiente a la sustancia  $c^{th}$ .

De la desigualdad de Clausius-Duhem, también se obtiene la siguiente expresión termodinámica para la disipación mecánica

$$\frac{\partial \psi(\epsilon_{pq}, \theta, p_r)}{\partial p_i} \dot{p}_i = \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial \psi_c(\epsilon_{pq}, \theta, (p_r)_c)}{\partial (p_i)_c} (\dot{p}_i)_c \geq 0 \quad (4.20)$$

De la ecuación (4.19) pueden ser derivadas las siguientes expresiones para el material compuesto:

Tensor constitutivo tangente,

$$\mathcal{C}_{ijkl} = m^0 \frac{\partial^2 \psi(\epsilon_{pq}, \theta, p_r)}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = m^0 \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial^2 \psi_c(\epsilon_{pq}, \theta, (p_r)_c)}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = \sum_{c=1}^n k_c (\mathcal{C}_{ijkl})_c \quad (4.21)$$

Tensor de dilatación térmica,

$$\alpha^{\theta}_{ij} = -m^0 \frac{\partial^2 \psi(\epsilon_{pq}, \theta, p_r)}{\partial \sigma_{ij} \partial \theta} = -m^0 \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial^2 \psi_c(\epsilon_{pq}, \theta, (p_r)_c)}{\partial \sigma_{ij} \partial \theta} = \sum_{c=1}^n k_c (\alpha^{\theta}_{ij})_c \quad (4.22)$$

La relación tensión-deformación se deriva de la condición de compatibilidad entre sustancias, ecuación (4.16), como:

$$(\epsilon_{ij})_c = \epsilon_{ij} = \underbrace{\left( \mathcal{C}_{ijkl}^{S-1}(\beta_s, \theta) \right)_c (\sigma_{kl})_c}_{(\epsilon_{ij}^e)_c} + (\epsilon_{ij}^p)_c + (\alpha^{\theta}_{ij})_c (\theta - \theta_o) \quad (4.23)$$

La ecuación constitutiva secante para el material compuesto, ecuación (4.19), se escribe como:

$$\sigma_{ij} = \sum_{c=1}^n k_c (\sigma_{ij})_c = \sum_{c=1}^n k_c (\mathcal{C}_{ijkl}^S(\beta_s, \theta))_c (\epsilon_{kl}^e)_c = \mathcal{C}_{ijkl}^S(\beta_s, \theta) \epsilon_{kl}^e \quad (4.24)$$

donde la deformación elástica para cada componente puede ser expresada como:  $(\epsilon_{ij}^e)_c = \epsilon_{ij} - (\epsilon_{ij}^p)_c - (\alpha^{\theta}_{ij})_c (\theta - \theta_o)$ ; y para el compuesto como:  $\epsilon_{ij}^e = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p - \alpha^{\theta}_{ij} (\theta - \theta_o)$ .

De la igualdad de la ecuación (4.24) y tomando en cuenta las ecuaciones (4.16) y (4.21), es posible escribir la deformación plástica total para el compuesto:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sum_{c=1}^n k_c (\mathcal{C}_{ijkl}^S(\beta_s, \theta))_c (\epsilon_{kl}^e)_c \\ &= \sum_{c=1}^n k_c (\mathcal{C}_{ijkl}^S(\beta_s, \theta))_c \epsilon_{kl} - \sum_{c=1}^n k_c (\mathcal{C}_{ijkl}^S(\beta_s, \theta))_c (\epsilon_{kl}^p)_c - \\ &\quad - \sum_{c=1}^n k_c (\mathcal{C}_{ijkl}^S(\beta_s, \theta))_c (\alpha^{\theta}_{ij})_c (\theta - \theta_o) \end{aligned}$$

y también de la ecuación (4.24):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \mathcal{C}_{ijkl}^S(\beta_s, \theta) \epsilon_{kl}^e \\ &= \mathcal{C}_{ijkl}^S(\beta_s, \theta) \epsilon_{kl} - \mathcal{C}_{ijkl}^S(\beta_s, \theta) \epsilon_{kl}^p - \mathcal{C}_{ijkl}^S(\beta_s, \theta) \alpha^{\theta}_{ij} (\theta - \theta_o) \end{aligned}$$

Igualando la parte derecha de las dos últimas ecuaciones se obtiene la deformación plástica para el material compuesto:

$$\epsilon_{ij}^p = \mathcal{C}_{ijpq}^{S-1}(\beta_s, \theta) \left\{ \sum_{c=1}^n k_c (\mathcal{C}_{pqrs}^S(\beta_s, \theta))_c \left[ (\epsilon_{rs}^p)_c + (\alpha^{\theta}_{rs})_c (\theta - \theta_o) \right] \right\} - \alpha^{\theta}_{ij} (\theta - \theta_o) \quad (4.25)$$

con

$$\left( \epsilon_{ij}^p \right)_c = \int_o^t \left( \dot{\epsilon}_{ij}^p \right)_c dt \quad ,y \quad \left( \dot{\epsilon}_{ij}^p \right)_c = \left( \dot{\lambda} \right)_c \frac{\partial (\mathcal{G}^S(\sigma_{rs}, \theta))_c}{\partial (\sigma_{ij})_c} \quad (4.26)$$

En la derivación de la ecuación (4.25) se utiliza la siguiente relación obtenida de las ecuaciones (4.16) y (4.21),

$$\mathcal{C}_{ijkl}^S(\beta_s, \theta) \epsilon_{kl} = \sum_{c=1}^n k_c (\mathcal{C}_{ijkl}^S(\beta_s, \theta))_c \epsilon_{kl} \quad (4.27)$$

Reemplazando la ecuación (4.27) en la (4.23) y utilizando la (4.24) es posible obtener el tensor de tensiones para cada fase como:

$$(\sigma_{ij})_c = (\mathcal{C}_{ijpq}^S(\beta_s, \theta))_c \left\{ \mathcal{C}_{pqkl}^{S-1}(\beta_s, \theta) \left[ \sum_{c=1}^n k_c (\mathcal{C}_{klrs}^S(\beta_s, \theta))_c \epsilon_{rs} \right] + \right. \\ \left. - (\epsilon_{pq}^p)_c - (\alpha_{pq}^\theta)_c (\theta - \theta_o) \right\} \quad (4.28)$$

La ecuación (4.28) da la distribución de tensiones para cada sustancia componente del compuesto multifase.

## 4.4 MODELO DE CAPAS EN VIGAS

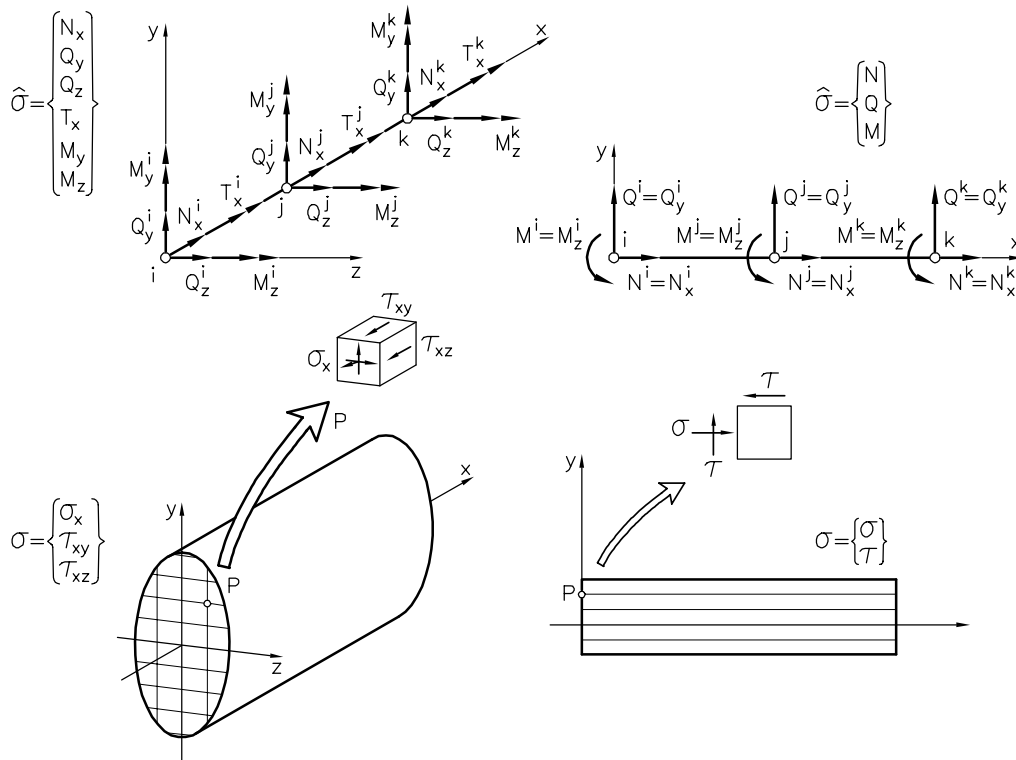
Los pórticos se modelan utilizando elementos de barra de Timoshenko, por lo que en los apartados siguientes se analizan estos elementos y su discretización espacial. En la implementación numérica se utilizan barras de Timoshenko en el plano con sección transversal discretizada por capas, pero a efectos de tener una idea global del planteo, el análisis teórico se realiza para el caso general tridimensional.

Las ecuaciones constitutivas destinadas a representar el comportamiento del material asignado a cada una de estas capas, así como la teoría de mezclas utilizada para modelar las capas que contienen dos materiales, hormigón y barras de acero, fueron derivadas en las secciones anteriores.

### 4.4.1 Discretización espacial

La estructura se modeliza con elementos finitos lagrangeanos  $C^0$  del tipo barra Timoshenko (Hughes, Taylor & Kanoknukulchai 1977), de tres nodos y seis grados de libertad por nodo para el caso tri-dimensional (3-D) y con tres grados de libertad por nodo para el caso bi-dimensional (2-D). El hecho de que el modelo constitutivo precise información del tensor de tensión y del de deformación a nivel de cada punto de integración, hace necesaria una discretización secundaria a nivel de la sección transversal del elemento de barra. Es decir que en el caso 3-D necesita una cuadrícula y en el 2-D es suficiente con una discretización por capas (véase la figura 4.2). Este procedimiento evita la formulación de leyes constitutivas en esfuerzos seccionales (momentos flectores, esfuerzos cortantes, esfuerzo axial y momento torsor), dado que las mismas suelen ser válidas sólo en ciertos casos particulares de comportamiento.

El desarrollo siguiente, enfocado para una barra de Timoshenko en 3-D, describe las relaciones existentes entre las variables puntuales y las seccionales. La barra se considera en un sistema local de coordenadas, con el eje  $x$  longitudinal formando con los otros dos ejes un triedro derecho tal como se indica en la



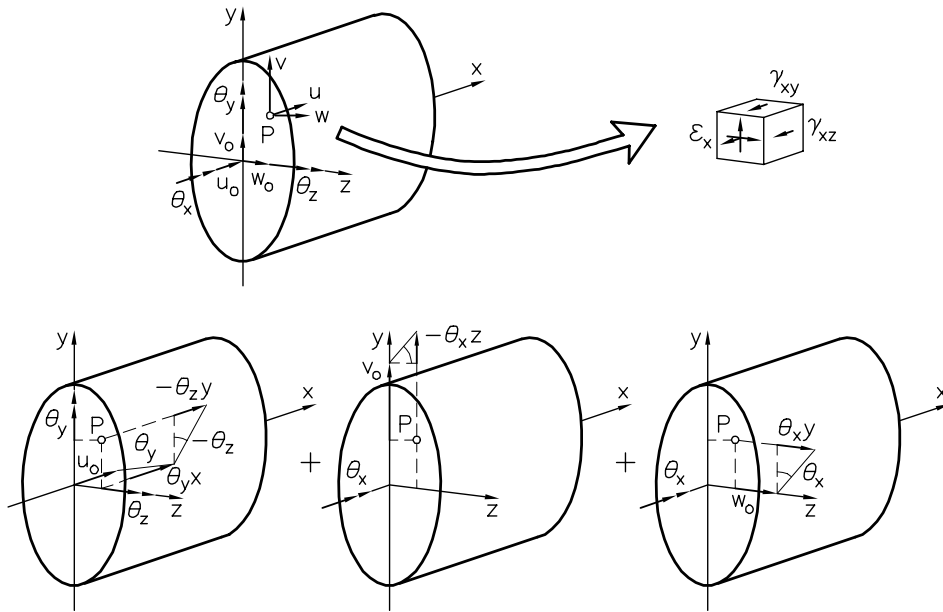
**Figura 4.2** Sub-discretización a nivel elemental del elemento barra de Timoshenko.

figura 4.2. La relación entre los campos de desplazamientos y de deformación, de acuerdo a los signos de la figura 4.3, es:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_o + z\theta_y - y\theta_z \\ v_o - z\theta_x \\ w_o + y\theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_o \\ v_o \\ w_o \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{du_o}{dx} + z \frac{d\theta_y}{dx} - y \frac{d\theta_z}{dx} \\ \frac{dv_o}{dx} - \theta_z - z \frac{d\theta_x}{dx} \\ \frac{dw_o}{dx} + \theta_y + y \frac{d\theta_x}{dx} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{u}}} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{du_o}{dx} \\ \frac{dv_o}{dx} - \theta_z \\ \frac{dw_o}{dx} + \theta_y \\ \frac{d\theta_x}{dx} \\ \frac{d\theta_y}{dx} \\ \frac{d\theta_z}{dx} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamientos de un punto  $P$  de la sección transversal;  $\boldsymbol{\epsilon}$  es la parte simétrica del tensor de deformaciones en el punto  $P$  del sólido;  $\hat{\mathbf{u}}$  es el vector de desplazamientos generalizado del elemento finito de barra, correspondiente al eje central de la sección;  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$  es el vector de deformaciones generalizadas seccionales;  $\mathbf{S}$  es la matriz geométrica que relaciona el campo de desplazamiento entre un punto del sólido y el correspondiente a una sección generalizada transversal que pasa por él.



**Figura 4.3** Esquema de relación entre el campo de desplazamiento y deformación.

#### 4.4.2 Ecuación de equilibrio dinámico

Considerando las leyes fundamentales de la termodinámica, brevemente resumidas en la Sección 3.2.1 y tratadas con más amplitud en las referencias clásicas de mecánica del continuo (Trusdell & Noll 1965, Malvern 1969, Gurtin 1981, Marsden & Hughes 1983), del *primer principio* puede obtenerse el siguiente **balance de potencia**

$$\dot{\Pi} = \mathcal{Q} + P_{in} \quad (4.31)$$

tal que para problemas isotérmicos la *potencia calórica* se hace nula  $\mathcal{Q} = 0$ , quedando el cambio temporal de *energía total interna*  $\dot{\Pi}$ , igual a la *potencia mecánica introducida*  $P_{in}$  e igual a

$$\dot{\Pi} = P_{in} = \oint_S \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS + \int_V m \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV \quad (4.32)$$

donde  $\mathbf{t}$  es la fuerza de superficie (siendo  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ , tal que  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones de Cauchy y  $\mathbf{n}$  el vector normal a la superficie  $S$  del sólido);  $\mathbf{b}$  son las fuerzas de volumen por unidad de masa;  $m = dM/dV$  es la masa volúmica aparente o densidad;  $\dot{\mathbf{u}}$  es el campo de velocidades (si  $t = cte.$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  se transforma en un incremento temporal del campo de los desplazamientos y la potencia introducida se transforma en el incremento temporal de trabajo introducido);  $M$  es la masa del sólido;  $V$  es el volumen del sólido y  $S$  la superficie que lo envuelve.

Sustituyendo las fuerzas de superficie por su expresión y transformando, a través del teorema de Green (Malvern 1969), la integral de superficie de la ecuación (4.32) en una integral sobre el volumen del sólido, queda expresado el *cambio temporal de energía total* como

$$\frac{d}{dt} (\Pi) = \frac{d}{dt} \int_V m \pi dV = P_{in} = \int_V \left[ \dot{\mathbf{u}} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{x}} + m \mathbf{b} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right] dV \quad (4.33)$$

siendo  $(\partial \boldsymbol{\sigma} / \partial \mathbf{x} + m \mathbf{b}) = m(\partial \dot{\mathbf{u}} / \partial t)$ , la ecuación de Cauchy; o, de otra forma, el equilibrio de potencias queda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V m \pi dV &= \int_V \left[ \dot{\mathbf{u}} \cdot m \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right] dV \\ &= \int_V \dot{\mathbf{u}} \cdot m \cdot \ddot{\mathbf{u}} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV = \oint_S \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS + \int_V m \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde  $\pi = k + w$  es la *densidad de energía total*, compuesta por la densidad de energía específica cinética  $k = 1/2 \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}$  más la densidad de energía específica

interna  $w$ . La ecuación (4.34) es una forma particular de escribir en forma integral la primera ley de la termodinámica o ecuación de conservación para el caso en que la potencia calórica sea nula.

Sustituyendo las ecuaciones (4.29) y (4.30) en la del equilibrio de potencias (4.34), resulta

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{u}} \cdot m \cdot \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{u}}) dV + \int_V (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{S} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}) dV = \\ & = \oint_S (\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{u}}) dS + \int_V (m \hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{u}}) dV \end{aligned}$$

tal que aplicando esta ecuación al dominio de la barra de Timoshenko, se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{\ell} \hat{\mathbf{u}} \left( \underbrace{\int_{\mathcal{A}} \mathbf{S} \cdot m \cdot \mathbf{S} d\mathcal{A}}_{\hat{\mathbf{m}}} \right) \cdot \hat{\mathbf{u}} dl + \int_{\ell} \left( \underbrace{\int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S} d\mathcal{A}}_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} \right) : \hat{\boldsymbol{\epsilon}} dl = \\ & = \int_{\ell} (\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{u}}) dl + \int_{\ell} (m \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{u}}) dl \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma} = \{ \sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \}^T$  es la parte simétrica del tensor de tensiones ya simplificado para estructuras de barra,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{ N_x \quad Q_y \quad Q_z \quad T_x \quad M_y \quad M_z \}^T$  es el vector de esfuerzos seccionales correspondiente al conjugado energético del vector de deformaciones seccionales  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ ,  $\hat{\mathbf{m}}$  la matriz de densidad seccional que relaciona las fuerzas seccionales inerciales con el vector de aceleraciones  $\hat{\mathbf{u}}$ ,  $\ell$  la longitud de la barra y  $\mathcal{A}$  la sección transversal de la misma.

Si se define una función polinomial de soporte local  $\mathbf{N}(x)$  en el dominio  $0 \leq x \leq \ell$  para aproximar el campo de desplazamientos discreto generalizado  $\hat{\mathbf{U}}$  en la forma  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{U}}$ ;  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \cdot \hat{\dot{\mathbf{U}}}$ ;  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{U}}$  y se sustituye esta aproximación en la ecuación (4.35), se obtiene la siguiente expresión de potencias para el sólido discretizado:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{V}} \cdot \left[ \int_{\ell} \mathbf{N} \hat{\mathbf{m}} \mathbf{N} dl \right] \cdot \hat{\dot{\mathbf{U}}} + \left[ \int_{\ell} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \hat{\mathbf{B}} dl \right] \cdot \hat{\mathcal{V}} &= \left[ \int_{\ell} \hat{\mathbf{t}} \mathbf{N} dl + \int_{\ell} m \hat{\mathbf{b}} \mathbf{N} dl \right] \cdot \hat{\mathcal{V}} \\ \hat{\mathbf{M}} \cdot \hat{\dot{\mathbf{U}}} + \hat{\mathbf{f}}_{int} &= \hat{\mathbf{f}}_{ext} \quad \forall t \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde  $\hat{\mathbf{L}}$  y  $\hat{\mathbf{B}}$  son el operador y la matriz de compatibilidad cinemática para la viga de Timoshenko, respectivamente;  $\hat{\mathbf{M}}$  es la matriz de masa,  $\hat{\mathbf{f}}_{int}$  y  $\hat{\mathbf{f}}_{ext}$  son las fuerzas internas y externas respectivamente. Como se puede ver en la expresión (4.36), la ecuación de equilibrio dinámico no contiene explícitamente el término



de amortiguamiento, sino que este está contenido dentro de las fuerzas internas y, por lo tanto, debe ser tratado a nivel constitutivo. De esta forma, es posible incluir en la formulación el fenómeno de disipación provocado por la acción de la fricción interna y que puede simularse mediante la plasticidad y/o un fenómeno de pérdida de rigidez mediante una teoría de degradación y fractura, más otro fenómeno de disipación que produce amortiguamiento dependiente de la velocidad y del término de viscosidad. De esta manera queda diseñada una herramienta de cálculo muy potente, que cubre los principales fenómenos que caracterizan el comportamiento dinámico del hormigón.

El proceso de cálculo no lineal consiste en la evaluación de las deformaciones generalizadas seccionales  $\hat{\epsilon}$  correspondientes a los desplazamientos  $\hat{U}$ , tal que con éstas se calculan las deformaciones en cada punto del sólido  $\epsilon$  mediante la ecuación (4.30) y las tensiones correspondientes  $\sigma$  mediante un modelo constitutivo apropiado (Sección 4.2). Conocida la tensión verdadera en cada punto que se encuentra sobre una sección transversal de la viga, se recompone la tensión en coordenadas generalizadas  $\hat{\sigma}$ , es decir, esfuerzos seccionales, para un punto sobre el eje de la viga, mediante la expresión  $\int_{\mathcal{A}} \sigma \cdot \mathbf{S} d\mathcal{A}$ . De esta manera se puede exigir ahora el cumplimiento de la ecuación de fuerza residual nula  $\hat{\mathcal{R}} = 0 = \hat{\mathbf{M}} \cdot \hat{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{f}}_{int} - \hat{\mathbf{f}}_{ext}$ , mediante algoritmos estándar.

Para realizar una modelización 3D de las vigas, dentro del contexto que se ha descrito, la sección de éstas debe discretizarse con una malla ortogonal como se indica en la figura 4.2. Cada rectángulo de la red está caracterizado por un material y dimensiones distintas y está definido por la posición de sus cuatro esquinas, considerándose que todas las tensiones involucradas tienen una variación lineal entre dichos puntos extremos. Esta misma red sirve también para calcular todas las demás medidas seccionales.

#### 4.4.3 Análisis de las fuerzas internas

La no linealidad constitutiva está incluida en el término de *fuerza interna*  $\hat{\mathbf{f}}_{int}$  de la ecuación (4.36). En él pueden estar contenidos todos los fenómenos constitutivos que aproximen la modelización numérica al comportamiento real del material. Dicho término puede ser formulado de modo tal que el material sea o no sensible a problemas dependientes del tiempo. El límite de las posibilidades que brinda este concepto sólo está en contradicción con el grado de complejidad y dificultad de su implementación. En forma general se puede presentar una ecuación constitutiva afectada por fenómenos independientes y dependientes del tiempo a la vez. Esto es

$$\hat{\mathbf{f}}_{int} = \int_{\ell} \left( \int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S} \, d\mathcal{A} \right) : \hat{\mathbf{B}} \, d\ell = \int_{\ell} \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\mathbf{B}} \, d\ell \quad (4.37)$$

tal que la tensión en un punto del sólido  $\boldsymbol{\sigma}$ , así como también su generalización a problemas de barra de Timoshenko  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ , puede escribirse como

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{it} + \boldsymbol{\sigma}^{dt} \quad \Longrightarrow \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{it} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{dt} \quad (4.38)$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{it}$  y  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{dt}$  representan los estados de tensión generalizada que se desarrollan por fenómenos *independientes* y *dependientes del tiempo*, respectivamente (véase la Sección 4.2). Sus expresiones generales son

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{it} = \hat{\mathbf{C}}^s : \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{U}} \quad ; \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{dt} = \hat{\boldsymbol{\eta}} : \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{U}} \quad (4.39)$$

donde  $\hat{\mathbf{C}}^s = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{S} \cdot \mathbf{C}^s \cdot \mathbf{S} \, d\mathcal{A}$  es el tensor constitutivo secante integrado para la teoría de barras,  $\mathbf{C}^s$  es el tensor constitutivo secante para un punto del sólido,  $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{S} \, d\mathcal{A}$  representa el tensor de viscosidad integrado para la sección y  $\boldsymbol{\eta}$  es el tensor de viscosidad en un punto del sólido, tal que una de sus formas – denominada amortiguamiento proporcional a la rigidez del material – coincide con  $\boldsymbol{\eta} = \tau \mathbf{C}^s$ , donde  $\tau$  es el denominado *tiempo de retardo* o *tiempo de relajación*, según se trate de una formulación viscoelástica escrita en el campo de las tensiones o de las deformaciones respectivamente y cuya definición fue dada el apartado 4.2.4. Sustituyendo las expresiones de la tensión –ecuaciones (4.38) y (4.39)– en la ecuación de la *fuerza interna* (4.37), resulta

$$\hat{\mathbf{f}}_{int} = \underbrace{\left[ \int_{\ell} \hat{\mathbf{B}} : \overbrace{\int_{\mathcal{A}} \mathbf{S} \mathbf{C}^s \mathbf{S} \, d\mathcal{A}}^{\hat{\mathbf{C}}^s} : \hat{\mathbf{B}} \, d\ell \right]}_{\hat{\mathbf{K}}} \cdot \hat{\mathbf{U}} + \underbrace{\left[ \int_{\ell} \hat{\mathbf{B}} : \overbrace{\int_{\mathcal{A}} \mathbf{S} \boldsymbol{\eta} \mathbf{S} \, d\mathcal{A}}^{\hat{\boldsymbol{\eta}}} : \hat{\mathbf{B}} \, d\ell \right]}_{\hat{\mathbf{D}}} \cdot \hat{\mathbf{U}} \quad (4.40)$$

donde  $\hat{\mathbf{K}}$  y  $\hat{\mathbf{D}}$  representan las matrices de rigidez y amortiguamiento, respectivamente. Sustituyendo la ecuación (4.40) en la ecuación de equilibrio dinámico (4.36), resulta la expresión clásica, pero con la ventaja de que esta proviene de una formulación adecuada a las características constitutivas del material. Esto es

$$\hat{\mathbf{M}} \cdot \hat{\ddot{\mathbf{U}}} + \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\dot{\mathbf{U}}} + \hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{f}}_{ext} \quad \forall t \quad (4.41)$$

Haciendo una discretización temporal, dicha ecuación puede integrarse numéricamente, obteniéndose la respuesta para cada instante (Barbat, Hanganu, Oñate & Oller 1994).

## 4.5 ÍNDICE DE DAÑO ESTRUCTURAL

El daño local se expresa mediante un *índice* que mide en forma objetiva la degradación de rigidez que sufre un punto material de un sólido sometido a acciones externas. Si se estudia con detalle este índice que resulta de la mecánica (conceptos presentados en la Sección 4.2), se puede observar que el mismo deriva directamente del concepto de disipación o, dicho de otro modo, se trata de una normalización objetiva de la definición de la disipación para materiales que solamente sufren degradación de rigidez.

Ampliando el concepto presentado en el párrafo anterior, y a solo efecto de establecer una medida escalar del deterioro, se entiende en esta monografía por *índice de daño local* a una medida normalizada y objetiva de la disipación total, producida por la plasticidad más la degradación de rigidez, que deriva de la ecuación (4.2). Esto es

$$\begin{aligned} \delta d &= m \left[ \frac{r(\boldsymbol{\sigma})}{g_f^*} + \frac{(1-r(\boldsymbol{\sigma}))}{g_c^*} \right] \delta \Xi_m^{it} = \frac{m}{g^*(\boldsymbol{\sigma})} \delta \Xi_m^{it} \\ &= \underbrace{\frac{m}{g^*(\boldsymbol{\sigma})} \left[ \frac{\boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\epsilon}^p}{m} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha^n} \delta \alpha^n \right]}_{\delta d^p} + \underbrace{\frac{m}{g^*(\boldsymbol{\sigma})} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \beta^r} \delta \beta^r \right]}_{\delta d^r} \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde  $g_f^*$  y  $g_c^*$  son las densidades de energía máxima que puede disipar un punto del sólido sometido a tracción y a compresión respectivamente,  $\delta d$  es la variación del índice total de daño local y que, como puede verse, se descompone en una parte que corresponde al daño provocado por la plasticidad  $\delta d^p$  y otra al daño provocado por la degradación de rigidez  $\delta d^r$ . De esta forma se puede ver que el daño total local depende de una contribución aditiva de los índices de daño correspondientes a cada fenómeno independiente del tiempo

$$\begin{aligned} \delta d &= \delta d^p + \delta d^r \\ \delta d^p &= \frac{1}{g^*(\boldsymbol{\sigma})} \left[ \frac{\boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\epsilon}^p}{m} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha^n} \delta \alpha^n \right] \\ \delta d^r &= -\frac{1}{g^*(\boldsymbol{\sigma})} \left\{ \delta f(\beta^r) \left[ \frac{1}{2m} \boldsymbol{\epsilon}^e : \mathbf{C}^o : \boldsymbol{\epsilon}^e + \frac{\tau}{m} \boldsymbol{\epsilon}^e : \mathbf{C}^o : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{g^*(\boldsymbol{\sigma})} \left\{ \mathbf{T} : \delta \boldsymbol{\epsilon} \left[ \frac{1}{2m} \boldsymbol{\epsilon}^e : \mathbf{C}^o : \boldsymbol{\epsilon}^e + \frac{\tau}{m} \boldsymbol{\epsilon}^e : \mathbf{C}^o : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Desde el punto de vista mecánico, este índice constituye una variable única, común a los dos fenómenos independientes del tiempo que se determinan a la vez y que además, conceptualmente, da la magnitud de la parte de energía disipada al dañarse el material (debe observarse que no se trata de una variable de cálculo).

El *índice de daño global*  $0 \leq \mathcal{D} \leq 1$ , resulta de hacer una extensión conceptual del problema del daño local, mediante una integración sobre toda la estructura de la disipación de energía local

$$\mathcal{D} = \frac{E_{dis}}{E_{dis}^{max}} \quad (4.44)$$

donde  $E_{dis}$  es la energía total disipada para un instante cualquiera del proceso en el dominio ocupado por el volumen dañado  $V^d$

$$E_{dis} = \int_{V^d} \left[ \int_0^{\Xi_m^{it}} \delta \Xi_m^{it} \right] dV = \int_{V^d} \Xi_m^{it} dV \quad (4.45)$$

y  $0 \leq [E_{dis}^{max} = \int_{V^d} \alpha(\mathbf{x}) g^*(\boldsymbol{\sigma}) dV] \leq E_{dis}^{max}$ , es la máxima energía que puede disipar la estructura, para un determinado volumen de puntos dañados, donde  $E_{dis}^{max}$  es la energía que disiparía la estructura si todos sus puntos alcanzaran el daño máximo local. El *índice de peligrosidad*  $0 \leq \alpha(\mathbf{x}) \leq 1$  depende de la posición del punto y se define mediante un estudio no determinístico.

Sustituyendo  $E_{dis}$  y  $E_{dis}^{max}$  por sus valores, la ecuación (4.44) queda expresada como

$$\mathcal{D} = \frac{E_{dis}}{E_{dis}^{max}} = \frac{\int_{V^d} d g^*(\boldsymbol{\sigma}) dV}{\int_{V^d} \alpha(\mathbf{x}) g^*(\boldsymbol{\sigma}) dV} \quad (4.46)$$

de donde se deduce que se trata de una extensión a toda la estructura, del concepto de *índice local*.

Este índice mantiene el carácter objetivo que tiene el índice de daño local, variando entre cero y uno según la estructura se encuentre en estado no dañado o totalmente dañado, respectivamente.

En esta monografía se utiliza una forma alternativa de medir el índice global, basado en el concepto de la *norma de la fuerza interna*. Este indicador representa el nivel de resistencia que posee la estructura en cualquier instante del proceso termodinámico, respecto de un estado idealmente elástico

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= 1 - \frac{\|\hat{\mathbf{f}}_{int}\|}{\|\hat{\mathbf{f}}_{int}^e\|} = 1 - \frac{\|\int_{\ell} \left( \int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S} d\mathcal{A} \right) : \hat{\mathbf{B}} d\ell\|}{\|\int_{\ell} \left( \int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\sigma}^e \cdot \mathbf{S} d\mathcal{A} \right) : \hat{\mathbf{B}} d\ell\|} = \\ &= 1 - \frac{\|\int_{\ell} \left( \int_{\mathcal{A}} \{f(\beta^r) \mathbf{C}^o : [\boldsymbol{\epsilon}^e + \tau \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e]\} \cdot \mathbf{S} d\mathcal{A} \right) : \hat{\mathbf{B}} d\ell\|}{\|\int_{\ell} \left( \int_{\mathcal{A}} \{\mathbf{C}^o : \boldsymbol{\epsilon}\} \cdot \mathbf{S} d\mathcal{A} \right) : \hat{\mathbf{B}} d\ell\|} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Otras formas de definir el índice de daño global, pueden consultarse en las referencias Hanganu (1997), Barbat, Oller, Oñate & Hanganu (1997), Barbat et al. (1994), Hanganu et al. (1994), Oller, Barbat, Oñate & Hanganu (1992) y Barbat, Oller, Oñate & Hanganu (1992).

## 4.6 ELEMENTO DE CONEXIÓN

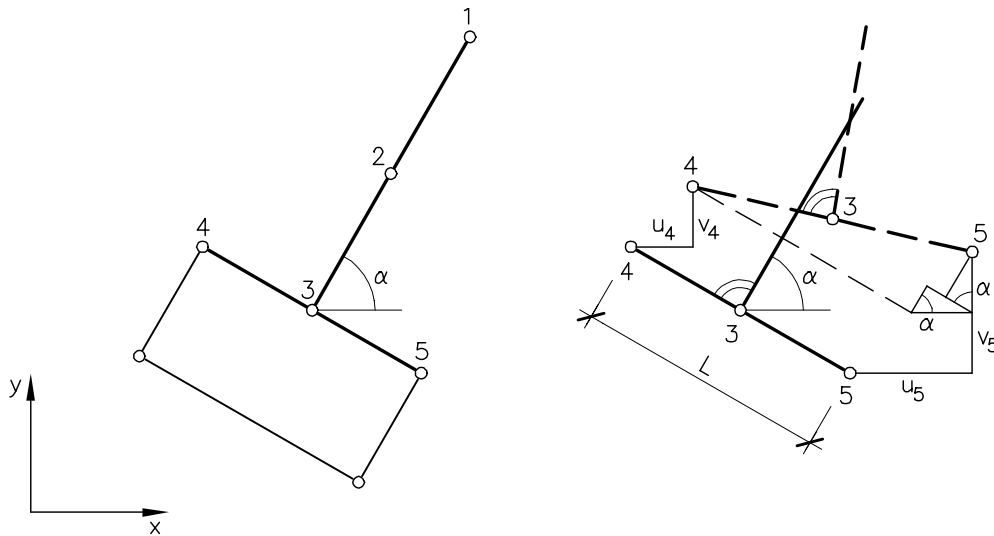
Como ya se mencionó el objetivo de este trabajo es modelar el conjunto estructura-sistema de aislamiento de base mediante la técnica de los elementos finitos a efectos de realizar el análisis dinámico de estructuras de edificios con aislamiento de base. Para conseguir la simulación numérica del conjunto estructura-sistema de aislamiento de base y considerando que en la discretización de la estructura se utilizan elementos de barra y en la discretización de la base elementos planos, es necesario un elemento de conexión que permita el trabajo conjunto de ambos. En esta sección se analiza el elemento de conexión utilizado.

A pesar de la extensa bibliografía existente sobre el método de los elementos finitos, el tema de elementos de transición que permitan conectar distintos tipos de elementos es raramente considerado, en este aspecto se debe destacar la referencia Oñate (1992) donde se trata la unión de elementos diferentes y cuyo planteamiento fue utilizado en Salomón (1995).

El problema consiste en la modificación y ampliación de un programa de elementos finitos para considerar simultáneamente elementos de distinto tipo, en este caso elementos planos y elementos de barra, en la misma discretización. Esto implica no solo considerar distinto número de nodos por elemento y distinto número de grados de libertad por nodo, también se hace necesario incorporar algún tipo de elemento de conexión que pueda compatibilizar los desplazamientos y esfuerzos entre ambos.

En edificios con aislamiento de base la función de ésta es de rigidización, de manera tal que, frente a un movimiento sísmico las deformaciones se concentren en los dispositivos de aislamiento (véase la figura 2.1). Al diseñarse esta base suficientemente rígida, las deformaciones que puede sufrir son principalmente desplazamientos de cuerpo rígido y, en consecuencia, su modelización puede realizarse utilizando elementos finitos con variación lineal en desplazamientos. En esta monografía se utilizan elementos planos de cuatro nodos. Por otra parte, en la discretización de los pórticos que forman la estructura del edificio que se sustenta sobre la base se utilizan elementos finitos tipo barra de Timoshenko de tres nodos.

Se trata de permitir el trabajo conjunto de los elementos planos (trabajando en estado plano de deformación) con los elementos de barra (trabajando a flexión), parece entonces natural que el elemento de conexión este formado por una combinación de ambos, tal como la indicada en la figura 4.4.



**Figura 4.4** Elemento de conexión utilizando elementos de barra de tres nodos y plano de cuatro nodos.

El elemento barra se conecta al punto medio del lado de un elemento plano de cuatro nodos, por lo que, si se desea utilizar un elemento estándar, deben establecerse relaciones entre los tres grados de libertad del extremo de la barra con los grados de libertad de los nodos extremos del lado del elemento plano. Considerando que en el punto de conexión los desplazamientos deberán ser los mismos y que la variación de desplazamientos a lo largo de un lado del elemento plano de cuatro nodos es lineal, las relaciones establecidas consisten en considerar que los desplazamientos  $(u, v)$  del extremo de la barra pueden obtenerse por interpolación lineal de los desplazamientos  $(u, v)$  de los nodos extremos del lado.

La relación entre el giro del extremo de la barra y los desplazamiento de los nodos del elemento plano viene dada al aceptar que la barra se encuentra conectada en forma rígida con el elemento plano, por lo tanto, el giro del extremo de la barra es el mismo que experimenta el lado del elemento al cual se conecta.

$$\begin{aligned} u_3 &= (u_4 + u_5)/2 & v_3 &= (v_4 + v_5)/2 \\ \theta_3 &= [(u_5 - u_4) \cos \alpha + (v_5 - v_4) \sin \alpha]/L \end{aligned} \quad (4.48)$$

Expresando estas relaciones en forma matricial en función de los dos grados de libertad de los nodos 4 y 5, se obtiene

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ -\cos \alpha/L & -\sin \alpha/L & \cos \alpha/L & \sin \alpha/L \end{bmatrix}}_m \cdot \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

De esta manera, la relación entre los campos de desplazamientos del elemento barra y del elemento de conexión viene dada por

$$\mathbf{u}_{barra} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}_{(9 \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(6 \times 6)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_{(3 \times 4)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{(9 \times 10)}} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix}_{(10 \times 1)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_{conex} \quad (4.50)$$

Los esfuerzos en el extremo de la barra pueden relacionarse con los esfuerzos en los nodos 4 y 5 de manera análoga a la relación entre desplazamientos,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -\cos \alpha/L \\ 0 & 0.5 & -\sin \alpha/L \\ 0.5 & 0 & \cos \alpha/L \\ 0 & 0.5 & \sin \alpha/L \end{bmatrix}}_{m^T} \cdot \begin{bmatrix} H_3 \\ V_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_4 \\ V_4 \\ H_5 \\ V_5 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Llamando  $\mathbf{F}_{barra}$  al vector de fuerzas del elemento barra estándar, y  $\mathbf{F}_{conex}$  al del elemento de conexión, la relación entre ambos es  $\mathbf{T}^T \mathbf{F}_{barra} = \mathbf{F}_{conex}$ . Relacionando fuerzas y desplazamientos a través de la matriz de rigidez, se tiene

$$\mathbf{K}_{barra(9 \times 9)} \cdot \mathbf{u}_{barra} = \mathbf{F}_{barra} \quad \underbrace{\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{K}_{barra} \cdot \mathbf{T}}_{\mathbf{K}_{conex(10 \times 10)}} \cdot \mathbf{u}_{conex} = \mathbf{F}_{conex} \quad (4.52)$$

siendo  $\mathbf{K}_{conex}$  la matriz de rigidez del elemento de conexión.

En la Sección 5.3.6 se analiza la respuesta de este elemento de conexión frente a diferentes condiciones de borde y diferentes tipos de carga.





# 5

## IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

### 5.1 INTRODUCCIÓN

En este Capítulo se trata de la implementación de los modelos constitutivos analizados en el Capítulo 3 en una formulación numérica eficiente para el análisis de estructuras con aislamiento de base. Considerando que estos modelos constitutivos se implementan en un programa general de elementos finitos que incluye grandes deformaciones, en primer lugar se describen las dos formulaciones posibles: lagrangeana total y lagrangeana actualizada. A continuación se analiza el tratamiento de la incompresibilidad y como este problema es aquí resuelto. Por último, en el apartado 5.3 se presentan varios ejemplos para verificar el comportamiento de los modelos implementados.

### 5.2 TRATAMIENTO NUMÉRICO DE LOS MODELOS CONSTITUTIVOS

#### 5.2.1 Formulación lagrangeana total y lagrangeana actualizada

En mecánica del continuo los problemas pueden ser formulados utilizando como referencia las coordenadas materiales  $\mathbf{X}$  o las coordenadas espaciales  $\mathbf{x}$  (ver Apéndice). En el primer caso el problema se plantea en su descripción material o lagrangeana y en el segundo en su descripción espacial o euleriana. En la descripción material se siguen las trayectorias de todas las partículas del cuerpo en su movimiento desde la posición original a la actualizada y el foco de atención es

que sucede a estas partículas, mientras que en la descripción espacial la atención se centra en eventos que suceden en un punto del espacio.

La descripción euleriana es adoptada en problemas de mecánica de fluidos, mientras que en análisis de sólidos y estructuras es preferible la descripción lagrangeana.

Refiriendo la configuración del cuerpo a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, el equilibrio del cuerpo en el tiempo  $t + \Delta t$  se expresa mediante el principio de los desplazamientos virtuales, como

$$\int_{V^{t+\Delta t}} \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} \delta \mathbf{e}^{t+\Delta t} dV^{t+\Delta t} = \mathcal{R}^{t+\Delta t} \quad (5.1)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t}$  es el tensor de tensiones de Cauchy,  $\delta \mathbf{e}^{t+\Delta t}$  es el tensor de deformaciones correspondiente a un desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{u}$ ,  $V^{t+\Delta t}$  es el volumen del cuerpo en el tiempo  $t + \Delta t$  y  $\mathcal{R}^{t+\Delta t}$  representa el trabajo virtual externo,

$$\mathcal{R}^{t+\Delta t} = \int_{V^{t+\Delta t}} \mathbf{f}_V^{t+\Delta t} \delta \mathbf{u} dV^{t+\Delta t} + \int_{S^{t+\Delta t}} \mathbf{f}_S^{t+\Delta t} \delta \mathbf{u} dS^{t+\Delta t} \quad (5.2)$$

siendo  $\mathbf{f}_V^{t+\Delta t}$  las fuerzas externas por unidad de volumen y  $\mathbf{f}_S^{t+\Delta t}$  las fuerzas externas por unidad de superficie, ambas aplicadas en el tiempo  $t + \Delta t$ .

En general el sólido puede sufrir grandes desplazamientos y grandes deformaciones y las relaciones constitutivas son no lineales, por lo que la ecuación (5.1) no puede ser resuelta directamente para el tiempo  $t + \Delta t$ ; una solución aproximada puede obtenerse refiriendo todas las variables a una configuración de equilibrio calculada previamente, linealizando la ecuación resultante y mejorando esta aproximación en sucesivas iteraciones.

La configuración de equilibrio calculada previamente y utilizada como referencia puede ser cualquiera de las soluciones obtenidas para los tiempos  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$ . De todas estas opciones de referencia, dos son las elegidas en la práctica dando lugar a dos formulaciones denominadas *lagrangeana total* y *lagrangeana actualizada*. La primera, lagrangeana total, utiliza como referencia la configuración inicial en el tiempo 0; la segunda, lagrangeana actualizada, toma como referencia la última configuración calculada. Ambas formulaciones incluyen todas las variables cinemáticas de grandes desplazamientos, grandes deformaciones y rotaciones.

Disponiendo de las ecuaciones del tensor de tensiones y del tensor constitutivo en la configuración de referencia (no deformada), los correspondientes tensores en la configuración actualizada pueden obtenerse mediante las operaciones de transporte *push forward*; o a la inversa, disponiendo de estos tensores en la configuración actualizada pueden obtenerse los correspondientes en la configuración inicial, mediante un *pull back* de los mismos (véase el Apéndice, Sección A.4).

Implementando estas operaciones, *push forward* y *pull back*, en un programa de elementos finitos que contemple grandes deformaciones, puede tratarse el problema mediante cualquiera de las dos formulaciones, *lagrangeana total* o *lagrangeana actualizada*, debiéndose obtener los mismos resultados. El elegir una u otra formulación depende esencialmente de la configuración (original o deformada) donde se tenga la forma explícita del tensor constitutivo; pues si bien este puede transportarse de una a otra configuración, (*push forward*, *pull back*), estos transportes tienen un costo en tiempo y al tratar con problemas no lineales estos transportes deben realizarse durante la linealización del proceso, es decir, en cada iteración dentro de los distintos pasos de carga.

Recordando las ecuaciones (A.66-A.67) del Apéndice y la igualdad  $\rho^t dV^t = \rho^0 dV^0$ , puede expresarse la relación

$$\int_{V^t} \boldsymbol{\sigma}^t \delta \mathbf{e}^t dV^t = \int_{V^t} \frac{\rho^t}{\rho^0} \mathbf{S}^t \delta \mathbf{E}^t dV^t = \int_{V^0} \mathbf{S}^t \delta \mathbf{E}^t dV^0 \quad (5.3)$$

Utilizando esta relación, la ecuación (5.1) puede expresarse en una formulación lagrangeana total como

$$\int_{V^0} \mathbf{S}_0^{t+\Delta t} \delta \mathbf{E}_0^{t+\Delta t} dV^0 = \mathcal{R}^{t+\Delta t} \quad (5.4)$$

mientras que en una formulación lagrangeana actualizada esta resulta

$$\int_{V^t} \mathbf{S}_t^{t+\Delta t} \delta \mathbf{E}_t^{t+\Delta t} dV^t = \mathcal{R}^{t+\Delta t} \quad (5.5)$$

En esta monografía se adopta la configuración original como referencia, con una formulación lagrangeana total.

### 5.2.2 Multicampos e Integración Reducida-Selectiva

Es conocido que la formulación tradicional del método de los elementos finitos en desplazamientos, presenta problemas de mal condicionamiento de la matriz de rigidez y bloqueo de la solución cuando se tratan materiales cuasi incompresibles (Sussman & Bathe 1987, Simo & Taylor 1991, Gadala 1992, Bathe 1996).

A efectos de ilustrar la problemática asociada a materiales cuasi incompresibles se analiza a continuación el caso de un material elástico sometido a pequeñas deformaciones. Su ecuación constitutiva puede expresarse descompuesta en sus partes volumétrica y desviadora, en la forma

$$\sigma_{ij} = \kappa \epsilon_v \delta_{ij} + 2G \bar{\epsilon}_{ij} \quad (5.6)$$

donde  $\kappa$  es el modulo volumétrico,

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (5.7)$$

$\epsilon_v$  es la deformación volumétrica,

$$\epsilon_v = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \quad (5.8)$$

$\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker,

$$\delta_{ij} \left\{ \begin{array}{l} = 1; \quad i = j \\ = 0; \quad i \neq j \end{array} \right\} \quad (5.9)$$

$\bar{\epsilon}_{ij}$  son las componentes desviadoras de la deformación,

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{\epsilon_v}{3} \delta_{ij} \quad (5.10)$$

y  $G$  es el módulo de corte,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.11)$$

La presión en el sólido se expresa como,

$$p = -\kappa\epsilon_v \quad (5.12)$$

donde

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad (5.13)$$

Para materiales cuasi incompresibles el coeficiente de Poisson  $\nu$  se aproxima a 0.5, incrementándose el valor del módulo volumétrico  $\kappa$  según ecuación (5.7) y reduciéndose la deformación volumétrica a valores próximos a cero. Para deformaciones volumétricas muy pequeñas, cualquier error en la determinación de estas deformaciones (derivadas de los desplazamientos) implica, según ecuación (5.12) un gran error en la estimación de la presión y por consiguiente en las tensiones, que al buscar el equilibrio con las cargas externas afectará a su vez a los desplazamientos.

En caso de incompresibilidad total  $\nu = 0.5$ , el módulo volumétrico  $\kappa$  es infinito y la presión tiene algún valor finito indeterminado por la ecuación (5.12). Reemplazando la ecuación (5.12) en la (5.6),

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2G\bar{\epsilon}_{ij} \quad (5.14)$$

el valor de la presión debe ser ahora determinado por las condiciones de borde del problema y la solución del mismo involucra como incógnitas esta presión además del campo de desplazamientos.

A fin de superar estos problemas han sido propuestas varias formulaciones (Simo 1988b, Simo & Taylor 1991, Gadala 1992). Todas ellas se basan en la descomposición del gradiente de deformación en sus partes desviadora y volumétrica.

Estas formulaciones pueden agruparse en dos familias: Multicampos (*multifield or mixed principles*) e Integración Reducida-Selectiva (*Reduced selective Integration Penalty approach, RIP*).

En las formulaciones multicampos, el principio variacional incluye, además del campo de desplazamientos, los campos de deformación volumétrica y presión (Simo & Taylor 1991, Miehe 1994, Kaliske et al. 1997). En su forma más general tienen el inconveniente de incrementar el número global de incógnitas del problema, pero este inconveniente puede superarse en ciertos planteos condensando a nivel de elemento algunas de las variables.

Los métodos de integración selectiva suelen integrar el campo de desplazamientos correspondiente a la deformación desviadora en forma estándar y en forma reducida, con reglas de integración de bajo orden, la deformación volumétrica, reduciendo de esta manera el efecto de bloqueo causado por la restricción volumétrica. Este planteo puede presentar problemas al tratar con elementos sujetos a grandes deformaciones y muy distorsionados (Gadala 1992).

Se han realizado estudios que demuestran la equivalencia (Gadala 1992, Zienkiewicz & Taylor 1994), bajo ciertas condiciones y para ciertos casos, entre ambos procedimientos (principios multicampo e integración reducida). No obstante, debido al problema señalado de los métodos de integración selectiva y a la mayor generalidad de las formulaciones multicampo, estas últimas gozan de mayor aceptación.

### 5.2.3 Aplicación del método de los elementos finitos a elastómeros

En esta monografía se utiliza un tratamiento en dos campos, en desplazamiento y presión, formulación  $\mathbf{u}/p$ . Estos campos son considerados variables independientes, lo que permite expresar el principio de trabajos virtuales en la forma

$$\int_V \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \bar{\mathbf{S}} dV - \int_V \epsilon_v p dV = \mathcal{R} \quad (5.15)$$

donde  $\mathcal{R}$  indica el trabajo virtual de las fuerzas externas, y  $\bar{\mathbf{S}}$  y  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  son tensiones y deformaciones desviadoras.

Desplazamientos y presión son relacionados a través de la ecuación (5.12) en la forma

$$\int_V \left( \frac{p}{\kappa} + \epsilon_v \right) p \, dV = 0 \quad (5.16)$$

En esta formulación, además de la usual interpolación del campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$ ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (5.17)$$

siendo  $\mathbf{H}$  la matriz de interpolación de desplazamientos y  $\hat{\mathbf{u}}$  el vector de desplazamientos nodales, con lo cual se calculan las deformaciones

$$\bar{\epsilon} = \mathbf{B}_d \hat{\mathbf{u}}, \quad \epsilon_v = \mathbf{B}_v \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (5.18)$$

se debe interpolar el campo de presión  $p$ ,

$$p = \mathbf{H}_p \cdot \hat{p} \quad (5.19)$$

Reemplazando las ecuaciones (5.17) a (5.19) en las (5.15) y (5.16), se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{up} \\ \mathbf{K}_{pu} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} &= \int_V \mathbf{B}_d^T : \bar{\mathbf{C}} : \mathbf{B}_d \, dV \\ \mathbf{K}_{up} &= - \int_V \mathbf{B}_v^T \cdot \mathbf{H}_p \, dV = \mathbf{K}_{pu}^T \\ \mathbf{K}_{pp} &= - \int_V \mathbf{H}_p^T \frac{1}{\kappa} \mathbf{H}_p \, dV \end{aligned} \quad (5.21)$$

siendo  $\mathbf{B}_d$  y  $\mathbf{B}_v$  las matrices de relación deformación-desplazamiento para deformaciones desviadoras y volumétricas, respectivamente,  $\bar{\mathbf{C}}$  la parte desviadora del tensor constitutivo y  $\mathbf{R}$  el vector de cargas aplicadas.

A diferencia del campo de desplazamientos, que se considera continuo entre elementos, para la presión no se requiere tal continuidad y esta es considerada propia de cada elemento y por lo tanto puede ser condensada a nivel de elemento, antes de proceder con el ensamblaje de estos elementos (Sussman & Bathe 1987, Bathe 1996).

Despejando  $\hat{p}$  de la segunda línea de la ecuación (5.20), resulta,

$$\hat{\mathbf{p}} = -\mathbf{K}_{pp}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{pu} \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (5.22)$$

y reemplazando esta en la primera línea de la ecuación (5.20), el sistema queda reducido a un sistema equivalente en desplazamientos,

$$\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R} \quad \text{con} \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{up} \cdot \mathbf{K}_{pp}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{pu} \quad (5.23)$$

Es también posible una formulación  $\mathbf{u}/\mathbf{p}$  con continuidad inter-elementos en el campo de presión. En este caso se consideran variables nodales de presión, al igual que las variables de desplazamientos, lo que hace imposible su condensación a nivel elemental antes de realizar el ensamblaje.

En el caso límite de incompresibilidad perfecta,  $\nu = 0.5$ , y el módulo volumétrico  $\kappa$ , ecuación (5.7), tiende a infinito, resultando de la ecuación (5.21)  $\mathbf{K}_{pp} = \mathbf{0}$  y el sistema de ecuaciones (5.20) resulta

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{up} \\ \mathbf{K}_{pu} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Los elementos de valor cero en la diagonal del sistema impiden en esta situación la condensación realizada en las ecuaciones (5.22) y (5.23) y consideraciones especiales deben realizarse a efectos de poder resolver el sistema de ecuaciones.

Considerando que en las formulaciones  $\mathbf{u}/\mathbf{p}$  se interpolan tanto los campos de desplazamientos como de presión, debe optarse por el orden de interpolación para ambos. Si el orden de interpolación del campo presión es muy bajo la presión estimada puede no ser suficientemente buena; si en cambio es muy alto, el elemento resultante se comportaría como uno basado en desplazamientos y presentaría los mismos problemas de bloqueo en la solución. En base a esto, la mejor opción consiste en optar por una interpolación de la presión un orden inferior a la elegida para interpolar el campo de desplazamientos (Bathe 1996).

En caso de utilizar elementos de cuatro nodos con variación lineal en el campo de desplazamientos, la opción natural para el campo de presión es considerar a esta constante, en este caso, en la ecuación (5.19)

$$\mathbf{H}_p = [1] \quad ; \quad \hat{\mathbf{p}} = [p_0]$$

Naturalmente, para el análisis de elastómeros esta formulación  $\mathbf{u}/\mathbf{p}$ , ecuaciones (5.15) a (5.23), debe extenderse a grandes deformaciones, en este caso utilizando una formulación lagrangeana total.

En el Capítulo 3 se describen varias funciones de energía de deformación válidas para el tratamiento numérico de los elastómeros y de ellas se derivan las expresiones del tensor de tensiones y tensor constitutivo para el caso general tri-dimensional, ecuaciones (3.106-3.107). Estas ecuaciones, en grandes deformaciones, son validas para cualquier material isótropo hiperelástico. Formas explícitas de las derivadas incluidas en estos tensores son dadas para la función energía de deformación de Ogden, ecuación (3.96), que como se señaló resultan también validas para los modelos Mooney-Rivlin y Neo-Hooke, ecuaciones (3.94-3.95).

La utilización de este desarrollo en una formulación  $\mathbf{u}/\mathbf{p}$  implica la modificación de las funciones de potencial, basadas en desplazamientos  $\mathbf{u}$  o variables derivadas de estos (invariantes de las deformaciones o estiramientos principales), a efectos de incluir en los mismos la presión  $p$ .

En modelos hiperelásticos, como son los utilizados en esta monografía, el tensor de tensiones se obtiene a partir de una función energía de deformación,  $\mathbf{S} = \partial_E W$  ecuación (3.36). Por lo tanto, la ecuación (5.4) en un tiempo  $t$  puede ser expresada como

$$\int_{V^0} \frac{\partial W_0^t}{\partial \mathbf{E}_0^t} \delta \mathbf{E}_0^t dV^0 = \int_{V^0} \delta W_0^t dV^0 = \delta \left( \int_V W_0^t dV^0 \right) = \mathcal{R}^t \quad (5.25)$$

donde  $W = W_d + W_p$  incluye el efecto de la presión  $W_p$ , además de la variación usual en desplazamientos  $W_d$ . Una forma posible para esta función  $W$  es la dada por Sussman & Bathe (1987),

$$W = W_d - \frac{1}{2\kappa} (p - \tilde{p})^2 \quad (5.26)$$

siendo  $p$  la presión obtenida a partir del campo de desplazamientos y  $\tilde{p}$  una presión interpolada independientemente.

La implementación en un código de elementos finitos que incluya grandes deformaciones se realiza de forma similar a la expresada en las ecuaciones (5.20-5.21). A nivel de elemento se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^t & \mathbf{K}_{up}^t \\ \mathbf{K}_{pu}^t & \mathbf{K}_{pp}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{t+\Delta t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^t \\ \mathbf{F}_p^t \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

donde  $\mathbf{R}^{t+\Delta t}$  son las fuerzas nodales correspondientes a las cargas externas en el tiempo  $t + \Delta t$ . Suprimiendo de aquí en adelante el superíndice de tiempo  $t$  a efectos de simplificar la notación,

$$\mathbf{F}_u = \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \left( \int_V W dV \right), \quad \mathbf{F}_p = \frac{\partial}{\partial \hat{p}} \left( \int_V W dV \right) \quad (5.28)$$



$$\mathbf{K}_{uu} = \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \hat{\mathbf{u}}}, \quad \mathbf{K}_{up} = \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \hat{p}} = \frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \hat{\mathbf{u}}} = \mathbf{K}_{pu}, \quad \mathbf{K}_{pp} = \frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \hat{p}} \quad (5.29)$$

Efectuando estas operaciones,

$$\mathbf{F}_u = \int_V \mathbf{B}_L^T \cdot \mathbf{S} \, dV \quad (5.30)$$

$$\mathbf{F}_p = \int_V -C_{pp} (p - \hat{p}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \hat{p}} \, dV = \mathbf{0} \quad (5.31)$$

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_V \mathbf{B}_L^T : \mathbf{C}_{uu} : \mathbf{B}_L \, dV + \int_V \mathbf{B}_{NL}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_{NL} \, dV \quad (5.32)$$

$$\mathbf{K}_{up} = \int_V \mathbf{B}_L^T \cdot \mathbf{C}_{up} \, dV = \mathbf{K}_{pu}^T \quad (5.33)$$

$$\mathbf{K}_{pp} = \int_V C_{pp} \, dV \quad (5.34)$$

siendo  $\mathbf{B}_L$  y  $\mathbf{B}_{NL}$  las clásicas relaciones deformación-desplazamiento lineal y no lineal, respectivamente,

$$C_{pp} = -\frac{1}{\kappa}, \quad \mathbf{C}_{up} = -C_{pp} \frac{\partial p}{\partial E_{kl}} \quad (5.35)$$

$$\mathbf{C}_{uu} = \bar{\mathbf{C}} + C_{pp} \frac{\partial p}{\partial E_{kl}} \frac{\partial p}{\partial E_{rs}} + C_{pp} (p - \hat{p}) \frac{\partial p}{\partial E_{kl} \partial E_{rs}} \quad (5.36)$$

A partir de aquí, se obtiene el segundo tensor de Piola-Kirchhoff como

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}} + C_{pp} (p - \hat{p}) \frac{\partial p}{\partial E_{kl}} \quad (5.37)$$

siendo  $\bar{\mathbf{S}}$  y  $\bar{\mathbf{C}}$  la parte desviadora del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y del tensor constitutivo de cuarto orden en la configuración de referencia, respectivamente, ya calculados (véase página 88, ecuaciones 3.106 y 3.107);

$\kappa$  es el modulo volumétrico del material, que para forzar una deformación a volumen cuasi constante debe tener un valor suficientemente alto, y  $\mathbf{E}$  es el tensor derecho de Green-Lagrange.

Considerando para la deformación volumétrica la función energía de deformación de la ecuación (3.110) resulta la siguiente expresión para la presión dependiente del campo de desplazamientos

$$p = \kappa (J_3 - 1) \quad (5.38)$$

Las derivadas de la presión respecto a  $\mathbf{E}$  vienen dadas por

$$\frac{\partial p}{\partial E_{kl}} = -\kappa J_3 \mathbf{C}^{-1} \quad \text{y} \quad \frac{\partial p}{\partial E_{kl} \partial E_{rs}} = \kappa J_3 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \kappa J_3^{-1} 2\mathbf{Q} \quad (5.39)$$

donde  $J_3 = I_3^{1/2}$ ,  $\mathbf{C}$  es el tensor derecho de Cauchy-Green y la forma matricial de  $\mathbf{Q}$  es la misma dada en la ecuación (3.72).

Esta presión  $p$ , depende del cambio de volumen ( $J_3$ ), producido por el campo de desplazamientos en cada punto de integración. Disponiendo de estas  $p$ , se obtiene una presión media  $\tilde{p}$  a nivel de elemento. Naturalmente, y a diferencia del campo de desplazamientos, esta presión resulta discontinua entre elementos y por lo tanto también lo serán las tensiones. Si se quieren evitar los saltos de tensión inter-elementos, se deberá aplicar una técnica de alisado de tensiones (Zienkiewicz & Taylor 1994).

La condensación de la presión se realiza en la forma indicada por las ecuaciones (5.22-5.23), se plantean las ecuaciones de equilibrio (5.27) y se despeja la presión de la segunda de ellas,

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{K}_{pp}^{-1} (-\mathbf{F}_p - \mathbf{K}_{up}^T \cdot \hat{\mathbf{u}}) \quad (5.40)$$

y luego se la reemplaza en la primera (5.27), quedando el siguiente sistema condensado

$$\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R} - \mathbf{F} \quad (5.41)$$

donde

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{up} \cdot \mathbf{K}_{pp}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{up}^T \quad (5.42)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_u - \mathbf{K}_{up} \cdot \mathbf{K}_{pp}^{-1} \cdot \mathbf{F}_p^T \quad (5.43)$$

De esta forma, condensada a nivel elemental la variable de presión, se tiene una formulación en desplazamientos, con matrices de rigidez y vectores de fuerzas incrementados pero sin adicionar variable alguna al sistema global.

Esta metodología se ha implementado en programa general de elementos finitos utilizando una formulación lagrangeana total. Es de hacer notar que ampliando un programa de elementos finitos en pequeñas deformaciones, mediante actualización temporal de las coordenadas, cálculo del gradiente de deformación, operadores de transporte, etc., se puede integrar indistintamente en la configuración actualizada o en la referencial y verificar el equilibrio sobre la configuración inicial; obteniendo de esta forma un programa en grandes deformaciones.

### 5.3 SIMULACIÓN NUMÉRICA

En esta sección se presentan varios ejemplos a efectos de ilustrar el comportamiento del modelo constitutivo destinado a elastómeros, cuya formulación se desarrolla en el Capítulo 3 e implementa en la Sección 5.2. También se analiza el comportamiento del elemento de conexión presentado en la Sección 4.6. Se consideran los siguientes casos:

- Tracción simple, deformación homogénea.
- Deformación plana no homogénea (2 casos).
- Dispositivo de apoyo.
- Control de volumen.
- Caucho natural y de alto amortiguamiento.
- Elemento de conexión.

En los dos primeros casos se trata únicamente con la parte elástica de la formulación correspondiente a elastómeros y se utiliza la función energía de deformación de Ogden, Sección 3.4.3, con los parámetros dados por el autor (Ogden 1984) y posteriormente utilizados por Simo & Taylor (1991), Miehe (1994) y de Souza-Neto, Peric & Owen (1997) entre otros. La función energía de deformación de Ogden, ecuación (3.91), puede expresarse en la forma

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = G \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i^*}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (5.44)$$

donde  $\lambda_A$  son los estiramientos principales o valores propios del tensor de deformaciones  $\mathbf{U}$ ,  $\mu_i^*$  y  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) son números reales y  $N$  es un entero positivo, tal que  $\sum_{i=1}^N \mu_i^* \alpha_i = 2$ .  $G$  es el modulo de corte del material que se pretende modelar

en la configuración de referencia.

Para  $N = 3$ , Ogden (1984) ha determinado los valores de estos parámetros de forma tal que las tensiones resultantes del modelo ajusten a curvas experimentales de ensayos (tensión simple, tensión plana y tensión biaxial) previamente realizados por Treloar (1975) con caucho natural vulcanizado. Estos son:

$G$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\mu_1^*$	$\mu_2^*$	$\mu_3^*$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
4.225	1.491	0.003	-0.0237	1.3	5.0	-2.0

(5.45)

Verificado el comportamiento de la formulación numérica adoptada (parte elástica), a continuación se ensaya un **dispositivo de apoyo** de caucho laminado a corte simple. Se propone la utilización de un único elemento para modelar todo el dispositivo, con respuesta a esfuerzo cortante equivalente a la de modelar este dispositivo discretizando, en forma independiente, las láminas de elastómero y de acero. Los parámetros materiales del modelo elástico se modifican para lograr una buena aproximación a resultados experimentales (SMiRT11 1991, Kelly 1991*b*).

A efectos de verificar la respuesta de la formulación en lo referente a una deformación de corte a volumen cuasi constante, se presenta el apartado **control de volumen**. En este caso las cargas, desplazamientos impuestos para producir deformaciones de cortante, se aplican de forma cíclica con amplitud creciente (hasta 400%) y frecuencia constante (0.5 Hz). El modelo material aquí considerado incluye las componentes elástica, viscoelástica y plástica.

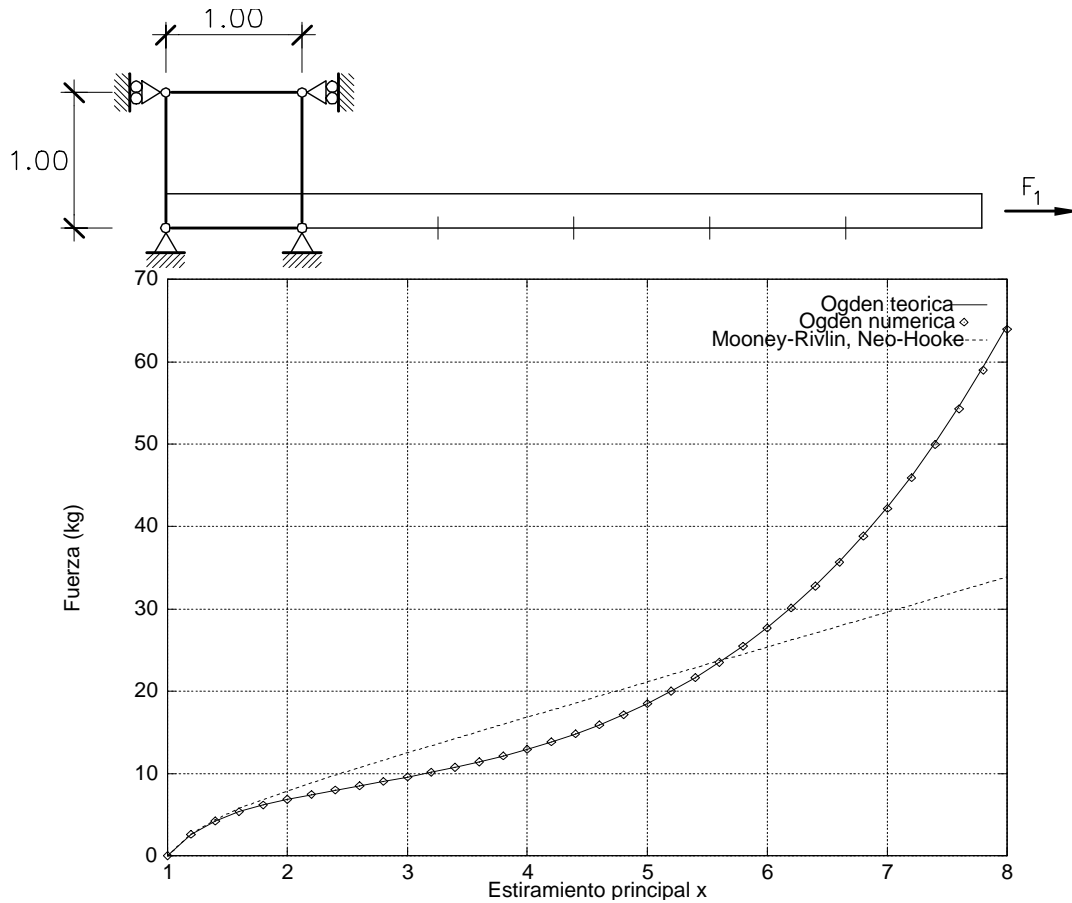
La componente elastomérica de los dispositivos de caucho laminado, puede ser caucho natural o caucho de alto amortiguamiento (SMiRT11 1991). Naturalmente, los parámetros materiales a utilizar en el modelo varían según el tipo de material que se pretende modelar. Para cuantificar los valores de estos parámetros, en la sección **caucho natural y de alto amortiguamiento** se analizan dispositivos de los cuales se dispone de resultados experimentales (SMiRT11 1991).

En la Sección 4.6 se desarrolló un elemento de conexión que permite el trabajo conjunto de elementos de barra, utilizados en la discretización de la estructura, con elementos de estado plano, utilizados en la discretización de la base y dispositivos de aislamiento sísmico. En la sección **elemento de conexión** se analiza la respuesta de este elemento frente a varias condiciones de carga.

### 5.3.1 Tracción simple, deformación homogénea.

Este apartado muestra la respuesta fuerza-desplazamiento en tracción simple, homogénea, de la componente elástica del modelo y es utilizado para evaluar el comportamiento de la formulación numérica adoptada. Los valores elegidos para

las constantes materiales del modelo son las dadas por Ogden (1984) para su modelo de 3 parámetros e indicados en (5.45).



**Figura 5.1** Respuesta  $F_1 - \lambda_1$  de los modelos Ogden, Mooney-Rivlin y Neo-Hooke en tracción homogénea.

Se analiza una pieza de dimensiones unitarias modelada con un único elemento de cuatro nodos y  $2 \times 2$  puntos de integración. El problema se trata como estado plano de deformación, imponiendo desplazamientos en dirección  $X$ , con libertad de vínculos en dirección  $Y$ . Se aplican incrementos de desplazamientos de 0.20 de la longitud total inicial, hasta alcanzar un desplazamiento igual a 7 veces el valor de la longitud original (estiramiento principal  $\lambda_1 = 8$ ), consiguiendo convergencia en cuatro iteraciones en todos los incrementos de carga.

En la figura 5.1 se grafica la fuerza  $F_1$  producida por el estiramiento principal  $\lambda_1$ . Esta respuesta es coincidente con la respuesta teórica publicada por Ogden

(1984) para un material totalmente incompresible,  $F = \sum_{i=1}^3 \mu_i (\lambda^{\alpha_i-1} - \lambda^{-\alpha_i-1})$  Ogden, pp. 498, ecuac. 7.2.33. También es coincidente con las respuestas numéricas obtenidas por Simo & Taylor (1991) y Miehe (1994), utilizando técnicas multicampo.

A efectos de comparar distintos modelos materiales, en la misma figura se presenta la respuesta de los modelos Neo-Hooke y Mooney-Rivlin, que en este caso son coincidentes. Se debe remarcar que la formulación presentada permite utilizar estos tres modelos (Ogden, Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) cambiando únicamente los valores de las constantes indicadas en (5.45). En el modelo Mooney-Rivlin los parámetros a utilizar son  $\mu_1 - \mu_2 = 1$ ,  $\alpha_1 = -\alpha_2 = 2$  y en el modelo Neo-Hooke estos se reducen a dos constantes,  $\mu_1 = 1$  y  $\alpha_1 = 2$ .

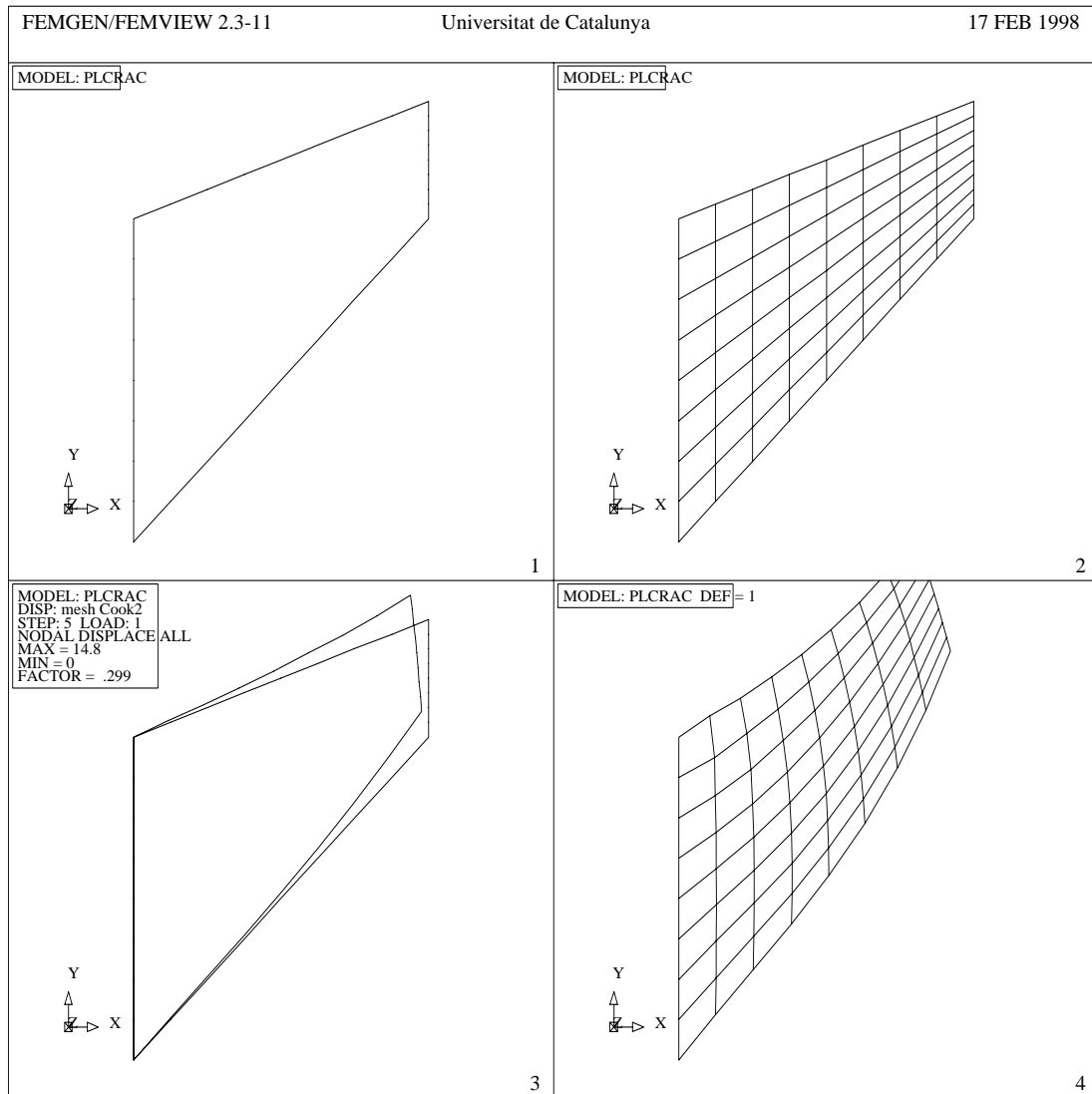
El excelente comportamiento del modelo numérico puede observarse en la figura 5.1. Para obtener esta coincidencia con la respuesta teórica de un material totalmente incompresible se trabaja con un módulo volumétrico  $\kappa$  suficientemente elevado, de manera de forzar una deformación a volumen cuasi constante. En este caso se utiliza un valor  $\kappa = 10000$  con lo cual se obtiene una deformación volumétrica  $(J - 1) = 0.0$  a  $0.0172$  para  $\lambda_1 = 1$  a  $8$ .

### 5.3.2 Deformación plana no homogénea

Es de entender que una formulación con presión constante por elemento, como la aquí utilizada, no es la más indicada para el análisis de estados de deformación fuertemente no homogéneos. Sería preferible el uso de, por ejemplo, elementos cuadráticos de 8 o 9 nodos con 4 nodos de presión (elementos u-p). En las referencias Sussman & Bathe (1987) y Bathe (1996) se analizan varios elementos desplazamiento/presión y su desempeño en el análisis de materiales incompresibles.

No obstante la limitación mencionada, en esta sección se demuestra que la presente formulación no bloquea durante el análisis en caso de deformación no homogénea.

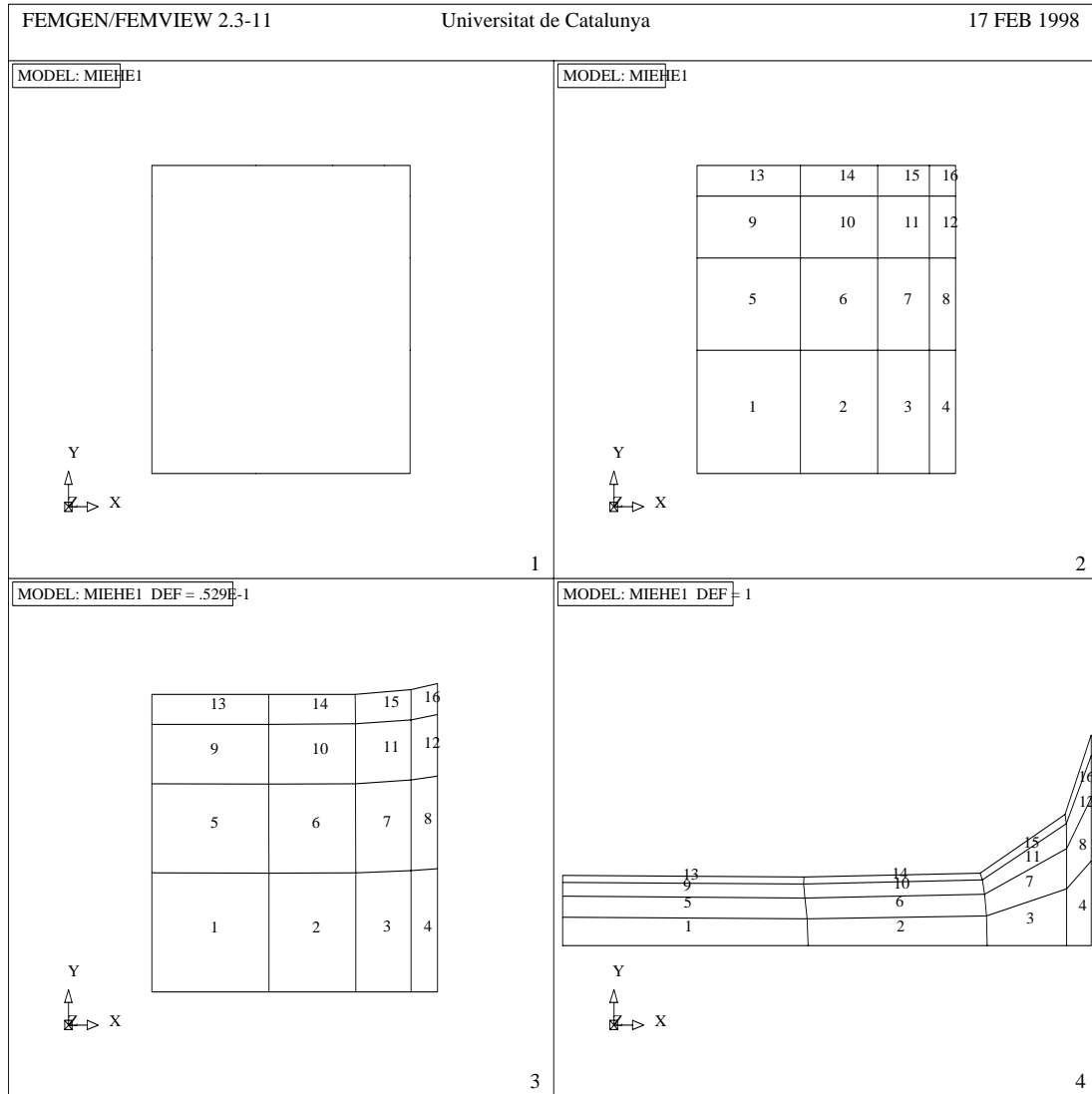
Para ello se analiza, en primer lugar, el problema de la figura 5.2. El panel (figura 5.2(1)), de espesor unitario, empotrado en su extremo izquierdo es discretizado utilizando una malla de  $8 \times 8$  elementos finitos (figura 5.2(2)) de 4 nodos y  $2 \times 2$  puntos de integración, con presión constante por elemento y sometido a una fuerza de cortante en su extremo derecho. Esta fuerza es aplicada en forma puntual en los nodos, en cinco pasos iguales hasta alcanzar el valor final  $F = 0.1$  kg. El algoritmo aplicado en la solución del sistema no lineal es Full Newton-Raphson, consiguiendo la convergencia en una media de 7.8 iteraciones, para una deformación volumétrica  $(J - 1) = 0.002$ . El resultado, desplazamiento vertical del punto medio del extremo derecho, 11.5 cm, coincide con el publicado por Miehe



**Figura 5.2** Panel en deformación plana no homogénea. 1-Geometría del problema, 2-Discretización, 3-Posición original y deformada, 4-Deformada de la malla para  $F = 0.1$  kg.

(1994) para una discretización de 8 elementos (Q1/P0) por lado utilizando los parámetros materiales indicados en (5.45).

A continuación se analiza un bloque de caucho que se supone empotrado en ambos lados, izquierdo y derecho, y libre en dirección vertical (figura 5.3(1)). Dada la simetría del problema sólo se discretiza una cuarta parte del bloque (figura 5.3(2)). En los lados empotrados se imponen desplazamientos hasta alcanzar tres



**Figura 5.3** Deformación no homogénea. 1-Geometría del problema, 2-Discretización, 3-Deformada (configuración intermedia), 4-Deformada (configuración final).

veces la dimensión original (estiramiento  $\lambda = 3$ ). Se imponen 20 incrementos de desplazamiento del 5% de la dimensión del lado en cada paso, hasta alcanzar estiramiento  $\lambda = 2$ , y 40 incrementos equivalentes a un 2.5% del lado para alcanzar la deformación final  $\lambda = 3$ .

El análisis se realiza en estado plano de deformación, considerando al material elástico, sin incluir componentes plásticas ni viscoelásticas. Como parámetros



materiales se utilizan los valores indicados en (5.45). En la figura 5.3(4) puede observarse que la deformación es marcadamente no homogénea, especialmente en el vértice que une un lado empotrado con uno libre. Para alcanzar la configuración final -figura 5.3(4)- con la presente formulación es necesario relajar la imposición de deformación a volumen cuasi constante, reduciendo el valor del módulo volumétrico ( $\kappa = 100$ ). De esta manera la fuerza necesaria para producir la deformación indicada en la figura 5.3(4) es coincidente con la publicada por Miehe (1994) para material compresible. Recuérdese que en el caso de deformación homogénea (apartado 5.3.1) la coincidencia con la respuesta teórica de material incompresible se da utilizando un valor  $\kappa = 10000$ .

El número de iteraciones necesario para alcanzar la convergencia varía de 12 iteraciones en los primeros pasos de carga a 61 iteraciones en los últimos.

### 5.3.3 Dispositivo de apoyo

En esta sección se analiza un dispositivo de apoyo de caucho laminado constituido por varias capas de elastómero y acero. Las características geométricas del dispositivo se toman de la referencia Kelly (1991b) y son las indicadas en la figura 2.9 de página 26. El dispositivo está formado por 22 capas de elastómero de 2 mm de espesor y 21 capas de acero de 0.8 mm. La sección transversal es circular con un diámetro de 24 cm.

Resultados de ensayos experimentales realizados en el *Earthquake Engineering Research Center* de la Universidad de California en Berkeley son publicados en la citada referencia (Kelly 1991b) y analizados en esta monografía en la Sección 2.5. Estos ensayos consisten en ciclos de deformación a esfuerzo cortante de amplitud creciente desde un 5% hasta un 350% de deformación cortante. Estas deformaciones se consideran en referencia al espesor total de elastómero (44 mm). Posteriormente se ensaya el dispositivo con carga monótona cuasi estática hasta la rotura. En la Sección 2.5 puede verse una descripción más detallada de estos ensayos.

El modelo numérico que aquí se analiza es el indicado en la figura 5.4. A efectos de reducir el número de variables del problema se discretiza la altura total de elastómero en 6 capas de 0.75 cm y el acero en 5 capas 0.30 cm. La altura total del modelo (6.00 cm), excluyendo las placas externas, es similar a la del dispositivo (6.08 cm), así como la relación entre ambos materiales. Respecto a la sección transversal, el dispositivo de apoyo (figura 2.9) es obviamente axisimétrico, pero las cargas de ensayo (corte), así como las cargas reales a las cuales estará sometido en caso de un terremoto, no lo son. Y dada la relación altura de capa de elastómero respecto a sección transversal, las capas de acero impiden cualquier deformación de la caucho en el plano  $z$  perpendicular a aquel de la deformación cortante  $x - y$ . Por ello se realiza este análisis numérico utilizando estado plano de deformación.

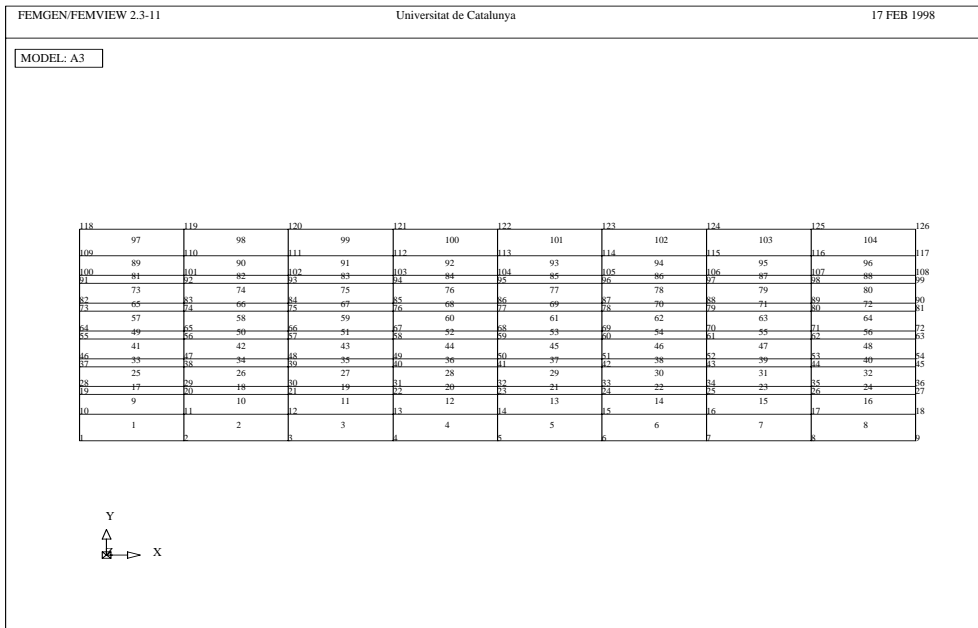


Figura 5.4 Modelo ensayado.

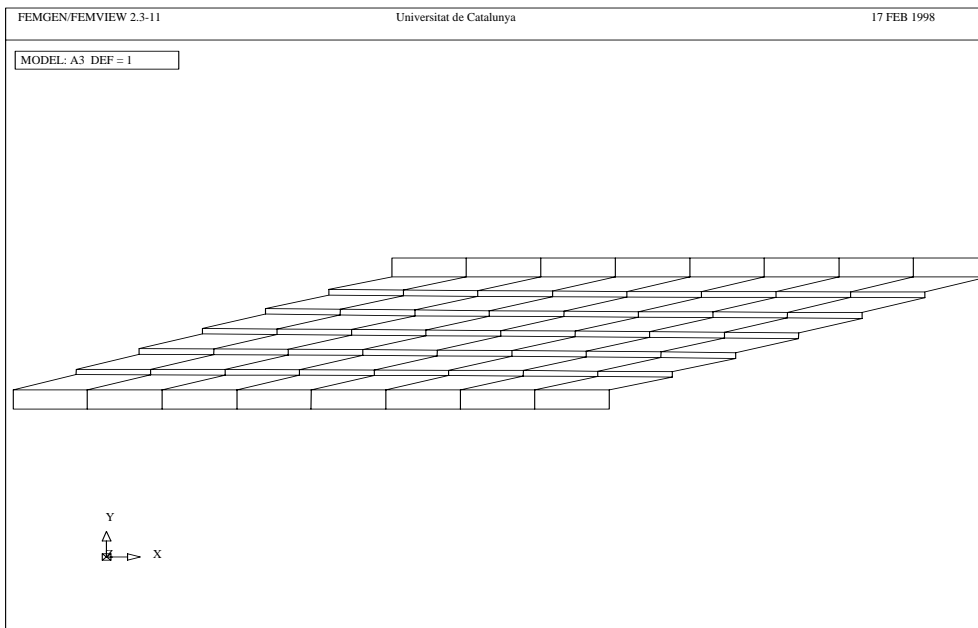


Figura 5.5 Deformada del modelo ensayado.

Se establece el ancho del modelo igual al diámetro del dispositivo, 24.0 cm, y una dimensión  $z$  de 18.85 cm, con lo cual la superficie transversal del modelo es equivalente a la del dispositivo, esto es  $452.4 \text{ cm}^2$ .

En un primer ensayo se modela el elastómero como viscoelástico. Los parámetros elásticos utilizados son los siguientes (véase la nomenclatura en la ecuación 5.44):

$G$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\mu_1^*$	$\mu_2^*$	$\mu_3^*$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
4.5	1.03	0.002	-0.02	1.9	5.9	-1.6

Con estos parámetros se analiza el modelo a corte imponiendo desplazamientos horizontales monótonamente crecientes en la placa de acero superior. Se aplican pasos de desplazamiento relativo de 0.254 cm, con un incremento de tiempo de 0.1 s, hasta alcanzar un desplazamiento de 25.4 cm (*10 pulgadas*, Kelly 1991) a los 10 s. Esta velocidad de carga puede considerarse cuasi estática. Para el tiempo de relajación del material se utiliza un valor  $\tau = 0.5$  (véase la Sección 3.5).

En la figura 5.5 se presenta la deformada del modelo. El número de iteraciones para lograr la convergencia varía de 2 en los primeros pasos de carga a 3 en los últimos. Esta convergencia se logra con un módulo volumétrico  $\kappa = 10000$  y una tolerancia en fuerzas de 0.1.

Transformando los desplazamientos horizontales en deformación de corte equivalente (respecto a la altura total de elastómero) y dividiendo la fuerza total necesaria para lograr estos desplazamientos por la superficie transversal del dispositivo, para obtener tensiones tangenciales, el diagrama resultante se grafica en la figura 5.6.

En la figura 5.7 puede verse la respuesta experimental obtenida por Kelly (1991*b*) y en las figuras 5.8 y 5.9 se presentan otros resultados experimentales (SMiRT11 1991) obtenidos con dispositivos de caucho natural y de alto amortiguamiento respectivamente. Los resultados experimentales que aquí se presentan, a efectos de su comparación con los resultados numéricos, son los mismos que han sido analizados en la Sección 2.5.

Comparando el diagrama tensión-deformación de la figura 5.6 con los resultados experimentales de las figuras 5.7, 5.8 y 5.9 puede observarse:

- El modelo numérico desarrollado, con los parámetros materiales aquí utilizados, consigue reproducir razonablemente bien la forma de diagramas tensión-deformación experimentales hasta deformaciones de rotura.
- Dispositivos de caucho natural presentan una respuesta casi lineal hasta deformaciones de un 200%. Este rango de deformaciones es aproximado correctamente por el modelo numérico. Los dispositivos de alto amortiguamiento presentan en cambio una mayor rigidez inicial. Esta no-linealidad inicial

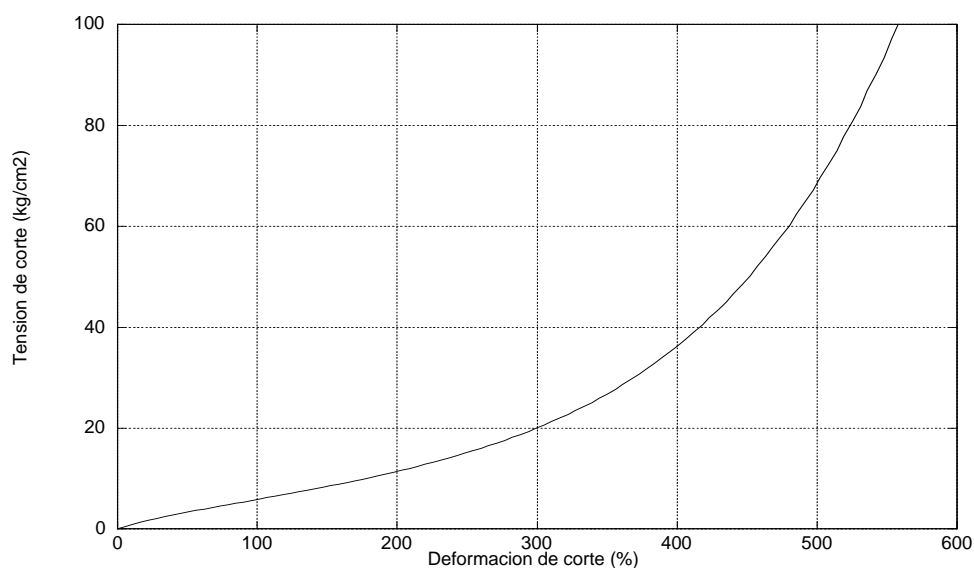


Figura 5.6 Diagrama tensión tangencial-deformación de corte. Modelo numérico.

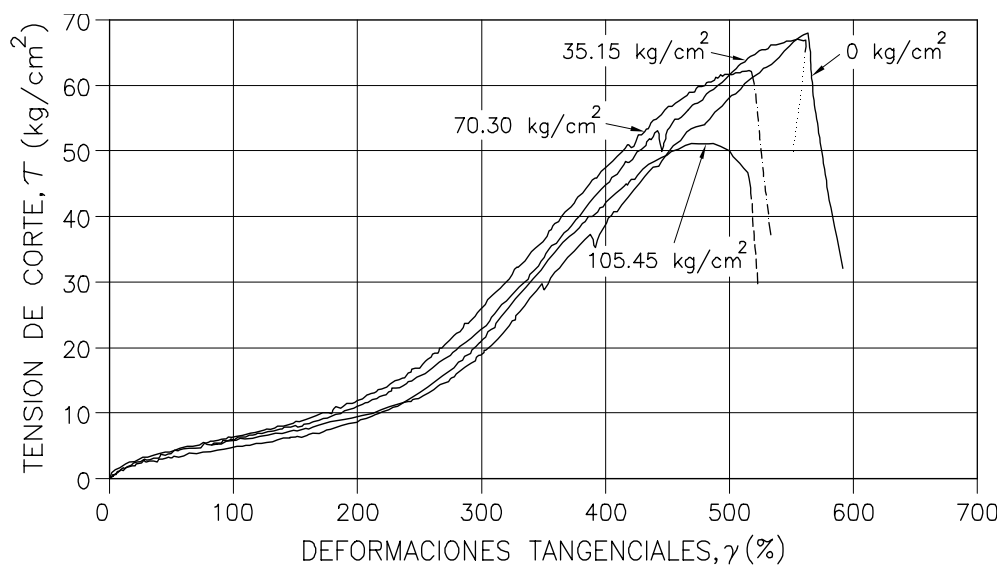
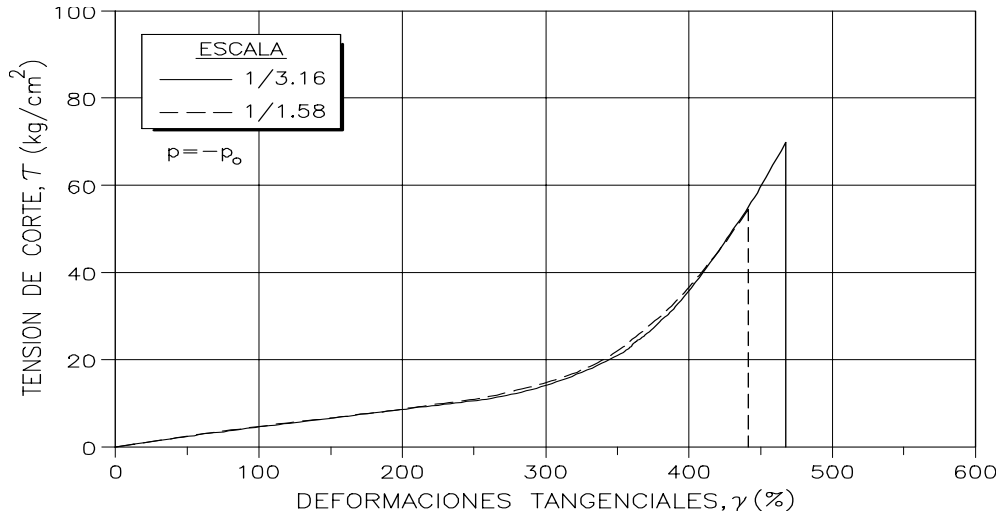
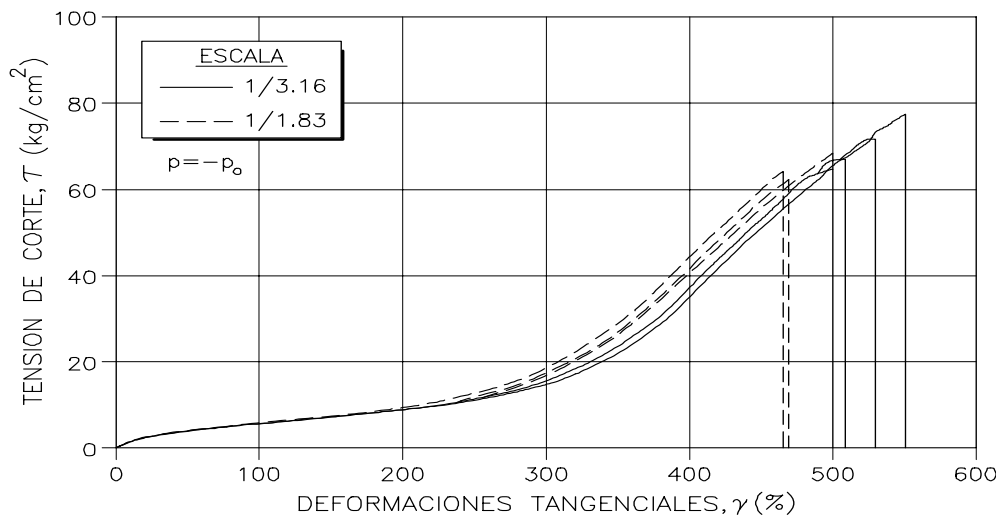


Figura 5.7 Diagrama tensión tangencial-deformación de corte experimental con dispositivos de alto amortiguamiento (Kelly, 1991).



**Figura 5.8** Diagramas tensión-deformación para fuerza horizontal monótona cuasi estática hasta la rotura. Dispositivos de caucho natural (SMiRT11, 1991) en escala reducida (1/1.58 y 1/3.16).  $P$  = Carga vertical de ensayo,  $P_o$  = Carga vertical de servicio.



**Figura 5.9** Diagramas tensión-deformación para fuerza horizontal monótona cuasi estática hasta la rotura. Dispositivos de alto amortiguamiento (SMiRT11, 1991) en escala reducida (1/1.83 y 1/3.16).  $P$  = Carga vertical de ensayo,  $P_o$  = Carga vertical de servicio.

(deformaciones menores a un 25%) no se refleja en el modelo numérico al trabajar con un módulo de corte  $G$  constante. En la figura 2.11 puede verse la variación del módulo  $G$  con la deformación por cortante, obtenida de resultados experimentales.

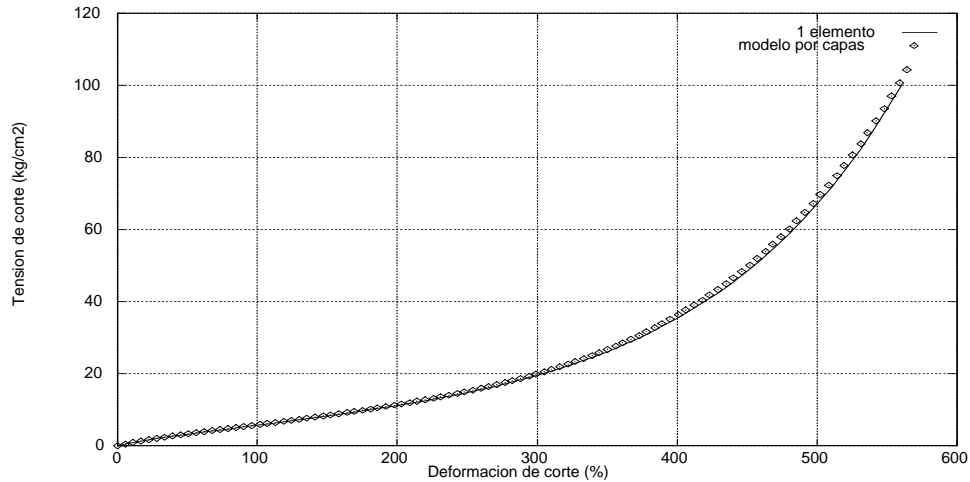
- Más allá de un 300% de deformación los resultados experimentales muestran un fuerte incremento de tensiones. Tal incremento también se observa en el modelo numérico, si bien algo menos pronunciado.
- En el rango de deformaciones de rotura, entre 450% y 550% de deformación, el comportamiento de dispositivos de caucho natural es frágil (véase la figura 2.26), mientras el de dispositivos de alto amortiguamiento puede ser algo más dúctil (véase las figuras 2.28 y 2.27). En este rango de deformaciones el modelo numérico aproxima el comportamiento de dispositivos de caucho natural sin llegar a estimar la tensión de rotura, ya que no se ha fijado en el modelo tal límite. Esta tensión de rotura puede variar aproximadamente entre los 50 y 75 kg/cm<sup>2</sup> (véase el apartado 2.5.3), dependiendo fundamentalmente de la composición del caucho y en menor medida de la presión vertical. El material utilizado en el dispositivo de apoyo de la figura 2.9 es designado por el fabricante, Bridgestone (Japón), como KL401 compuesto por una mezcla de caucho natural y sintético con aproximadamente un 31% de agregados.

Por otra parte, si se compara la respuesta en tensiones tangenciales del dispositivo modelado por capas, figura 5.6, con la respuesta de un único elemento de dimensiones equivalentes a la componente elastómero del modelo (altura= 4.5 cm, ancho= 24.0 cm), e iguales propiedades mecánicas, se obtiene el gráfico de la figura 5.10. No se observa diferencia significativa en todo el rango de deformaciones; por ello:

A efectos de reducir el número de grados de libertad asociado a discretizar los dispositivos de apoyo por capas alternas de elastómero y acero, un único elemento de sección equivalente e iguales propiedades mecánicas al elastómero del dispositivo puede ser utilizado en el análisis numérico de estos dispositivos sometidos a deformaciones de cortante.

#### 5.3.4 Control de volumen

En la sección anterior se analiza la respuesta de un dispositivo de apoyo de caucho laminado sometido a deformaciones de cortante, impidiendo las deformaciones verticales por condiciones de vínculo, por lo cual no puede apreciarse la respuesta de la formulación en lo referente a una deformación a volumen cuasi constante.



**Figura 5.10** Diagramas tensión tangencial - deformación de corte. Modelo por capas y elemento único.

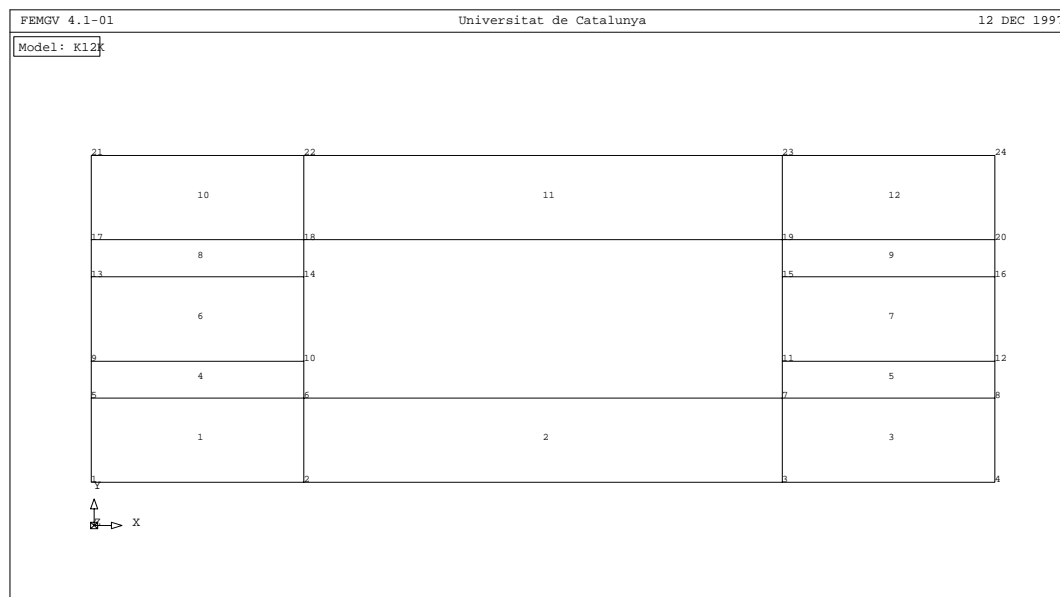
Con este objetivo se plantea aquí un ensayo donde cuatro bloques de caucho, elementos 4-5 y 8-9 en la figura 5.11, se colocan entre placas de acero, elementos 1 a 3, 6-7 y 10 a 12, y se imponen desplazamientos horizontales en las placas centrales de acero, elementos 6-7, con libertad de movimientos en dirección vertical. Las dimensiones de cada bloque de caucho son equivalentes a la suma de láminas de elastómero del dispositivo analizado en la sección anterior; altura 4.4 cm, ancho 24.0 cm, profundidad 18.85 cm.

El modelo constitutivo del material que aquí se utiliza tiene las mismas características hiperelásticas del apartado anterior (nomenclatura según la ecuación 5.44):

$G$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\mu_1^*$	$\mu_2^*$	$\mu_3^*$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
4.5	1.03	0.002	-0.02	1.9	5.9	-1.6

A efectos de asegurar una deformación a volumen cuasi constante se utiliza un módulo volumétrico suficientemente alto,  $\kappa = 10000$ . No se observan problemas por mal condicionamiento del sistema de ecuaciones a causa de este valor.

La componente plástica se obtiene de considerar una tensión de fluencia  $\sigma_Y = 3.06$  kg/cm<sup>2</sup>. Endurecimientos isotrópico y cinemático son considerados nulos. Para el tiempo de relajación del material se utiliza un valor  $\tau = 0.0432$  (véase la Sección 3.5). La historia de desplazamientos impuestos puede observarse en la figura 5.12 y corresponde a deformaciones de corte de:  $\pm 25, \pm 50, \pm 100, \pm 200, \pm 300$  y  $\pm 400\%$ . La frecuencia se mantiene igual a 0.5 Hz. Esta frecuencia es la co-



**Figura 5.11** Modelo ensayado.

respondiente al comportamiento dinámico de los dispositivos de aislamiento (Kelly 1991b, SMiRT11 1991)

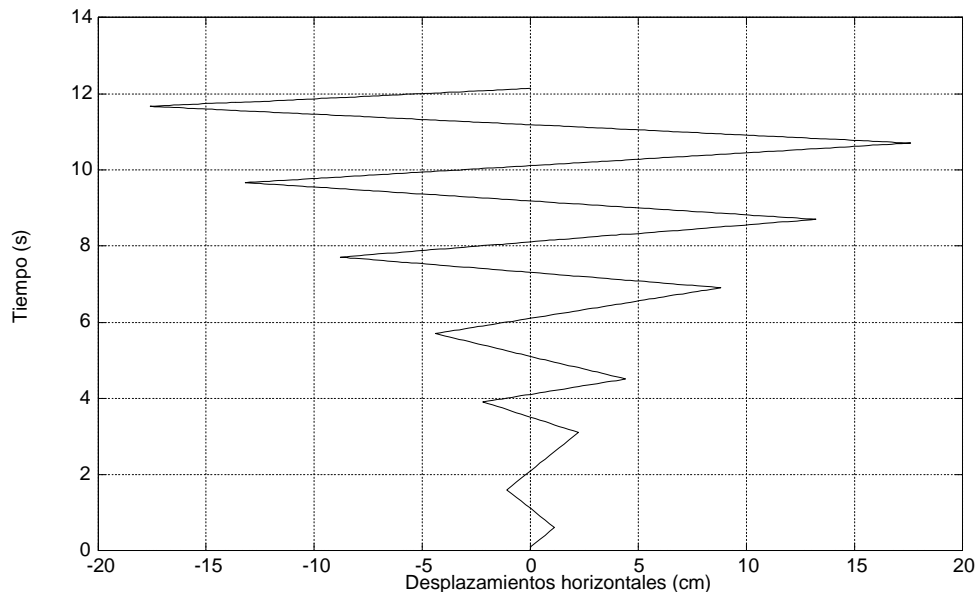
La respuesta en tensiones tangenciales se indica en la figura 5.13. Para 400% de deformación por esfuerzo de corte el desplazamiento vertical obtenido (0.035 cm) representa una variación de volumen del orden de 0.4%, por lo que puede ser considerado cuasi-incompresible.

### 5.3.5 Caucho natural y de alto amortiguamiento

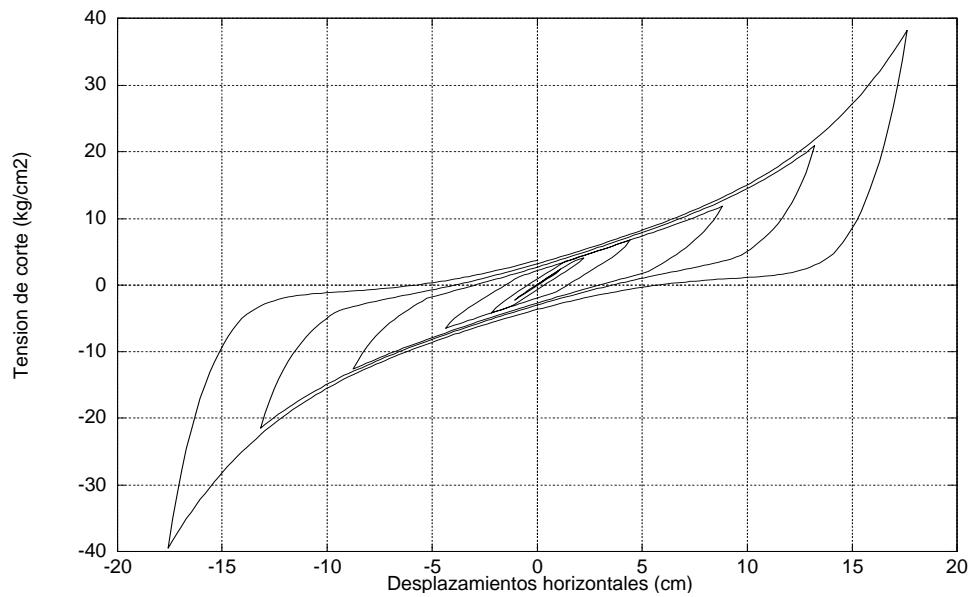
En la referencia (SMiRT11 1991) se publican los resultados de una serie de ensayos experimentales realizados con dispositivos de aislamiento sísmico. Entre los dispositivos elastoméricos, se ensayan dispositivos de caucho natural (*NRB = Natural Rubber Bearing*) y de alto amortiguamiento (*HRB = High Damping Rubber Bearing*). Parte de los resultados de dichos ensayos son analizados en esta monografía en la Sección 2.5. Las características geométricas y mecánicas de los dispositivos ensayados, que aquí se analizan numéricamente, son las indicadas en la figura 2.10 de página 27.

Con el objetivo de determinar su rigidez horizontal y su amortiguamiento, al igual que confirmar similitudes entre modelos a escala real y modelos a escala reducida, estos dispositivos de apoyo fueron ensayados (SMiRT11 1991) bajo carga cíclica de baja frecuencia (0.01 Hz). Esta frecuencia puede considerarse correspondiente a cargas cuasi estáticas. Sobre los modelos a escala real se aplicaron





**Figura 5.12** Historia de desplazamientos impuestos.



**Figura 5.13** Tensiones tangenciales.

cuatro ciclos de desplazamiento horizontal sinusoidal con carga vertical constante y amplitud variable entre un  $\pm 25\%$  y un  $\pm 200\%$  de deformación cortante. Estos porcentajes de deformación cortante se refieren a la altura total de la componente elastomérica de los dispositivos. Sobre los modelos a escala reducida (1/1.58 para dispositivos de caucho natural y 1/1.83 para dispositivos de alto amortiguamiento) la amplitud de los ciclos de desplazamiento horizontal se extiende hasta  $\pm 400\%$  y después se imponen desplazamientos horizontales hasta alcanzar la rotura de los dispositivos.

En el análisis numérico se utiliza el modelo de elemento único equivalente (véase la Sección 5.3.3), con un ancho igual al diámetro del dispositivo y un espesor tal de conseguir una sección transversal equivalente. La altura del elemento que se considera en el análisis es la correspondiente a la suma de todas las láminas de caucho del dispositivo.

En el análisis de los dispositivos de caucho natural (*NRB*) el modelo material aquí utilizado incluye sus partes hiperelástica y viscoelástica. La parte plástica del modelo se adiciona a las anteriores en el análisis de dispositivos de alto amortiguamiento (*HRB*). Los parámetros utilizados en el modelo hiperelástico, comunes para ambos casos (*NRB* y *HRB*), son los siguientes (nomenclatura según la ecuación 5.44):

$G$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\mu_1^*$	$\mu_2^*$	$\mu_3^*$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
4.5	1.03	0.002	-0.02	1.9	5.9	-1.6

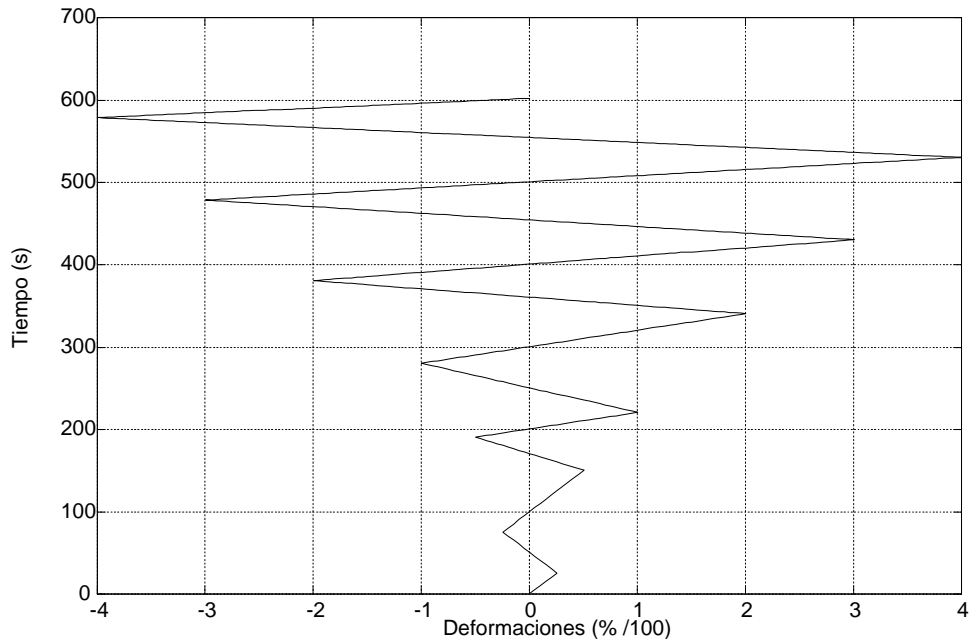
Para el tiempo de relajación (Sección 3.5) se utiliza un valor  $\tau = 0.5$  en el análisis de los dispositivos de caucho natural (*NRB*), y  $\tau = 0.9$  en el análisis de dispositivos de alto amortiguamiento (*HRB*).

La parte plástica del modelo, utilizada sólo en el caso de dispositivos de alto amortiguamiento, se obtiene al considerar una tensión de fluencia  $\sigma_y = 3.06$  kg/cm<sup>2</sup>, con endurecimientos isotrópico y cinemático nulos.

El análisis numérico se realiza imponiendo desplazamientos horizontales cíclicos, de amplitud variable entre  $\pm 25\%$  y  $\pm 400\%$  y frecuencia constante e igual a 0.01 Hz, tal lo indicado en la figura 5.14.

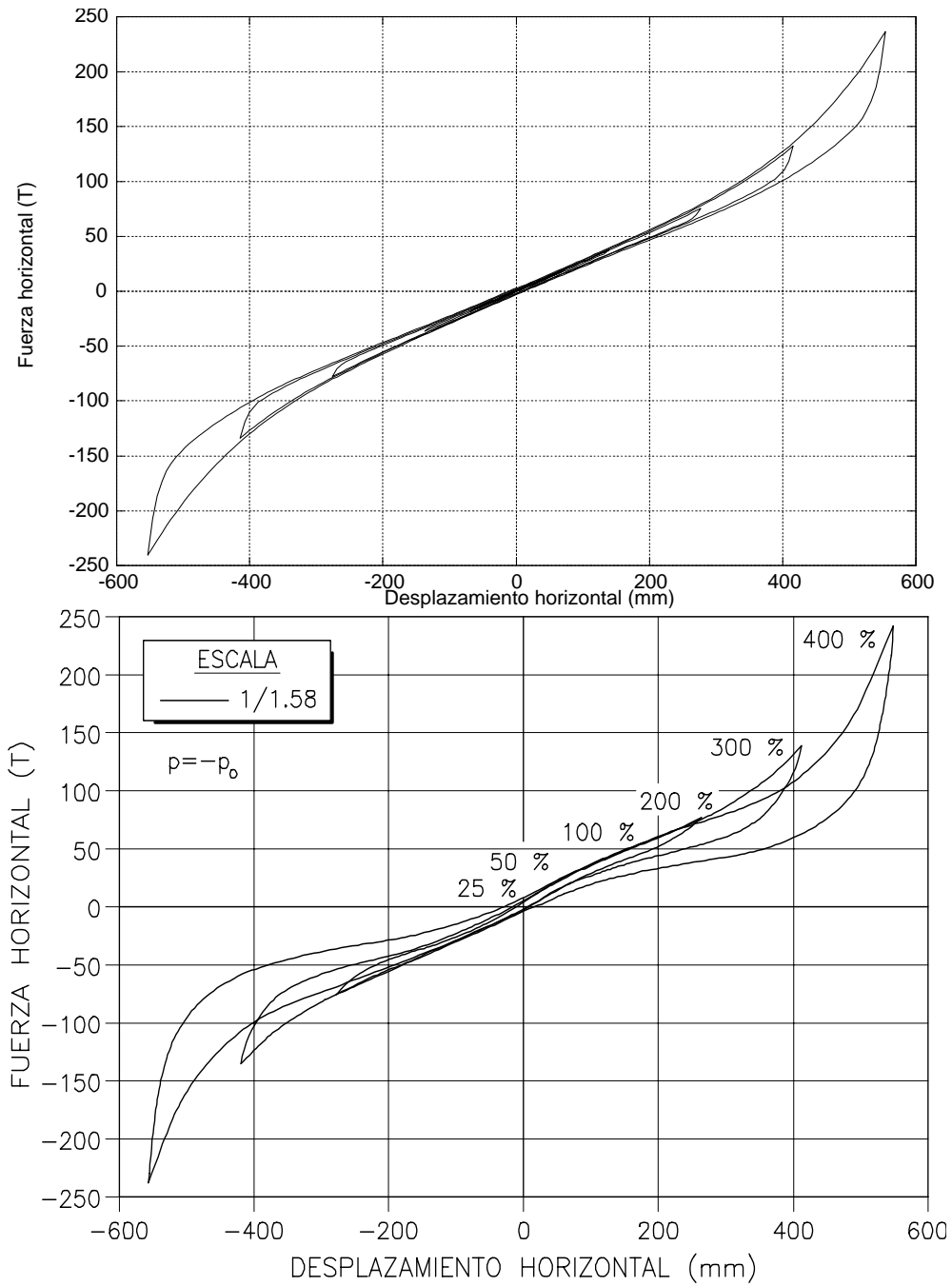
En las figuras 5.15 y 5.16 se comparan las respuestas numéricas de este análisis con las experimentales (SMiRT11 1991). De estas se obtienen las siguientes conclusiones:

- Dispositivo de caucho natural.
  - El modelo desarrollado, con los parámetros materiales aquí utilizados, consigue reproducir correctamente la forma del diagrama fuerza-desplazamiento. Este resultado se consigue utilizando sólo las componentes elástica y viscoelástica del modelo.

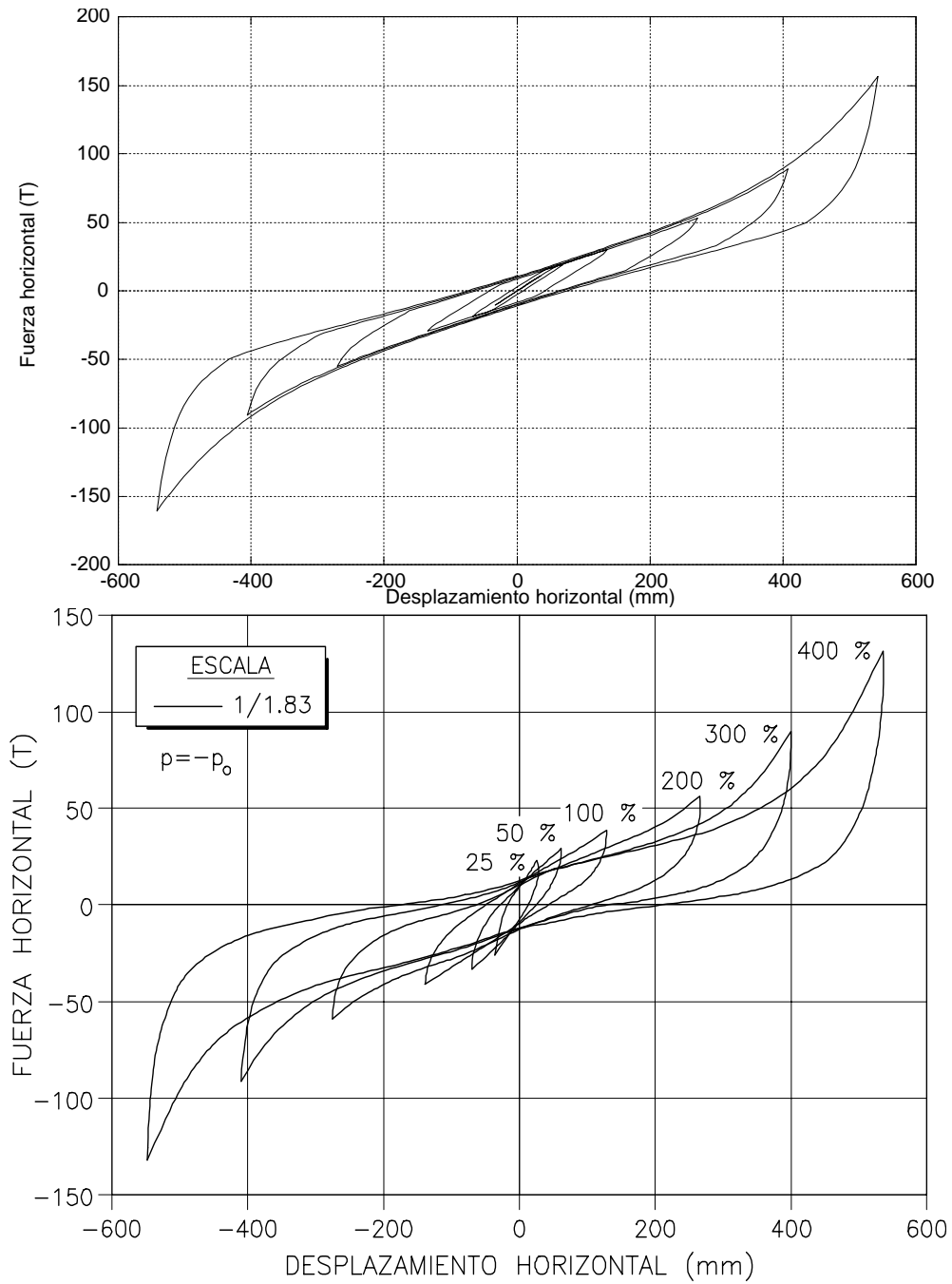


**Figura 5.14** Desplazamientos impuestos,  $T = 100$  s.

- Los picos de tensiones máximas para toda la historia de desplazamientos, con deformaciones de corte de hasta  $\pm 400\%$ , son capturados de forma exacta por el modelo propuesto.
  - El fenómeno de degradación, esto es la pérdida de rigidez del caucho para ciclos de deformación de amplitud superior a la alcanzada en ciclos previos, no puede ser capturado por el modelo numérico al no haberse incluido en el análisis la componente de daño del modelo material.
  - La disipación energética del modelo numérico, bucle de histeresis, es algo inferior a la observada en los resultados experimentales
- Dispositivo de alto amortiguamiento.
    - La forma global del diagrama fuerza-desplazamiento experimental es aproximado por la simulación numérica, utilizando las componentes elástica, viscoelástica y plástica del modelo material.
    - Con los parámetros materiales utilizados, el modelo captura con exactitud los picos de tensión en la zona central del diagrama (deformaciones del orden de  $\pm 200\%$  y  $\pm 300\%$ ). Para deformaciones menores, de hasta  $\pm 100\%$ , el modelo numérico estima las tensiones por defecto; y para deformaciones mayores,  $\pm 400\%$ , la estimación es por exceso.



**Figura 5.15** Dispositivo de caucho natural. Comparación de resultados numéricos (superior) con experimentales —SMiRT11 modelo a escala 1/1.58— (inferior).



**Figura 5.16** Dispositivo de alto amortiguamiento. Comparación de resultados numéricos (superior) con experimentales —SMiRT11 modelo a escala 1/1.83— (inferior).

- El no poder capturar con exactitud los picos de tensiones en todo el rango de deformaciones ( $\pm 25\%$  a  $\pm 400\%$ ), señalado en el punto anterior, se debe a la muy fuerte degradación de rigidez de este material (véase la figura 5.16, curva experimental). Esta degradación no es capturada por el modelo numérico al no haberse incluido en el análisis la componente de daño del modelo material.
- Los resultados experimentales indican una mayor disipación energética, con relación a dispositivos de caucho natural. Esta mayor amplitud de los bucles de histéresis se consigue aproximar razonablemente bien en la simulación numérica con la incorporación de la componente plástica del modelo material, y una mayor participación de la componente viscoelástica ( $\tau : 0.5 \rightarrow 0.9$ ).

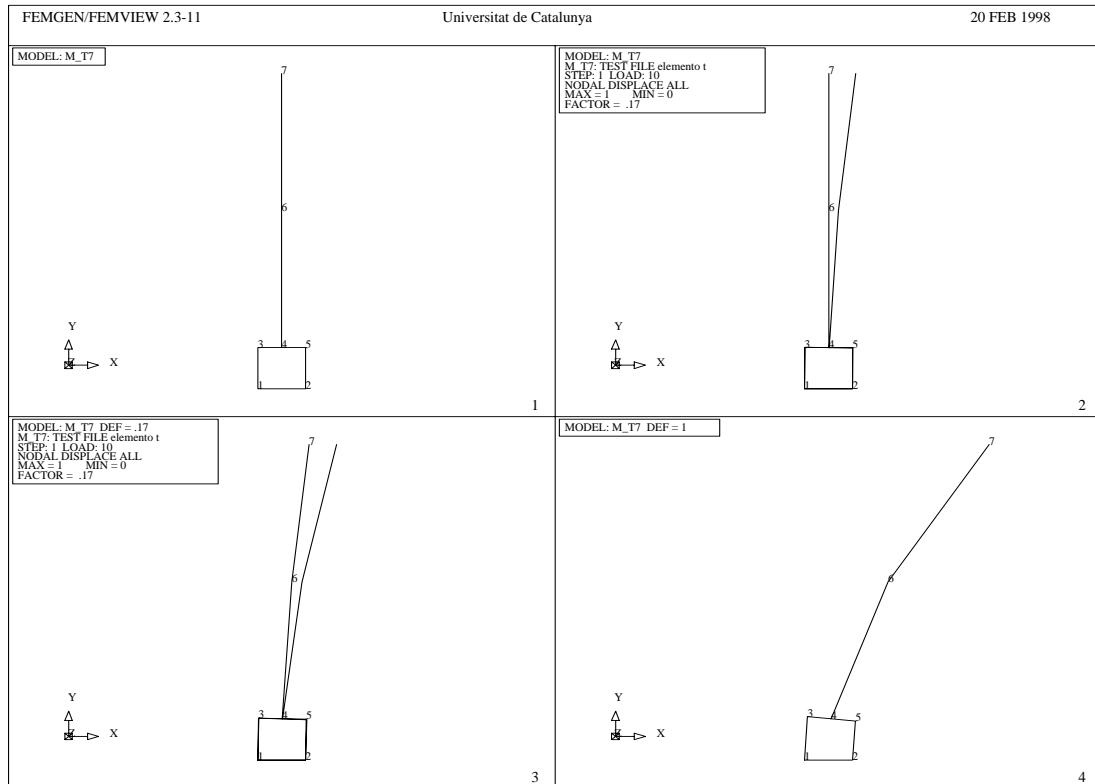
### 5.3.6 Elemento de conexión

En esta sección se analiza el comportamiento del elemento de conexión analizado en la Sección 4.6. Se trata del trabajo conjunto de un elemento de estado plano de deformación, de 4 nodos con  $2 \times 2$  puntos de integración, y un elemento de barra de Timoshenko de 3 nodos con 2 puntos de integración. La sección transversal del elemento barra se discretiza por capas (6 capas de igual espesor). Se utiliza un modelo constitutivo elástico para ambos elementos. Todos los casos se resuelven considerando grandes deformaciones elásticas.

En primer lugar se trata el caso graficado en la figura 5.17. Este caso reproduce un sistema pilar-base. Se fijan los nodos 1 y 2 del elemento plano (base) y se imponen desplazamientos horizontales en el extremo libre de la barra (nodo 7). Este tipo de esfuerzo es el que se presentaría en estructuras aporricadas de base fija afectadas por un movimiento sísmico. A efectos de comprobar la respuesta del sistema frente a casos extremos, se impone un desplazamiento horizontal igual al 50% de la longitud del pilar. Este desplazamiento (100.0 cm) se impone en un único paso de carga y se consigue la convergencia en 4 iteraciones.

A continuación se ensaya este elemento de conexión en una posición no convencional, formando un ángulo de  $45^\circ$  con respecto al eje horizontal, tal como se indica en la figura 5.18. Se suponen fijos los nodos 1 y 2, y se imponen desplazamientos en el extremo libre de la barra (nodo 7), -10.0 cm en dirección X y -10.0 cm en dirección Y. El desplazamiento impuesto es coincidente con el eje longitudinal del elemento barra.

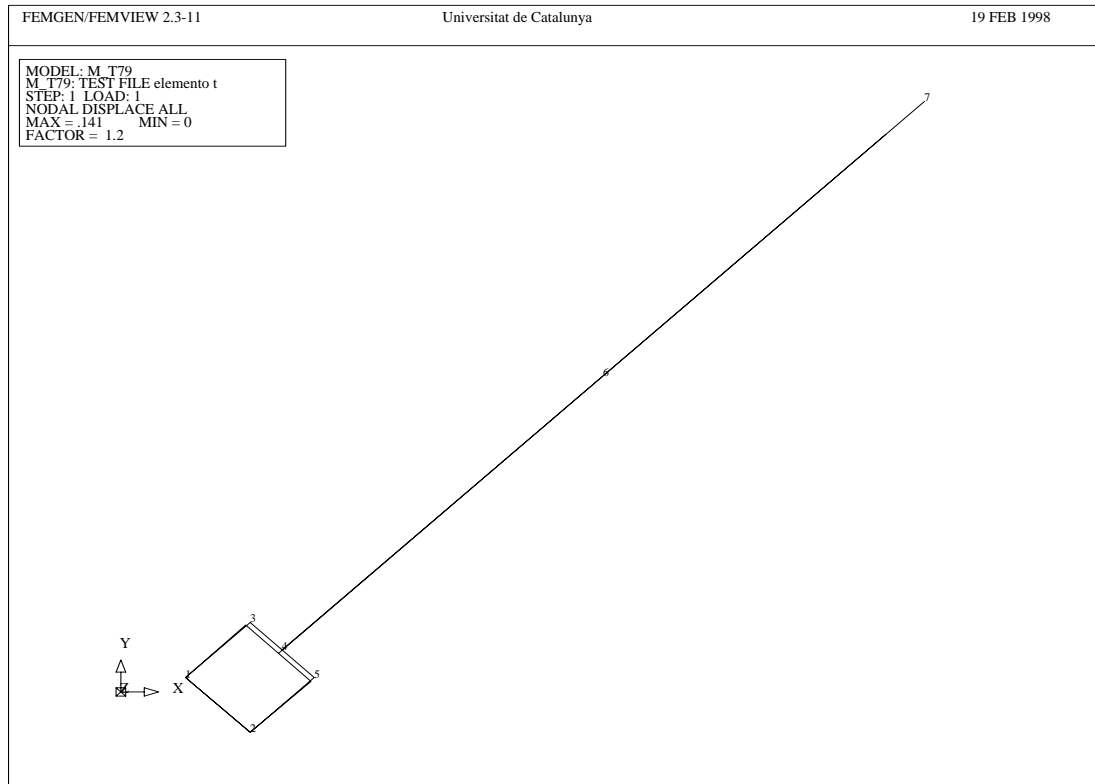
El estado final de deformación y las tensiones producidas por este desplazamiento impuesto, que se transcribe a continuación, indican un correcto comportamiento del sistema. Obsérvese las igualdades en los desplazamientos  $u_4 = v_4, u_3 = v_5, u_5 = v_3$  y la ausencia de giro en los nodos del elemento barra.



**Figura 5.17** Elemento de conexión. Desplazamiento impuesto en nodo 7:  $x = 100.0$  cm.

```

0  DI SPLACEMENTS
0  NODO      X-DESP.      Y-DESP.
      1  0.000000E+00  0.000000E+00
      2  0.000000E+00  0.000000E+00
      3 -0.106236E-01 -0.751423E-02
      4 -0.906890E-02 -0.906890E-02 -0.659316E-16
      5 -0.751423E-02 -0.106236E-01
      6 -0.545344E-01 -0.545344E-01 -0.236446E-16
      7 -0.100000E+00 -0.100000E+00  0.155414E-15
0  REACCIONES
0  NODO      X-REAC.      Y-REAC.      M-REAC.
      1  0.471931E+04  0.336718E+04
      2  0.336718E+04  0.471931E+04
      7 -0.868023E+04 -0.868023E+04  0.000000E+00
.....
-----> ELEMENT NO. = 1 ,
    
```



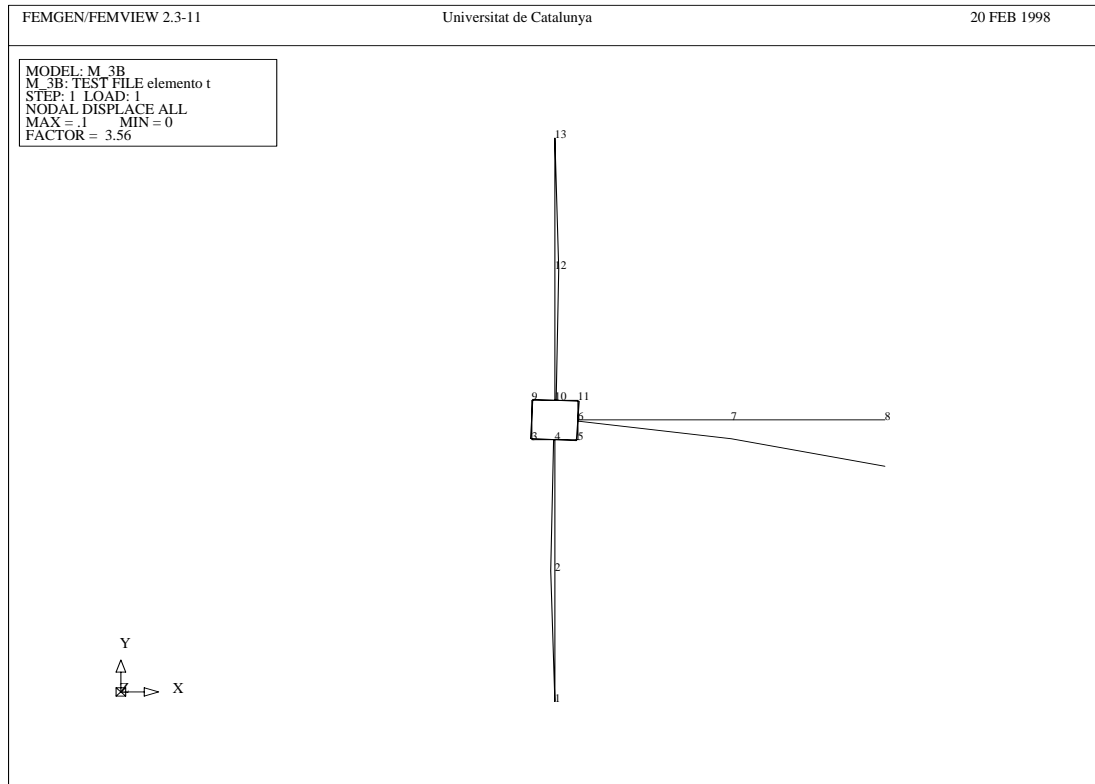
**Figura 5.18** Elemento de conexión. Desplazamientos impuestos en nodo 7:  $x = y = -10.0$  cm.

0 G. P.	XX-STRESS	YY-STRESS	XY-STRESS
1 0 0	-0.875523E+05	-0.775924E+05	-0.553476E+05
2 0 0	-0.676117E+05	-0.574727E+05	-0.670457E+05
3 0 0	-0.775924E+05	-0.875523E+05	-0.553476E+05
4 0 0	-0.574727E+05	-0.676117E+05	-0.670457E+05

-----> ELEMENT NO. = 2 ,			
0 G. P.	ESF. AXIAL	ESF. CORTE	MOM. FLECT
1 0 0	-0.122757E+05	-0.541723E-12	-0.198952E-12
2 0 0	-0.122757E+05	0.156060E-12	0.284217E-13





**Figura 5.19** Elemento de conexión. Desplazamiento impuesto en nodo 8:  $x = -10.0$  cm.

El elemento de conexión que aquí se presenta puede tener aplicaciones mas allá de modelar sistemas base-pilar. A efectos de ilustrar una posible aplicación se presenta el caso de la figura 5.19, donde tres elementos de barra de Timoshenko se unen al elemento de estado plano en los puntos medios de tres de sus lados. Se impone un desplazamiento vertical de  $-10.0$  cm en el extremo libre de la barra horizontal (nodo 8 en figura 5.19).



# 6

## ANÁLISIS SÍSMICO DE EDIFICIOS CON AISLAMIENTO DE BASE

### 6.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo está dedicado a la aplicación de los modelos desarrollados en los Capítulos 3 y 4 al análisis dinámico de edificios con aislamiento elastomérico de base. Los objetivos básicos son dos. En primer lugar, verificar el correcto funcionamiento de los modelos propuestos actuando en conjunto, esto es análisis simultáneo de estructura y sistema de aislamiento. En segundo lugar, comparar las respuestas de estructuras con las mismas características geométricas y mecánicas, unas con base fija y otras incorporando dispositivos de apoyo de elastómero laminado, cuando ambas son sometidas al mismo tipo de excitación dinámica.

Dos tipos de estructura son analizados. En primer término se calculan las respuestas de un pórtico de planta única, con y sin aislamiento sísmico de base, en vibración libre y frente a excitaciones armónicas de período próximo al fundamental de la estructura de base fija y próximo al fundamental de la estructura con aislamiento de base. Se busca con ello verificar numéricamente las observaciones hechas en la Sección 2.6.2. En la siguiente sección se comparan las respuestas de un edificio de seis niveles con aislamiento sísmico de base con las de un edificio de iguales características sin aislamiento sísmico, esto es, con base fija empotrada directamente en el terreno. Se analizan las respuestas de estas estructuras frente a la componente Norte-Sur del terremoto de El Centro (California) de 1940 utilizando los siguientes parámetros para evaluar la eficacia del sistema aislador: los desplazamientos del punto más alto de las estructuras respecto a la cimentación y a la base, los desplazamientos relativos máximos entre pisos, las aceleraciones

absolutas del punto más alto de las estructuras y los índices globales de daño de estas estructuras.

El tipo de dispositivo aislador que se utiliza en este capítulo es de elastómero laminado de alto amortiguamiento (*HRB*, *High Damping Rubber Bearing*) con las características mecánicas detalladas en la Sección 2.5 y modelado numéricamente en la Sección 5.3.5.

## 6.2 ESTRUCTURA DE UN NIVEL

En esta sección se comparan las respuestas de un pórtico de planta única con y sin aislamiento sísmico de base. La forma y las dimensiones estructurales se esquematizan en la figura 6.1. Sobre estas dos estructuras se realizaron los siguientes ensayos numéricos:

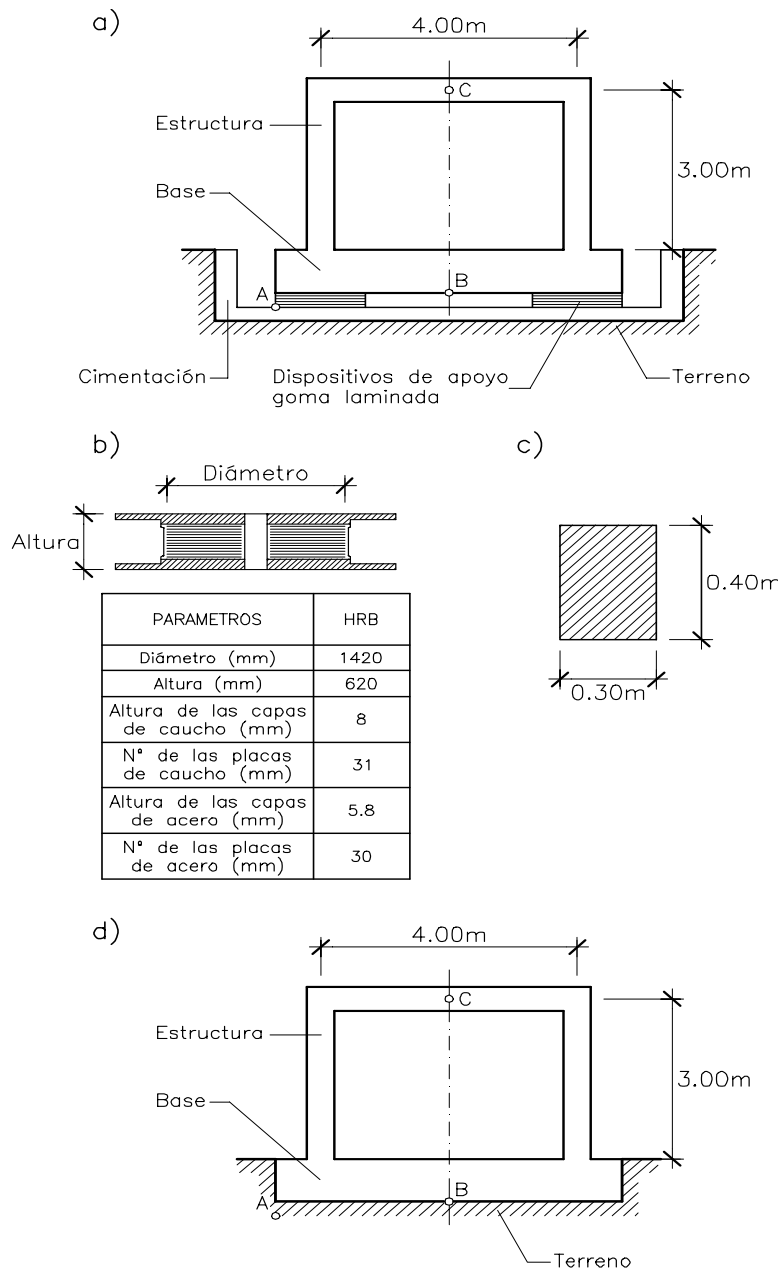
1. En primer termino y a efectos de determinar sus características dinámicas, se analizan ambas estructuras, con y sin aislamiento sísmico, en vibración libre. En el caso de la estructura con aislamiento de base se consideran dos alternativas para el material constitutivo de los dispositivos de apoyo: comportamiento elástico y viscoelástico plástico.
2. A continuación se analizan las respuestas de ambas estructuras, con y sin aislamiento sísmico, frente a una excitación armónica de período próximo al fundamental de la estructura de base fija (este período se determina en el punto anterior). Dicha excitación se utiliza para evaluar las características del sistema de aislamiento y tiene la forma

$$a(t) = A \sin(\theta t)$$

donde  $A$  es la amplitud y  $\theta$  la frecuencia angular.

Como parámetros para evaluar la eficacia del sistema aislador se utilizan los siguientes:

- *Los desplazamientos de la base respecto a la cimentación* (desplazamiento del punto B respecto al punto A en la figura 6.1a). Estos desplazamientos relativos son nulos en el caso de la estructura de base fija al considerar que la cimentación no desliza con respecto al terreno.
- *Desplazamientos totales y relativos del dintel*. Estos son los desplazamientos del dintel respecto a la cimentación (desplazamientos del punto C respecto al punto A en la figura 6.1a) y a la base (desplazamientos del punto C respecto al punto B en la figura 6.1a). En el caso de la estructura de base fija, al ser nulos los desplazamientos relativos entre



**Figura 6.1** Esquema de la estructura analizada. a) Estructura con aislamiento de base. b) Dispositivo de aislamiento. c) Sección transversal de pilares y dintel. d) Estructura de base fija.

los puntos A y B, los desplazamientos totales y relativos del dintel son los mismos (desplazamientos del punto C).

- *Las aceleraciones absolutas del dintel* (punto C en la figura 6.1a-d).

3. Por último se analizan las respuestas de ambas estructuras, con y sin aislamiento sísmico, frente a una excitación armónica de período próximo al fundamental de la estructura con aislamiento de base; dicho período se determina en el punto 1. Los parámetros utilizados para evaluar la eficacia del sistema aislador son los mismos del punto anterior: desplazamientos de la base respecto a la cimentación, desplazamientos totales y relativos del dintel y aceleraciones absolutas del dintel.

### 6.2.1 Descripción del modelo estructural

Se analiza una estructura tipo pórtico de una planta con una altura de 3 metros y un ancho de 4 metros (figura 6.1a-d). Se asigna a los elementos una sección transversal de altura igual a 40 cm y el ancho se fija en 30 cm.

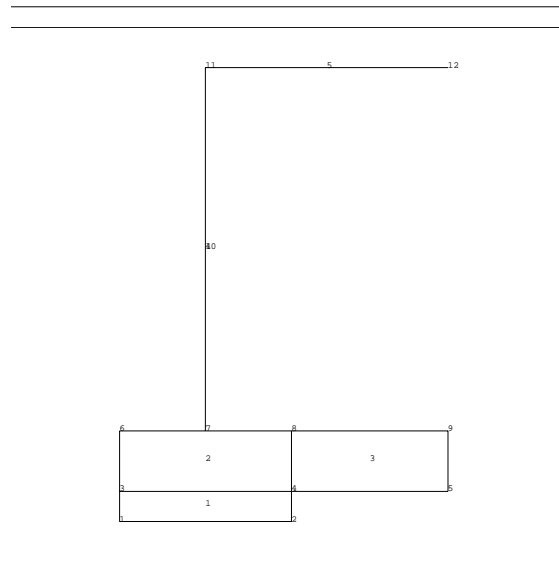
Las características geométricas y mecánicas del dispositivo aislador utilizado se toman de la referencia SMiRT11 (1991) correspondientes a un dispositivo elastomérico de alto amortiguamiento (HRB = high damping rubber bearing, ver figura 6.1b)

- Diámetro: 1420 mm
- Altura: 620 mm
- Espesor de las láminas de caucho: 8 mm
- Número de láminas de caucho: 31
- Espesor de las láminas de acero: 5.8 mm
- Número de láminas de acero: 30
- Carga vertical:  $P_0 = 500 T$
- Frecuencia natural, horizontal: 0.5 Hz

### Discretización por elementos finitos

Dada la simetría de la estructura, sólo se discretiza la mitad de la misma. El pilar y el dintel de la estructura se modelan con elementos finitos de barra 2D de Timoshenko discretizado por capas. Se utilizan elementos finitos cuadráticos de tres nodos (tres grados de libertad por nodo) con dos puntos de integración de Gauss y seis capas de igual altura e igual ancho para el elemento pilar y lineal de dos nodos para el elemento dintel.

La base y el dispositivo aislador se discretizan mediante elementos finitos planos de 4 nodos en estado plano de deformación. La utilización del elemento de conexión desarrollado en la Sección 4.6 y ensayado en la Sección 5.3.6, permite la



**Figura 6.2** Discretización por elementos finitos de la estructura analizada.

utilización conjunta de elementos planos (base) con elementos de barra (estructura). El elemento de conexión está formado por un elemento plano de la base (elemento 2, figura 6.2) y el elemento de barra del pilar.

Considerando las características geométricas especificadas para el dispositivo de apoyo, la sección transversal de éste es  $\pi \cdot \Phi^2/4 = 1.5837 \text{ m}^2$ . Dicha sección se modela en estado plano de deformación con un ancho igual al diámetro del dispositivo, 142 cm y un espesor de 111.53 cm, con lo que se consigue una sección transversal equivalente. La altura del dispositivo aislador que se considera en el modelo es la correspondiente a la suma de todas las láminas de caucho, es decir  $31 \times 0.8 = 24.8 \text{ cm}$ .

Tal como se señala en el apartado 5.3.3, la sección transversal de este dispositivo es axisimétrica, pero las cargas a las cuales está sometido, no lo son. Y, dada la relación de la altura de capa de elastómero respecto a la sección transversal, las capas de acero impiden cualquier deformación del caucho en el plano  $z$  perpendicular al plano de aplicación de cargas  $x - y$ . Por ello se realiza este análisis numérico utilizando estado plano de deformación. En el mismo apartado (5.3.3) se demuestra que la respuesta al esfuerzo cortante de un dispositivo modelado

mediante un único elemento de altura igual a la suma de todas las láminas de caucho, es la misma que se obtiene al modelar cada lámina de caucho mediante una capa de elementos finitos. Las condiciones de borde se fijan impidiendo los desplazamientos verticales y horizontales en los nodos 1 y 2 del dispositivo de apoyo (ver figura 6.2) y los desplazamientos verticales en los nodos 5 (base) y 12 (dintel).

A efectos de utilizar la misma discretización en el análisis de la estructura de base fija, además de las condiciones de borde antes mencionadas, en este caso se impide el desplazamiento horizontal del nodo 5 (base). Y, naturalmente, se cambian las características mecánicas del material asignado al elemento de apoyo (elemento 1, figura 6.2), para lograr un elemento rígido.

### Tipo de cargas y aplicación de las mismas

Se asigna a la estructura una masa total tal que la carga vertical sobre el dispositivo de apoyo sea igual a la carga máxima que se especifica para este tipo de dispositivo (500 T). Se considera que esta masa se encuentra distribuida en partes iguales entre el dintel de la estructura y su base. Estas masas se consiguen asignando densidad al material del elemento de viga y al material de la base. El pilar y el dispositivo de apoyo se consideran con masa nula.

Las cargas dinámicas horizontales son las fuerzas de inercia generadas por las aceleraciones, de amplitud igual a 0.5 g, aplicadas sobre las masas de la estructura. No se consideran cargas verticales.

### Datos de los materiales

En esta sección se supone que la estructura y la base son elásticas. El módulo de elasticidad del material asignado a la base y al dintel es lo suficientemente alto para garantizar su rigidez.

Elementos	$E$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\mu$
Dintel	3.0e+08	0.2
Columna	3.5371e+06	0.2
Base	3.0e+08	0.2

El modelo material utilizado para modelar el dispositivo aislador es el desarrollado en el Capítulo 3 y se utiliza aquí con los parámetros correspondientes a caucho de alto amortiguamiento.

$G$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\mu_1^*$	$\mu_2^*$	$\mu_3^*$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
4.5	1.03	0.002	-0.02	1.9	5.9	-1.6

En el análisis de la estructura de base fija se reemplaza este material por uno de iguales características al material asignado a la base (y dintel) de la estructura.



### 6.2.2 Vibración libre

Se ensaya el modelo de base fija sometiéndolo a dos estados de sollicitación, desplazamiento horizontal impuesto de 24.8 cm a la altura del dintel y vibración libre. Este desplazamiento es equivalente a una deformación por cortante del dispositivo de apoyo de un 100% de la altura del elastómero. Se realiza un ensayo similar con el modelo de base aislada. Las respuestas en desplazamientos se presentan en la figura 6.3. Se observa que el período fundamental es de 0.26 s para la estructura de base fija y de entre 2.36 y 1.83 s para la estructura aislada. Obsérvese la variación del período debido al comportamiento fuertemente no lineal del dispositivo de apoyo.

Se debe remarcar que el amortiguamiento que se observa en la figura 6.3 se debe enteramente a los modelos constitutivos correspondientes a los materiales utilizados, pues se consideran coeficientes de amortiguamiento estructural (Rayleigh) nulos. Este amortiguamiento es producido por el modelo visco-elástico del dispositivo aislador. La estructura se desplaza aproximadamente como un sólido rígido tal como puede verse en la figura 6.4, siendo el desplazamiento relativo entre los puntos C y B muy pequeño.

En las figuras 6.5 y 6.6 puede apreciarse la diferencia entre considerar el modelo material del dispositivo de apoyo con las características visco-elástico-plásticas descritas en Capítulo 4 y utilizadas en esta sección, y considerar este material sólo como un sólido elástico.

### 6.2.3 Excitación armónica

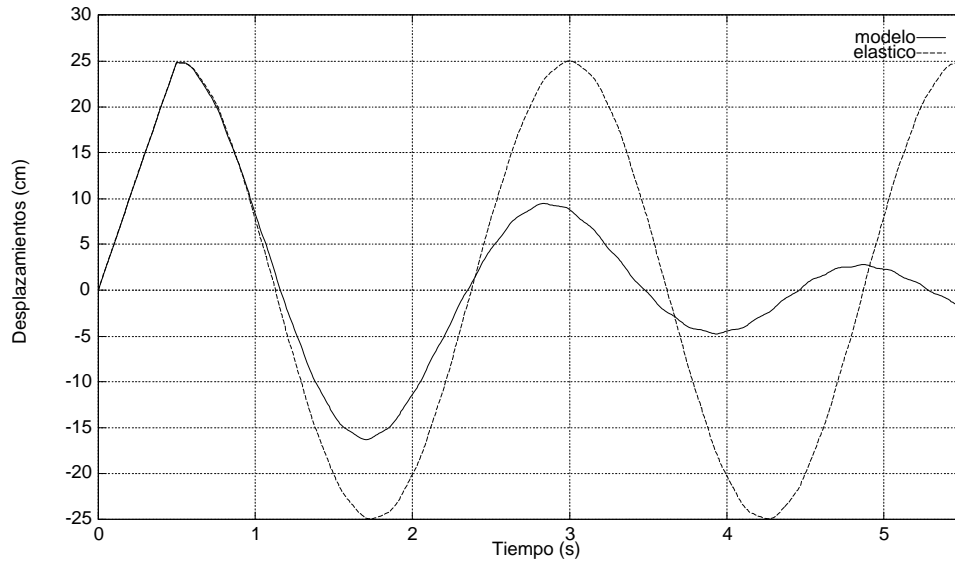
- Período de la excitación de 0.3 s

En esta sección se analiza el comportamiento dinámico de la estructura frente a una excitación armónica de período 0.3 s, próximo al período fundamental de la estructura de base fija 0.26 s. La amplitud de la excitación se mantiene constante e igual a 0.5 g durante todo el tiempo de análisis 7.0 s.

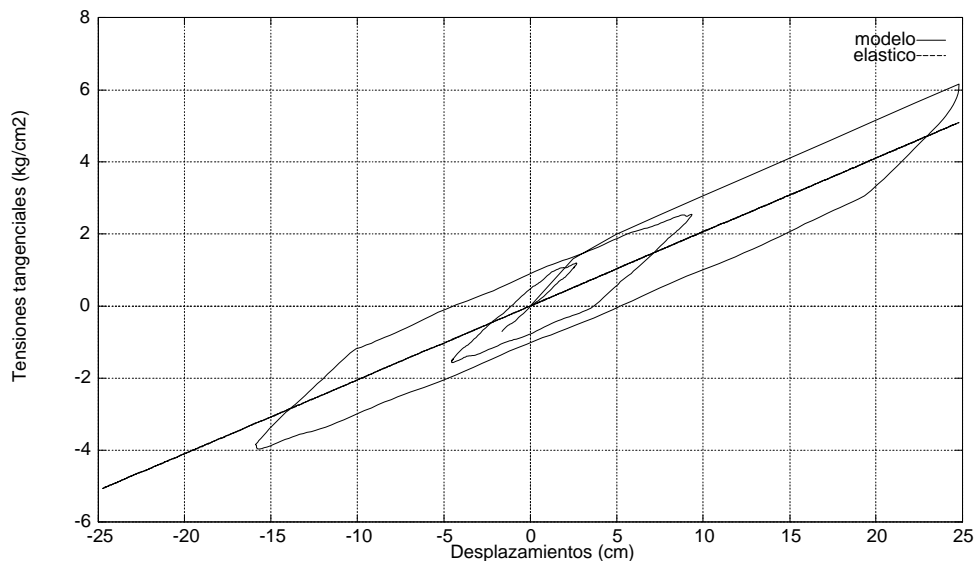
En la figura 6.7 pueden observarse las respuestas en desplazamientos del dintel y de la base de la estructura aislada. Ambas curvas prácticamente coinciden, lo que indica un comportamiento muy próximo al de un sólido rígido. Los máximos se presentan a los 0.53 s con valores de 8.365 cm para el dintel y 8.226 cm para la base.

La historia de los desplazamientos relativos dintel-base puede verse en la figura 6.8 junto a la historia de los desplazamientos del dintel en caso de la estructura de base fija. El máximo desplazamiento para la estructura de base fija, 2.585 cm, se produce a los 6.09 s, mientras que el desplazamiento relativo máximo para la estructura aislada tiene un valor de 0.139 cm a los 0.52 s. Esto representa una reducción de los desplazamientos relativos del 94.9%, indicando que la máxima





**Figura 6.5** Estructura con aislamiento de base en vibración libre. Desplazamientos del dintel para dispositivo de apoyo modelado como elástico y visco-elástico-plástico.



**Figura 6.6** Tensiones tangenciales en el dispositivo de apoyo modelado como elástico y visco-elástico-plástico.

eficiencia del aislamiento de base se presenta cuando el período de la excitación resulta próximo al período fundamental de la estructura de base fija y por consiguiente alejado del período fundamental de la estructura aislada.

Se efectúa una comparación similar entre las respuestas en aceleraciones del dintel de las estructuras de base fija y aislada, figura 6.9. En este caso los máximos son:  $1512.8 \text{ cm/s}^2$  a los 2.34s y a los 6.09s para la estructura de base fija y  $564.4 \text{ cm/s}^2$  a los 0.23s para la estructura de base aislada. La reducción en aceleraciones es de un 62.7%.

- Período de la excitación de 2.0s

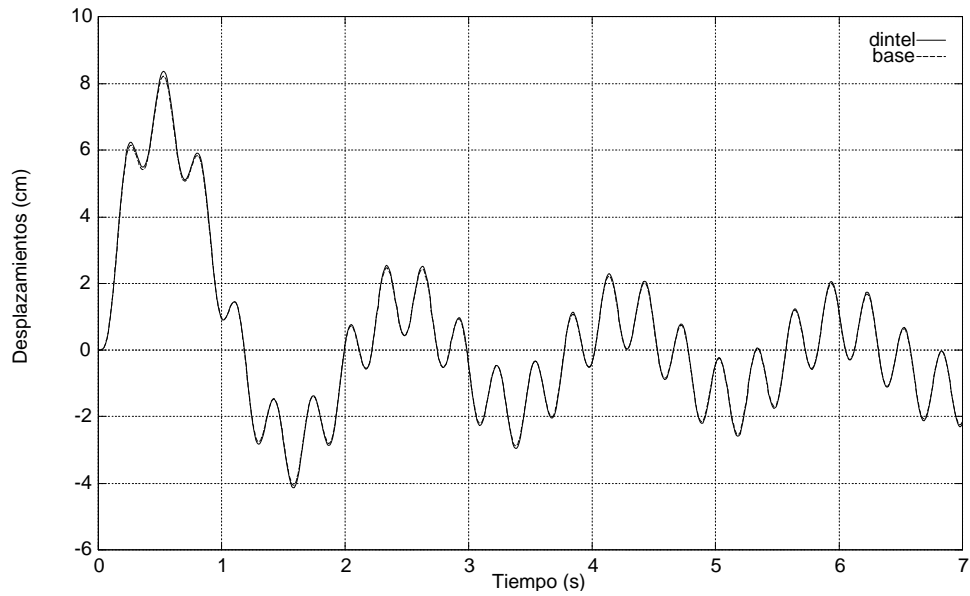
Se analiza aquí el comportamiento dinámico de la estructura frente a una excitación armónica de período igual a 2.0s, próximo al período fundamental de la estructura aislada, que varía entre 2.36s y 1.84s (figura 6.4). La amplitud de la excitación se mantiene constante e igual a 0.5g durante todo el tiempo de análisis cuya duración es de 7.0s, al igual que en el apartado anterior. Las respuestas en desplazamientos del dintel y de la base para la estructura aislada pueden verse en la figura 6.10.

Al igual que en la sección anterior, la estructura se comporta, aparentemente, como sólido rígido; pero obviamente los desplazamientos máximos son muy superiores. Los máximos desplazamientos producidos son de 122.53 cm y de 118.77 cm, para dintel y base respectivamente, a los 5.93s. Este desplazamiento de base produce una deformación en el dispositivo de apoyo equivalente a un 478.9% de deformación a cortante en las láminas de caucho.

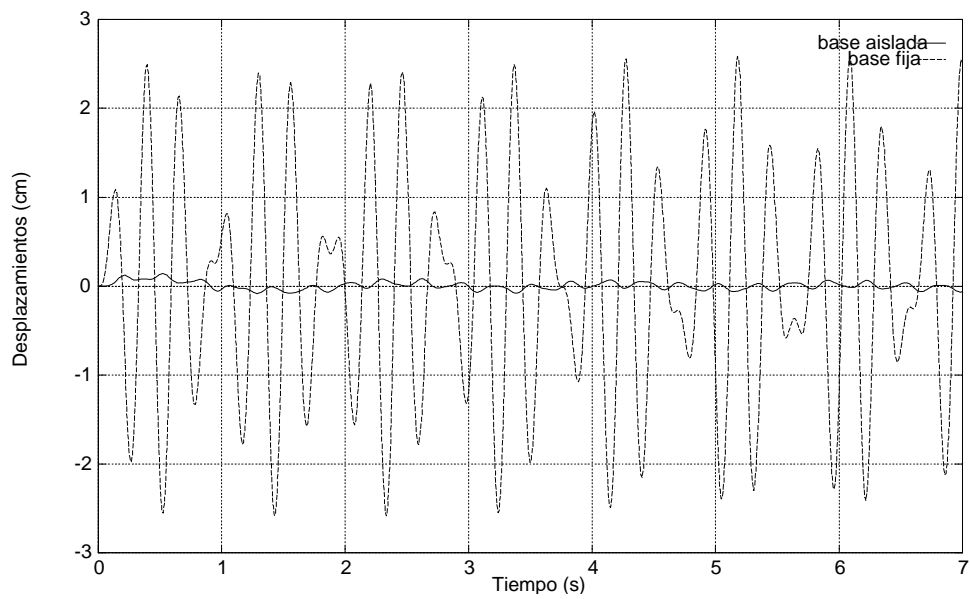
De acuerdo con ensayos realizados sobre modelos a escala de dispositivos de apoyo (SMiRT11 1991), la deformación de rotura se encuentra entre 450% y 550%. Otros ensayos (Kelly 1991*b*) sobre dispositivos similares indican una deformación de corte a rotura entre un 561% para carga vertical nula y un 473% para carga vertical equivalente a un 150% de la prevista. Al 100% de carga vertical Kelly (1991*b*) obtiene una deformación del 507%. Para el caso en que se alcanzasen estas deformaciones, las tensiones tangenciales producidas serían las de la figura 6.11.

Graficando la historia de los desplazamientos relativos dintel-base (figura 6.12) junto a la historia de desplazamientos del dintel en caso de la estructura de base fija, resulta obvio que cuando el período de la excitación se encuentra próximo al período fundamental de la estructura aislada que es de cerca de 2s, el uso de dispositivos de aislamiento de base es contraproducente.

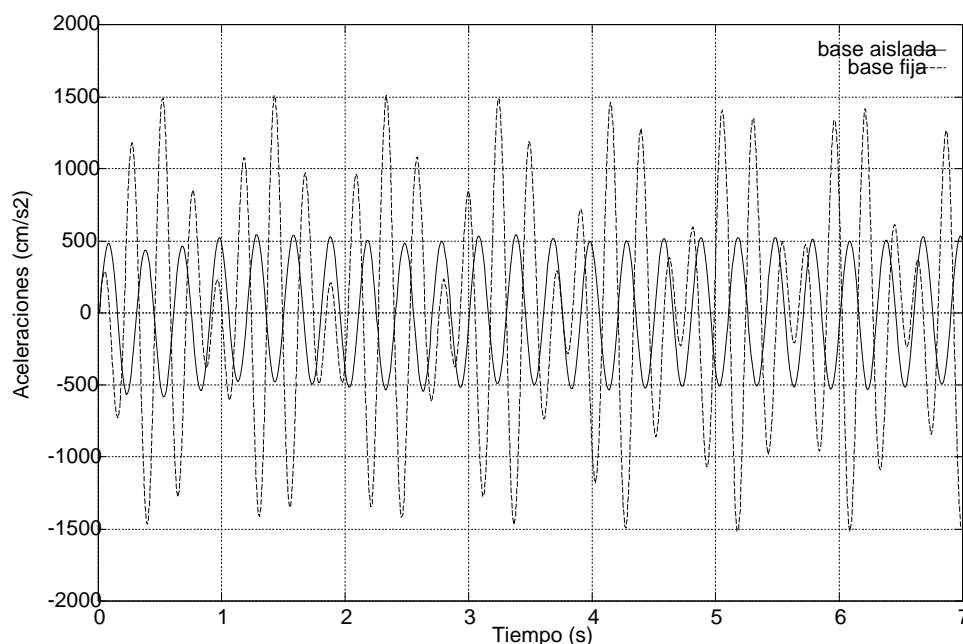
Los máximos desplazamientos relativos son de 4.098 cm para la estructura aislada y 0.714 cm para la estructura de base fija. En este caso, el aislar la estructura ha amplificado los desplazamientos relativos en un 574%. También es negativo el uso de dispositivos de aislamiento de base si se comparan las aceleraciones. En



**Figura 6.7** Desplazamientos de la estructura aislada (dintel y base). Excitación armónica,  $T=0.3$  s.



**Figura 6.8** Desplazamientos relativos (dintel-base) de la estructura aislada y fija. Excitación armónica,  $T=0.3$  s.



**Figura 6.9** Aceleraciones del dintel, base aislada y fija. Excitación armónica,  $T=0.3$  s.

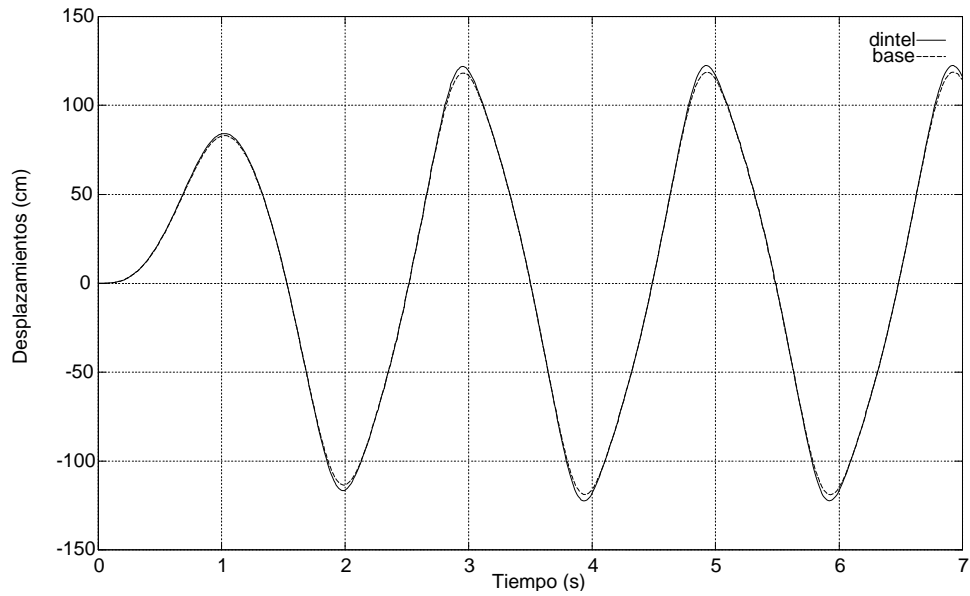
la figura 6.13 se presentan las aceleraciones del dintel, tanto para la estructura aislada como para la de base fija.

### 6.3 ESTRUCTURA PORTICADA DE SEIS NIVELES

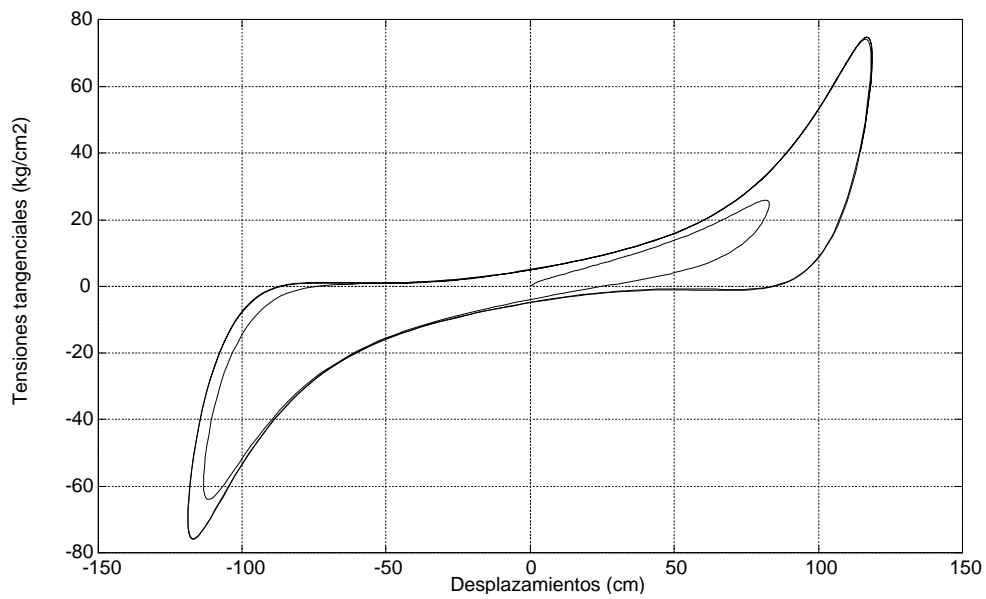
En esta sección se comparan las respuestas de un edificio de seis niveles con y sin aislamiento sísmico. En el caso del edificio sin aislamiento, de base fija, éste se encuentra empotrado directamente en el terreno (véase la figura 6.14). Se analiza la respuesta de esta estructura frente al terremoto de El Centro (California) de 1940. Este terremoto es frecuentemente utilizado como referencia en un análisis sísmico.

Como parámetros para evaluar la eficacia del sistema aislador se consideran:

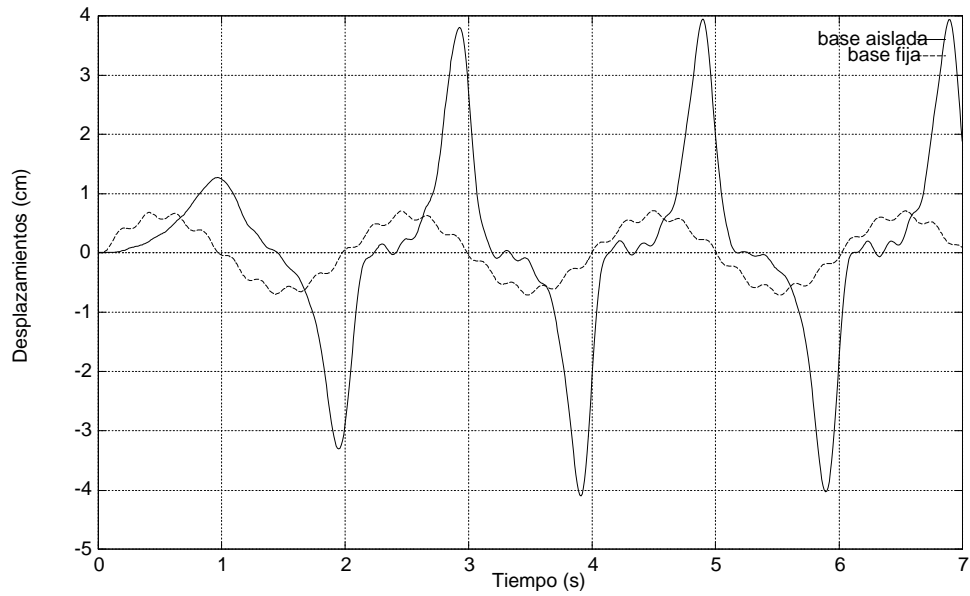
- *Los desplazamientos de la base respecto a la cimentación* (desplazamiento del punto B respecto al punto A, ver figura 6.14). Estos desplazamientos relativos son nulos en el caso de la estructura de base fija al considerarse que la cimentación no desliza con respecto al terreno.
- *Los desplazamientos del punto más alto de la estructura respecto a la cimentación* (desplazamiento del punto H respecto al punto A, figura 6.14) *y a la base*



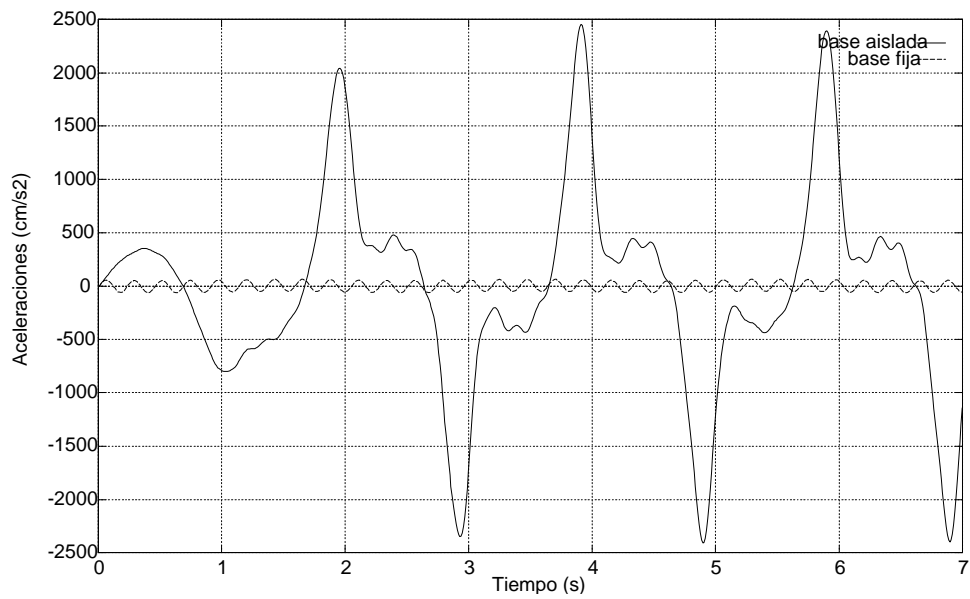
**Figura 6.10** Desplazamientos de la estructura aislada (dintel y base). Excitación armónica,  $T=2.0$  s.



**Figura 6.11** Tensiones tangenciales en el dispositivo de apoyo. Excitación armónica,  $T=2.0$  s.

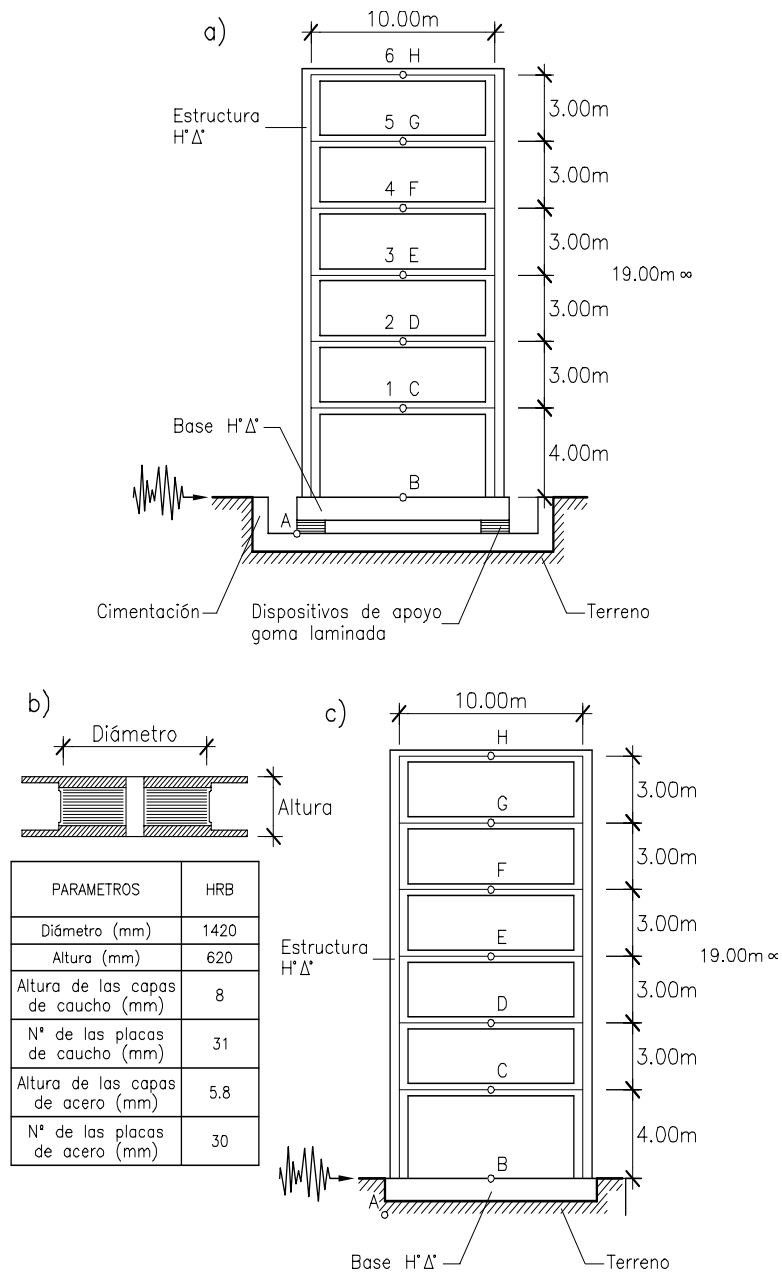


**Figura 6.12** Desplazamientos relativos (dintel-base) de la estructura aislada y fija. Excitación armónica,  $T=2.0$  s.



**Figura 6.13** Aceleraciones del dintel, base aislada y fija. Excitación armónica,  $T=2.0$  s.





**Figura 6.14** Esquema de la estructura analizada. a) Estructura con aislamiento de base. b) Dispositivo de aislamiento. c) Estructura de base fija.

(desplazamiento del punto H respecto al punto B, figura 6.14). En el caso de la estructura de base fija, al ser nulos los desplazamientos relativos entre los puntos A y B, los desplazamientos respecto a la cimentación y a la base son los mismos.

- *Los desplazamientos relativos máximos entre pisos* (desplazamientos relativos entre los puntos B, C, D, E, F, G y H).
- *Las aceleraciones absolutas del punto más alto de la estructura* (punto H, figura 6.14).
- *Los índices globales de daño de la estructura.*

El desplazamiento de la base respecto a la cimentación es un parámetro básico para el diseño de las instalaciones que unen el edificio con el terreno. El desplazamiento del punto más alto de la estructura respecto a la base y el desplazamiento relativo máximo entre pisos son parámetros proporcionales a la tensión que soportan los pilares del edificio. Las aceleraciones absolutas determinan el nivel de confort para las personas dentro del edificio y son causa de daño en equipos contenidos en el edificio. Los índices globales de daño permiten apreciar en que magnitud las estructuras se han alejado del comportamiento elástico.

### 6.3.1 Descripción del modelo estructural

Se analiza una estructura tipo pórtico de seis niveles de hormigón armado (figura 6.14a-c). Todas los niveles tienen una altura de 3 m, excepto el primero, que tiene una altura de 4 m. De esta forma, la altura total de la estructura es de 19 m. Se considera un ancho de la estructura constante igual a 10 m.

Las dimensiones asignadas a pilares y vigas se escogen de tal manera que el período fundamental de vibración sea próximo al dado en la Normativa Española Sismoresistente NCSE-94 para entramados de hormigón armado. Dicho período es  $T(s) = 0.09H/\sqrt{L}$ , siendo  $H$  la altura total de la estructura y  $L$  la dimensión horizontal. Para el caso que se presenta se tiene  $T = 0.09 \cdot 19/\sqrt{10} = 0.54075$  s.

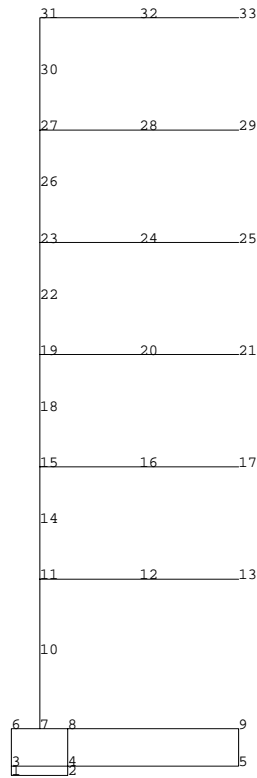
Se asigna a los pilares una sección transversal de altura variable según pisos: 100 cm en los dos primeros pisos, 90 cm en los dos pisos siguientes y 80 cm en los dos últimos pisos. La altura de la sección transversal de las vigas se considera constante e igual a 60 cm. El ancho de todos los elementos estructurales se fija en 200 cm. Este ancho no debe considerarse como correspondiente a un único pórtico, sino como la suma de varios pórticos paralelos.

Las características geométricas y mecánicas del dispositivo aislador a utilizar se toman de la referencia SMiRT11 (1991) correspondientes a al tipo HRB (high damping rubber bearing)

---

Universitat de Catalunya

---



---

**Figura 6.15** Discretización por elementos finitos de la estructura analizada.

Diámetro: 1420 mm

Altura: 620 mm

Espesor de las láminas de caucho: 8 mm

Número de láminas de caucho: 31

Espesor de las láminas de acero: 5.8 mm

Número de láminas de acero: 30

Carga vertical:  $P_0 = 500 \text{ T}$

Frecuencia natural, horizontal: 0.5 Hz

### Discretización por elementos finitos

Al igual que en la sección anterior y dada la simetría de la estructura, sólo se discretiza la mitad de la misma. Los tipos de elementos finitos utilizados son los ya mencionados en la sección anterior. Los pilares y vigas de la estructura se modelan mediante elementos finitos de barra 2D de Timoshenko (véase la figura 6.15) discretizados por capas. Se utilizan elementos finitos cuadráticos de tres nodos (tres grados de libertad por nodo) con dos puntos de integración de Gauss y seis capas de igual altura e igual ancho.

La base y el dispositivo aislador se discretizan mediante elementos finitos planos de 4 nodos en estado plano de deformación. La utilización del elemento de conexión desarrollado en la Sección 4.6 y ensayado en la Sección 5.3.6, permite el trabajo conjunto de elementos planos en la base con elementos de barra en la estructura. El elemento de conexión esta formado por un elemento plano de la base (elemento 2 de la figura 6.15) y el elemento de barra del pilar de planta baja.

En cuanto al dispositivo de apoyo, considerando las características geométricas especificadas, la sección transversal de este dispositivo es  $\pi \cdot \Phi^2/4 = 1.5837 \text{ m}^2$ . Dicha sección se modela en estado plano de deformación, con un ancho igual al diámetro del dispositivo, es decir, 142 cm y un espesor de 111.53 cm, con lo que se consigue una sección transversal equivalente. La altura del dispositivo aislador que se considera en el modelo es la correspondiente a la suma de todas las láminas de caucho,  $31 \times 0.8 = 24.8 \text{ cm}$ .

Las condiciones de borde se fijan impidiendo los desplazamientos verticales y horizontales en los nodos 1 y 2 del dispositivo de apoyo (ver figura 6.15) y los desplazamientos verticales en los nodos 5 y 9 de la base y los nodos 13, 17, 21, 25, 29 y 33 de los dinteles.

Al igual que en la sección anterior y a efectos de utilizar la misma discretización en el análisis de la estructura de base fija, además de las condiciones de borde antes mencionadas, en este caso se impide el desplazamiento horizontal de los nodos 5 y 9 de la base; además, se cambian las características mecánicas del material asignado al elemento de apoyo (elemento 1 de la figura 6.15) para lograr un elemento rígido.

### Tipo de cargas y aplicación de las mismas

Al igual que en la sección anterior se asigna a la estructura una masa total tal que la carga vertical sobre el dispositivo de apoyo sea igual a la carga máxima que se especifica para este tipo de dispositivo (500 T). Se considera que esta masa total se encuentra distribuida de manera uniforme en todos los niveles de la estructura y que la base tiene una masa equivalente a un nivel. Estas masas se consiguen asignando densidad al material (hormigón) de las capas internas de los elementos

de viga y al material de la base. Los pilares y el dispositivo de apoyo se consideran con masa nula.

Las cargas dinámicas se obtienen a partir de la aplicación del acelerograma con vectores de participación 1.0 en dirección horizontal y 0.0 en dirección vertical sobre todas las masas del sistema. Esto implica que no se consideran cargas verticales durante el análisis numérico, pues el objetivo de este análisis es la comparación de respuestas entre estructuras de base fija y con aislamiento de base y estas estructuras no presentan diferencias de comportamiento frente a las cargas verticales.

### Datos de los materiales

En este caso se considera que la estructura es de hormigón armado. A efectos de simular la armadura en los elementos de barra, cuya sección transversal se discretiza en seis capas de igual altura e igual ancho, se modelan las capas externas (1/3 de la sección transversal) como material compuesto de dos componentes —hormigón 85% y acero 15%—, con lo cual se obtiene una cuantía de acero del 4.5%. Las capas internas se modelan con un único material, hormigón (100%). Los modelos materiales utilizados tienen las siguientes características (Hanganu 1997, Oller 1991):

#### Acero:

Módulo de elasticidad:  $E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$

Tensión inicial de plasticidad:  $\sigma^0 = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Criterio de fluencia: Von Mises

#### Hormigón:

Módulo de elasticidad:  $E = 3.0 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$

Coefficiente de Poisson:  $\nu = 0.17$

Tensión inicial de plasticidad:  $\sigma^0 = 300 \text{ kg/cm}^2$

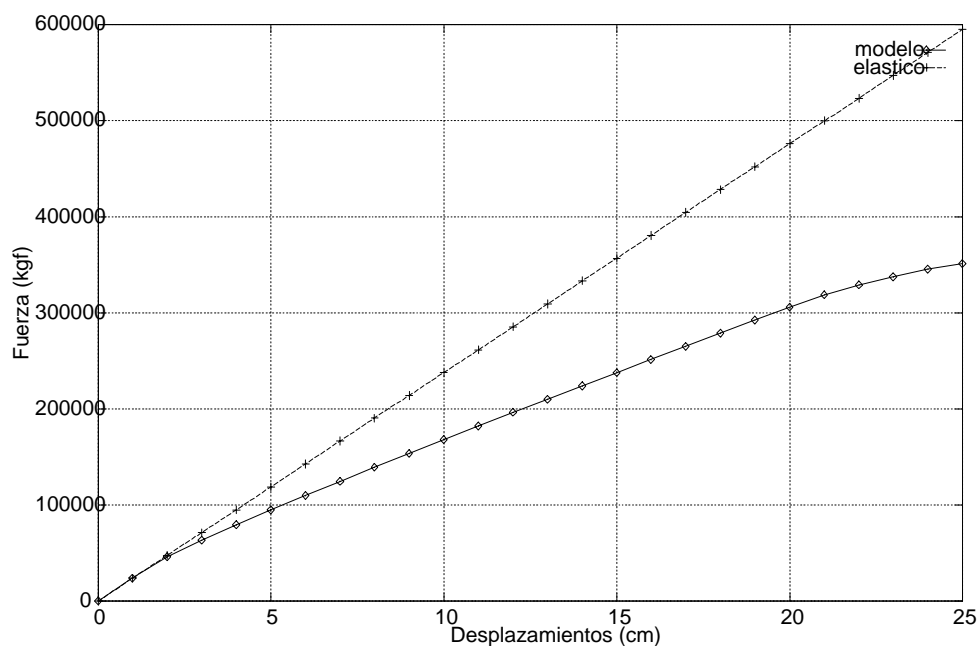
Criterio de fluencia: Mohr-Coulomb

Modelo de daño: Kachanov

Umbral de inicio de daño:  $\sigma_{damage}^0 = 300 \text{ kg/cm}^2$

Relación de resistencias iniciales a compresión y tracción:  $\sigma_C^0/\sigma_T^0 = 10$

En la figura 6.16 puede apreciarse la diferencia entre considerar los modelos de los materiales con las características aquí descritas y considerarlos elásticos. Las curvas corresponden a la fuerza estática necesaria para producir desplazamientos de 1.0 cm a 25.0 cm en el piso 6 de la estructura de base fija. Esta fuerza es la reacción horizontal del nodo 33 (figura 6.15) cuando en éste se imponen los desplazamientos incrementales.



**Figura 6.16** Diagramas fuerza-desplazamiento para la estructura de base fija.

El modelo material utilizado para modelar el dispositivo aislador es el desarrollado en el Capítulo 3 y se utiliza aquí con los parámetros correspondientes a caucho de alto amortiguamiento.

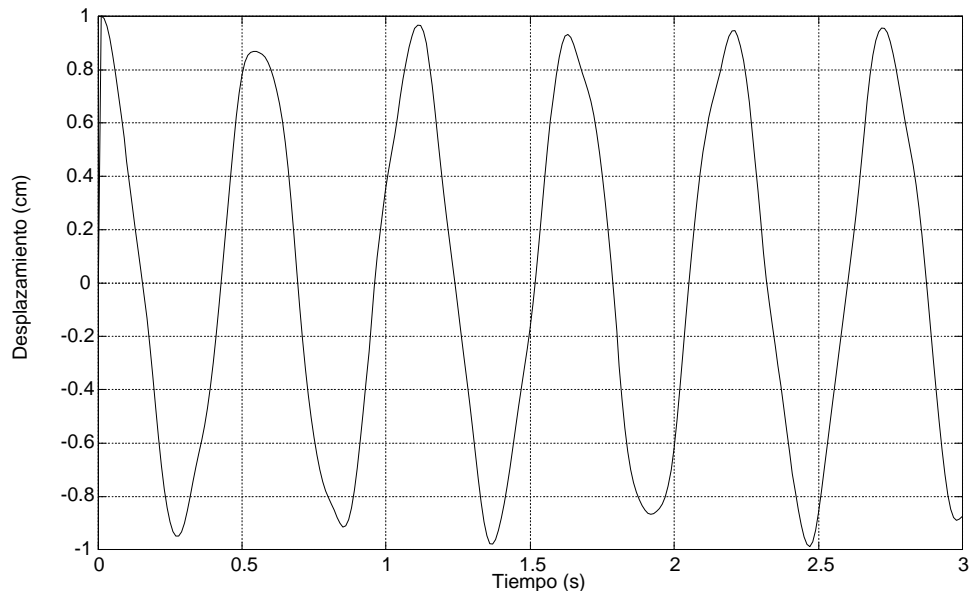
$G$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$\mu_1^*$	$\mu_2^*$	$\mu_3^*$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
4.5	1.03	0.002	-0.02	1.9	5.9	-1.6

Para realizar el análisis de la estructura de base fija utilizando la misma discretización de elementos finitos se reemplaza este material (caucho de alto amortiguamiento) por otro muy rígido con las características mecánicas del acero.

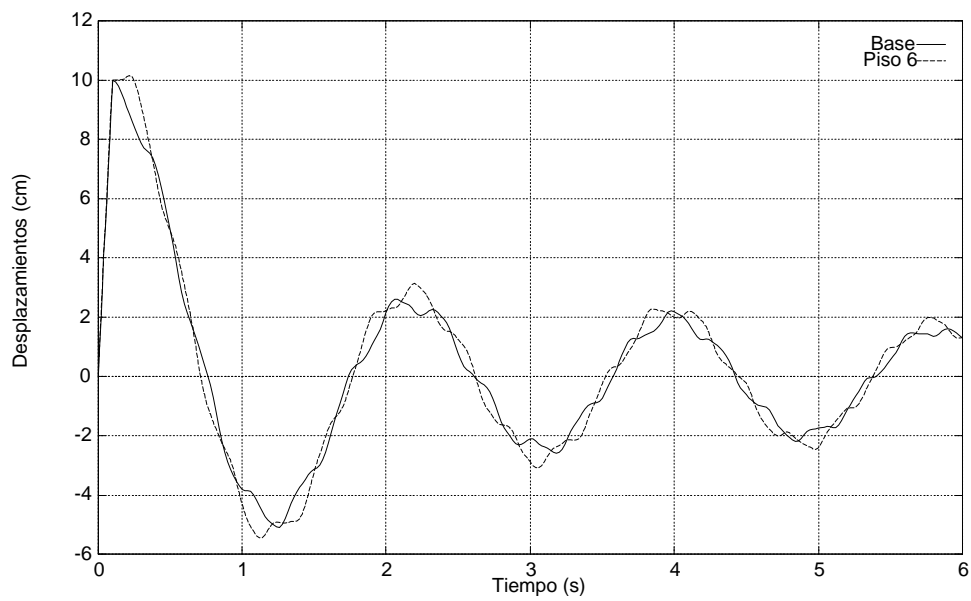
### 6.3.2 Vibración libre

Considerando las características geométricas y mecánicas especificadas, se ensaya el modelo de base fija sometándolo a dos estados de carga, desplazamiento horizontal impuesto de 1.0 cm en su punto mas alto y vibración libre. La respuesta en desplazamientos se presenta en la figura 6.17. En esta se observa un período fundamental de 0.54 s.

Se realiza un ensayo similar con el modelo de base aislada, en este caso el desplazamiento impuesto es de 10.0 cm, alcanzado en 10 pasos de carga de 1.0 cm. La aplicación de este desplazamiento en distintos pasos de carga se debe a estar trabajando en grandes deformaciones con comportamiento no lineal en todos los



**Figura 6.17** Estructura de base fija en vibración libre.

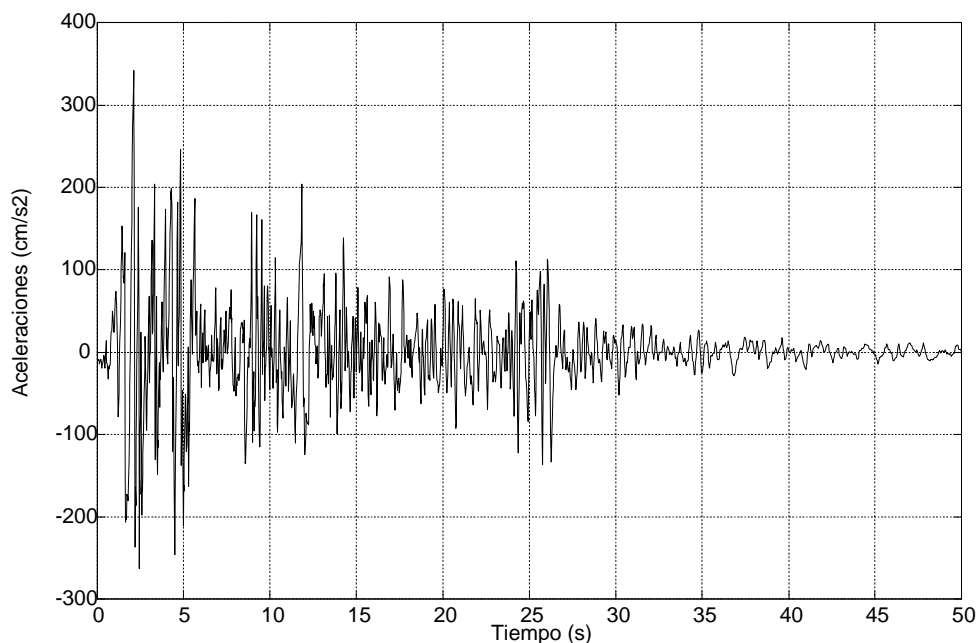


**Figura 6.18** Estructura con aislamiento de base en vibración libre. Desplazamientos de la base (punto B) y del dintel del último piso (punto H).

materiales. La respuesta en desplazamientos de la base y del punto mas alto de la estructura (piso 6) se puede ver en la figura 6.18. Se observa que el período fundamental varía entre 1.9s y 1.8s. Se debe remarcar que el amortiguamiento que puede verse en la figura 6.18 se debe enteramente a los modelos constitutivos correspondientes a los materiales utilizados, pues se consideran coeficientes de amortiguamiento estructural (de tipo Rayleigh) nulos. La causa principal de este amortiguamiento es el modelo visco-elástico del dispositivo aislador y en segundo término y mucho menos significativo, los modelos de daño utilizado para el hormigón y elasto-plástico utilizado para el acero, ya que se observa que la estructura se desplaza aproximadamente como un sólido rígido.

### 6.3.3 Análisis sísmico

Como terremoto de cálculo se consideró el de El Centro de 1940, cuyo acelerograma se muestra en la figura 6.19. El acelerograma se discretiza con un período de muestreo de 0.02s y tiene una duración superior a los 50 s; pero, considerando que las máximas amplitudes se producen durante los primeros 6s, y para reducir el tiempo de cálculo, se analizan los modelos durante los primeros 12 s del terremoto, al 100% de su aceleración.



**Figura 6.19** Acelerograma del terremoto El Centro.

Para la solución de la ecuación de movimiento se utiliza una solución numérica paso a paso, concretamente el método de Newmark, con coeficientes  $\gamma = 0.5$  y



$\beta = 0.25$  (Barbat & Miquel-Canet 1994). El paso de tiempo ( $\Delta t$ ) se toma igual a 0.02 s para así captar sin truncamiento la señal impuesta.

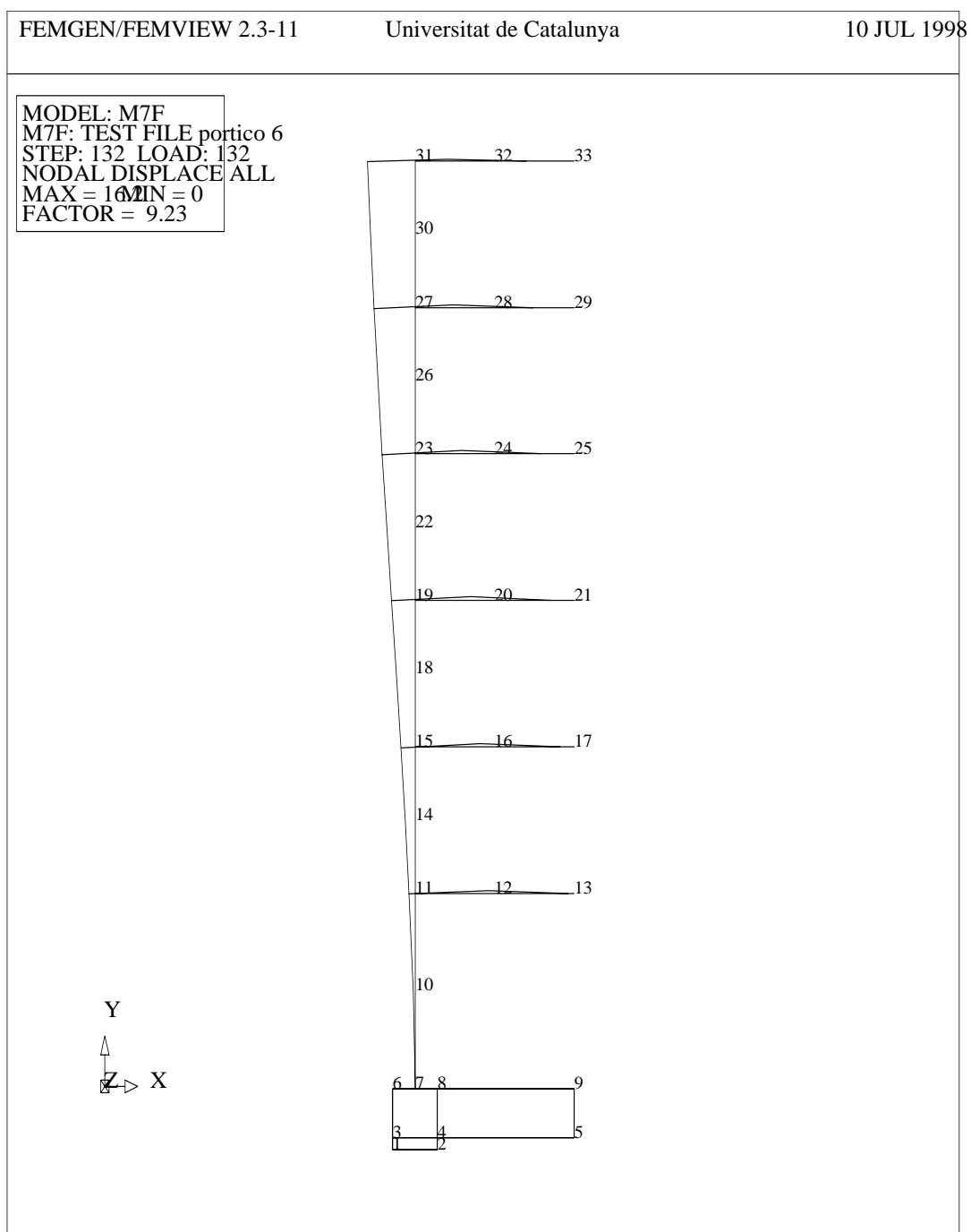
El número de iteraciones necesario para conseguir la convergencia en cada paso de carga varía entre un mínimo de 4 y un máximo de 12 para la estructura con aislamiento de base y entre un mínimo de 4 y un máximo de 20 para la estructura de base fija.

En la estructura con aislamiento de base, cuanto mayor es la diferencia de desplazamientos de la base entre un paso de carga y el siguiente, se requiere mayor número de iteraciones para lograr la convergencia; esto se debe a la no linealidad geométrica (grandes deformaciones) y no linealidad constitutiva del material. En la estructura de base fija, cuanto mayores son los desplazamientos entre pisos, mayor es el número necesario de iteraciones, por producirse fenómenos no lineales constitutivos.

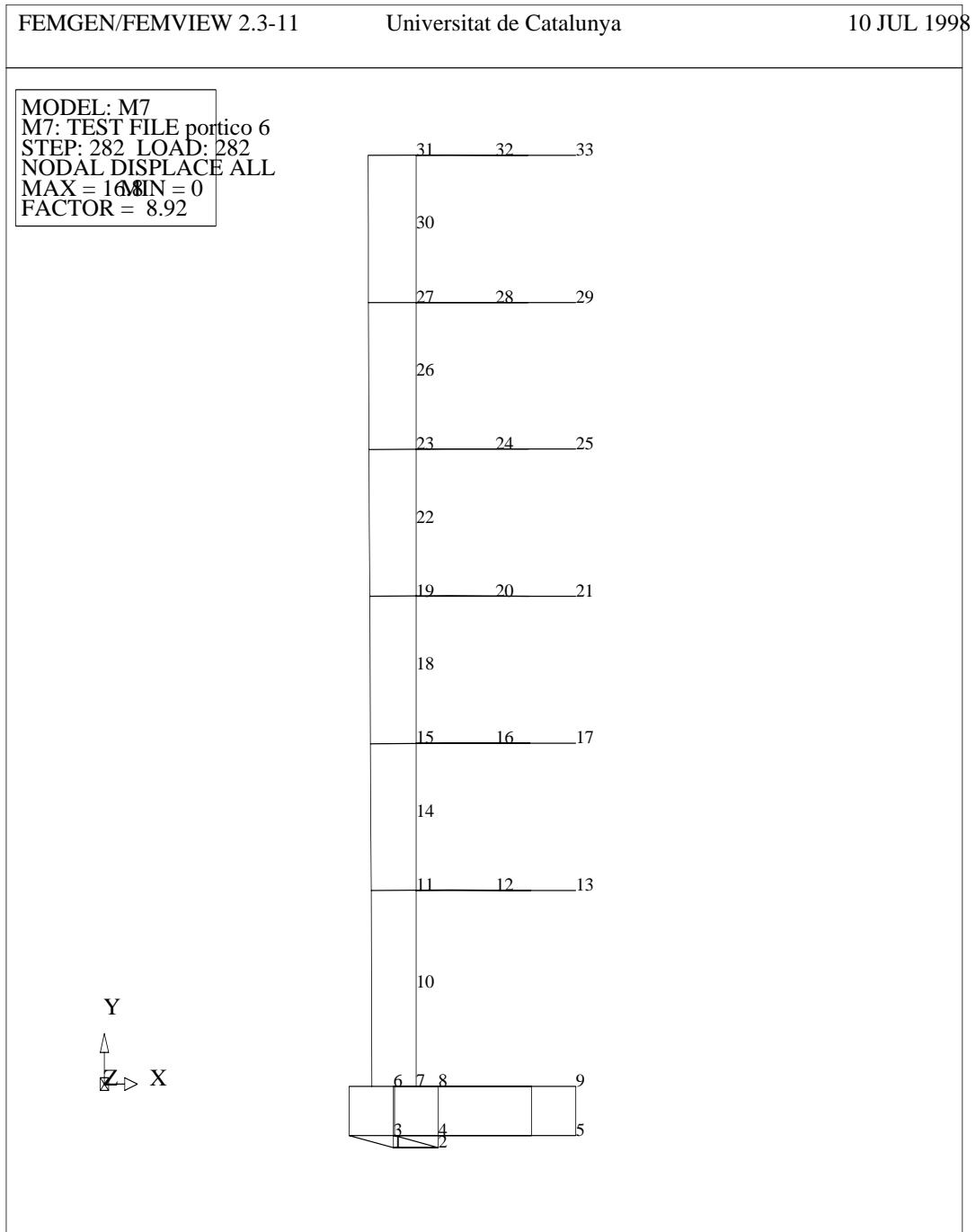
Los tiempos medios de ejecución por paso de carga solucionando el problema en un ordenador Silicon Graphics con procesador MIPS R10000 varían entre 0.63 s y 0.70 s, para la estructura de base fija y con aislamiento de base respectivamente. Téngase en cuenta que en ambas estructuras los elementos de barra se discretizan por capas, siendo las capas externas de material compuesto, hormigón y acero, y que para cada material se aplica una no linealidad constitutiva diferente. En el caso de la estructura con aislamiento de base se tiene el problema adicional debido a las grandes deformaciones en el dispositivo de apoyo con un modelo constitutivo hiperelástico de respuesta fuertemente no lineal con componentes plástica y viscoelástica.

En primer término, y a efectos de tener una idea global de las respuestas de las estructuras con aislamiento y de base fija frente al terremoto de El Centro, se presentan las deformadas de ambas estructuras. En la figura 6.20 se grafica la deformada de la estructura de base fija en el momento en que se produce el máximo desplazamiento en el último piso de la estructura. Este desplazamiento es igual a 16.2 cm y se produce a los 2.64 s. En la figura 6.21 se presenta la deformada de la estructura con aislamiento de base en el momento de producirse el máximo desplazamiento de la base. Este desplazamiento es de 16.81 cm, se produce a los 5.66 s y es muy próximo al máximo desplazamiento en el último piso de la estructura que es de 15.49 cm y que se produce un instante de tiempo antes, es decir a los 5.64 s.

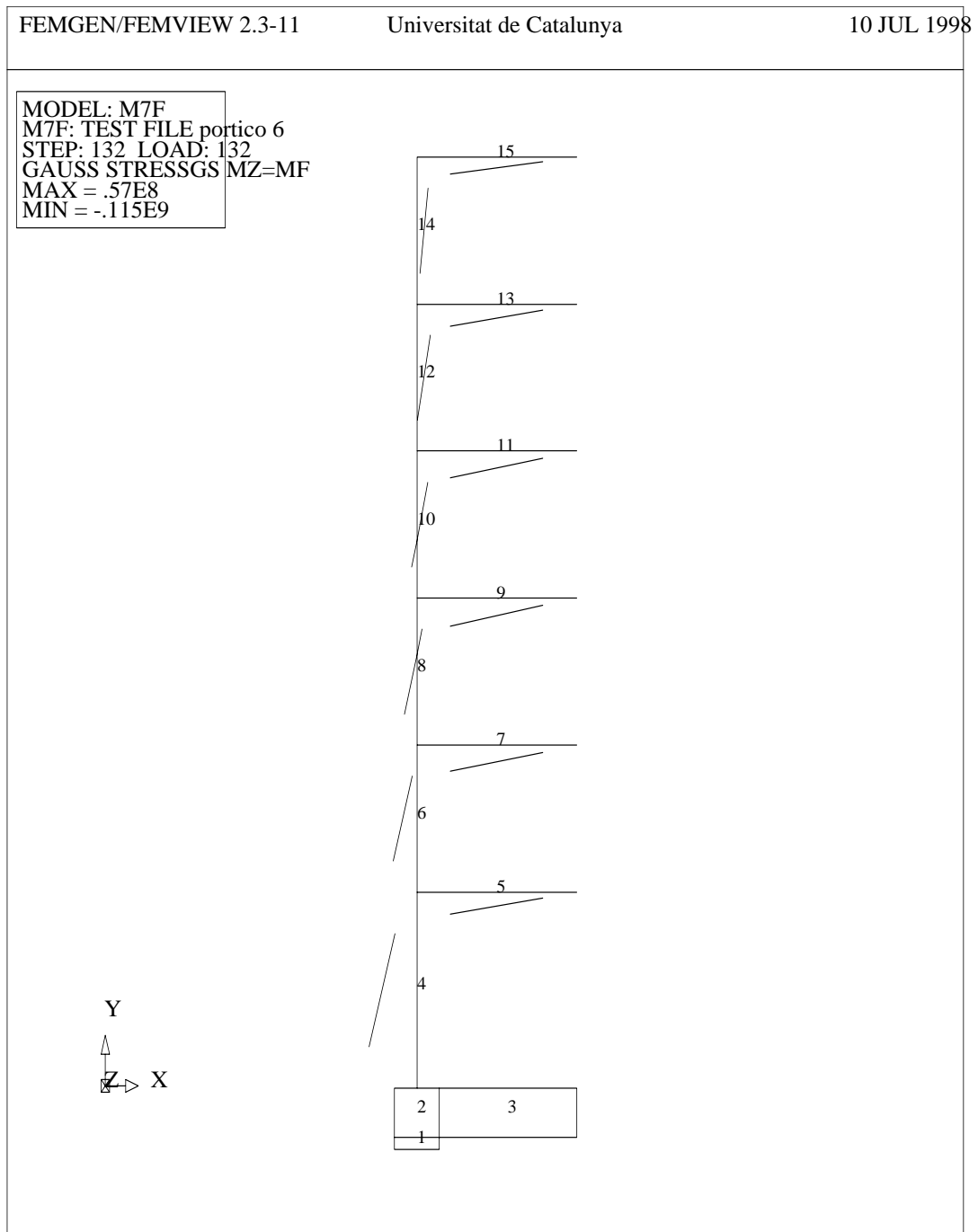
Estos valores indican que el desplazamiento de la estructura con aislamiento de base es muy próximo al de un sólido rígido (véase la figura 6.21), por lo que los desplazamientos relativos entre pisos son muy reducidos en comparación con los de la estructura de base fija (véase la figura 6.20) y, por consiguiente, también son reducidos los esfuerzos en los elementos estructurales. Estos esfuerzos seccionales, en el momento de producirse los máximos desplazamientos, se grafican en las figuras 6.22-6.23 (momentos flectores), 6.24-6.25 (esfuerzos cortantes) y 6.26-6.27 (esfuerzos axiales). Obsérvese en estas figuras la reducción mencionada de esfuerzos



**Figura 6.20** Deformada de la estructura de base fija.



**Figura 6.21** Deformada de la estructura con aislamiento de base.



**Figura 6.22** Momentos flectores en la estructura de base fija.

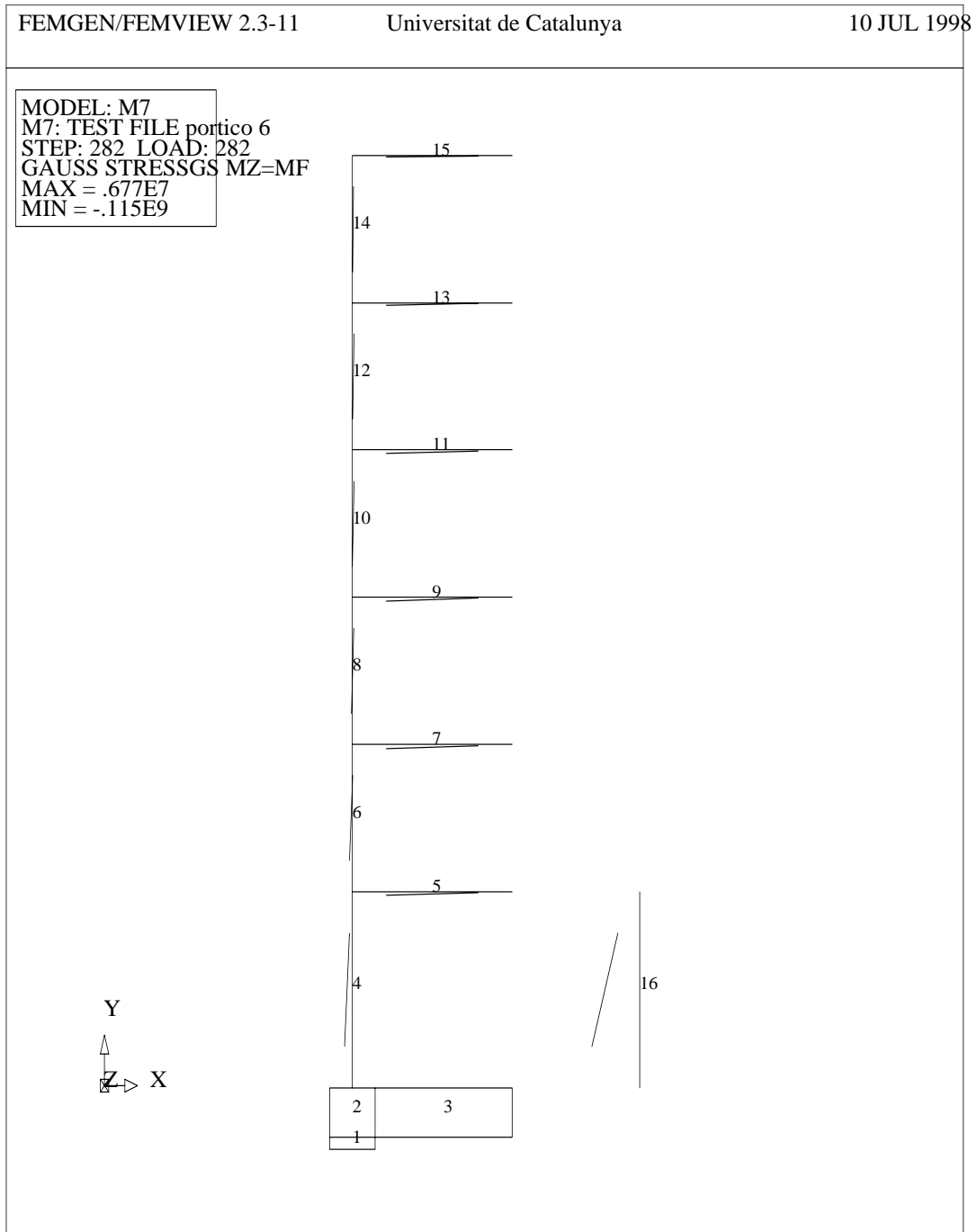
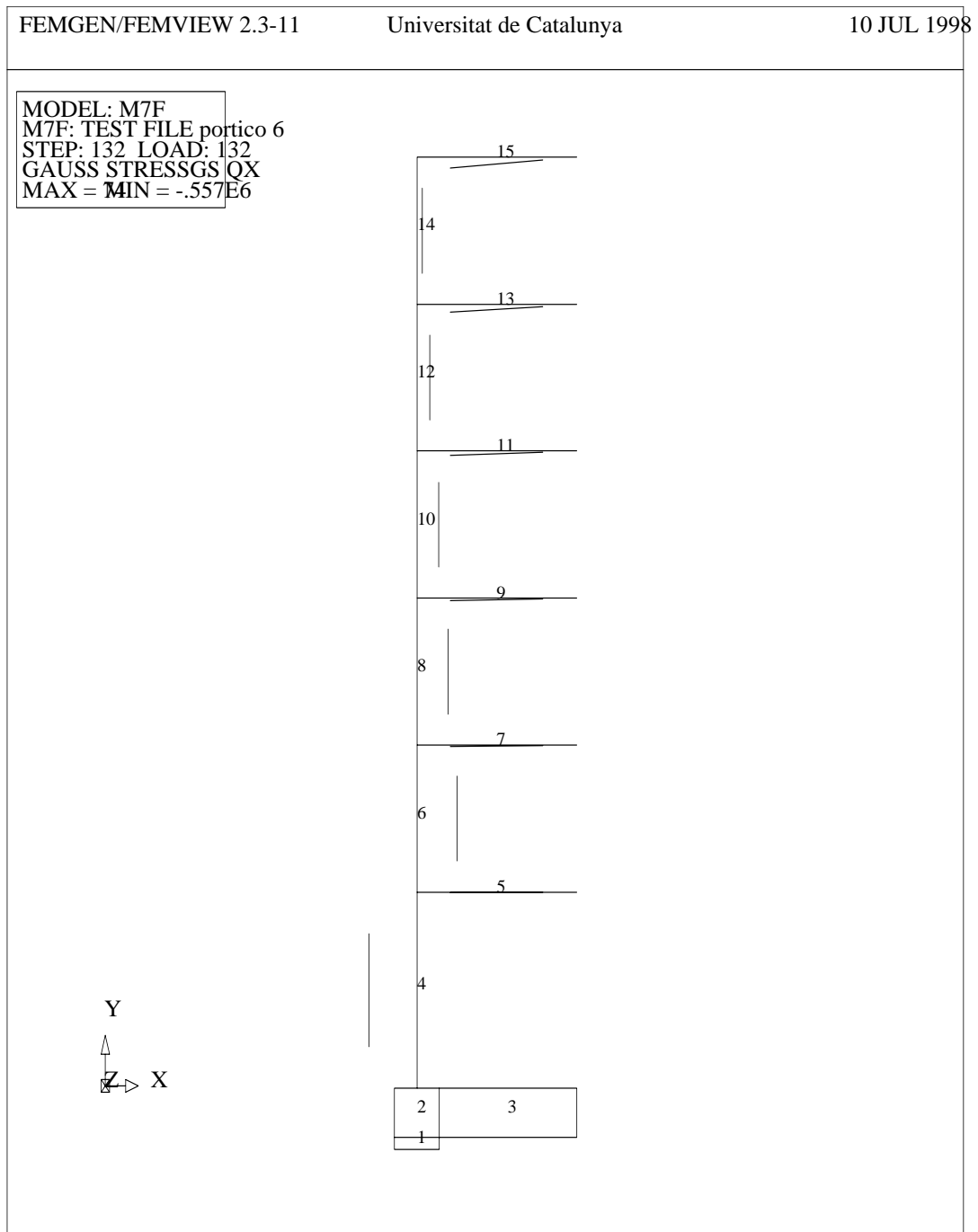
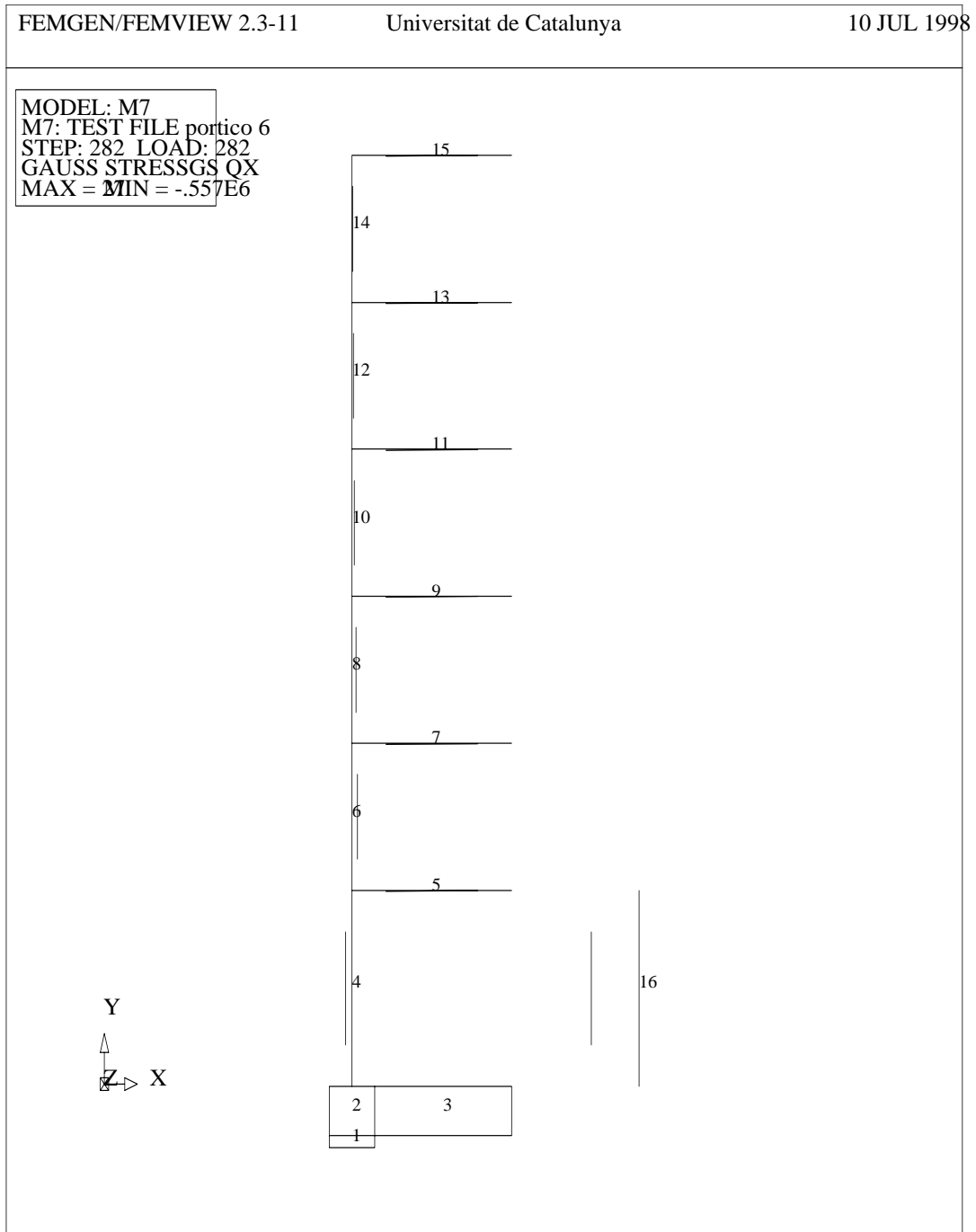


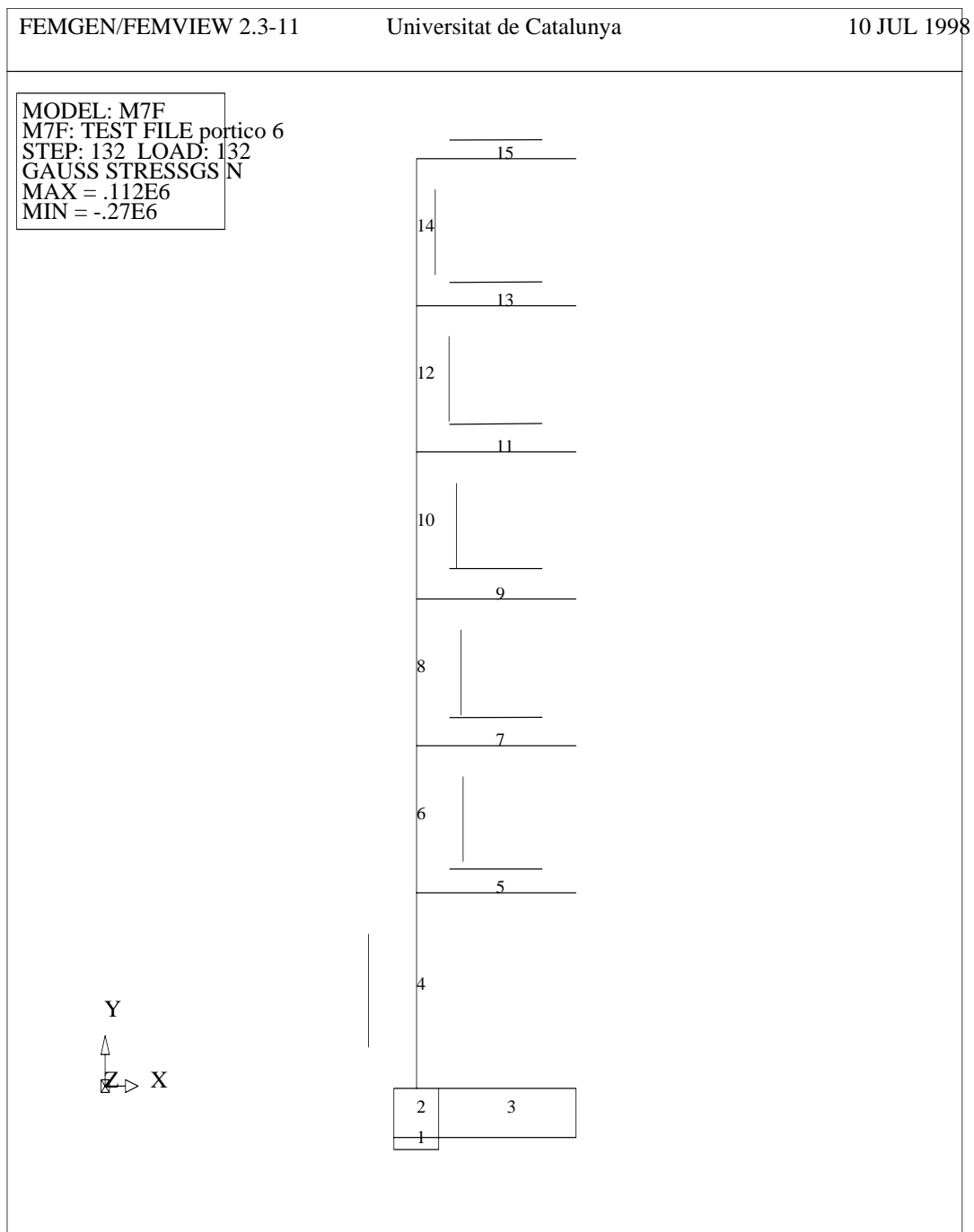
Figura 6.23 Momentos flectores en la estructura con aislamiento de base.



**Figura 6.24** Esfuerzos cortantes en la estructura de base fija.

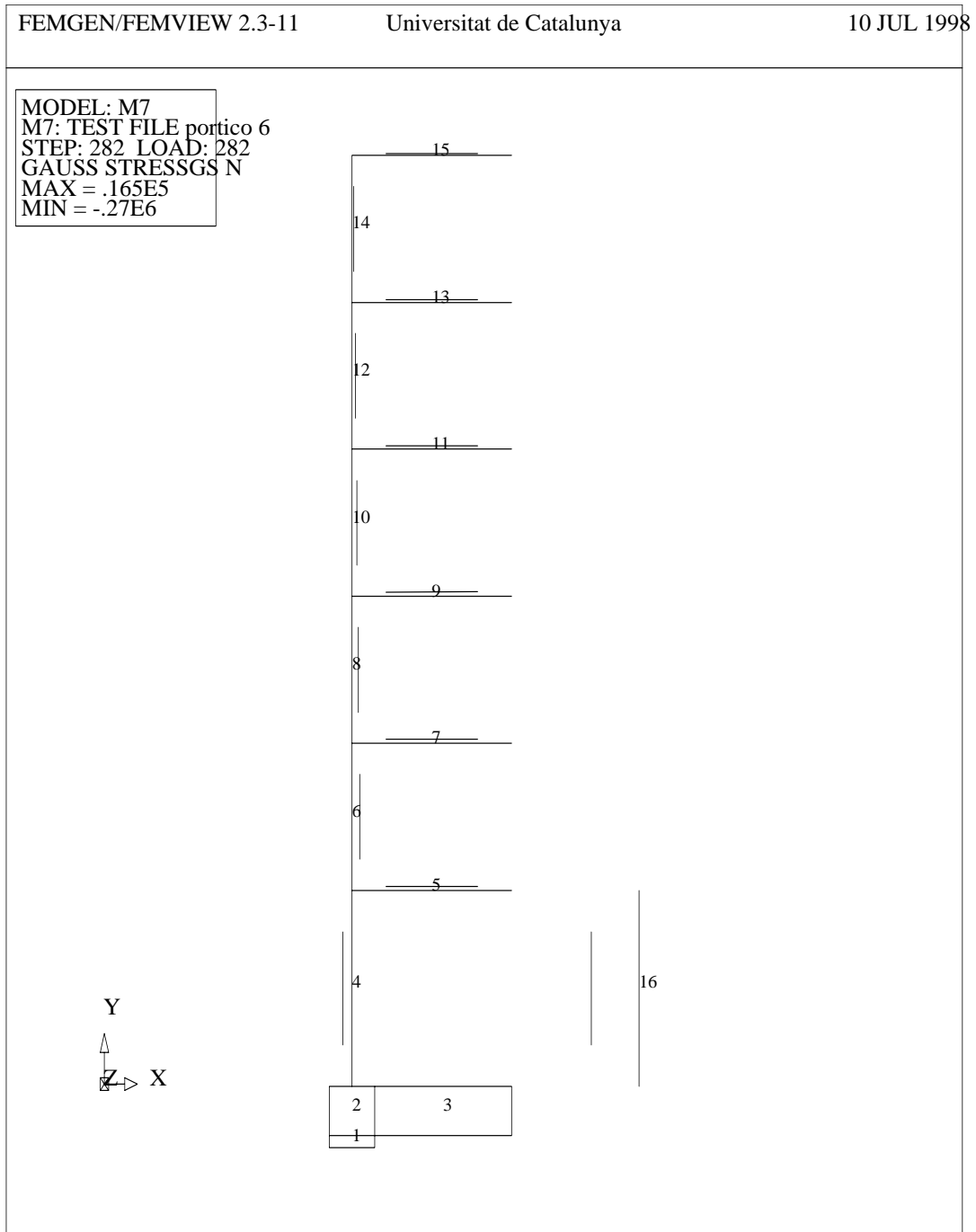


**Figura 6.25** Esfuerzos cortantes en la estructura con aislamiento de base.



**Figura 6.26** Esfuerzos axiales en la estructura de base fija.





**Figura 6.27** Esfuerzos axiales en la estructura con aislamiento de base.

seccionales y el hecho de que esta reducción no implica un desplazamiento excesivo de la base. Este desplazamiento, que es de 16.81 cm, es prácticamente el mismo que se produce en el punto mas alto de la estructura de base fija (16.20 cm), con la diferencia de que en este caso (base fija) los desplazamientos deben ser absorbidos por los elementos estructurales en forma de deformaciones-solicitaciones, mientras que en el caso de la estructura con aislamiento de base, los desplazamientos son canalizados a través del dispositivo de apoyo.

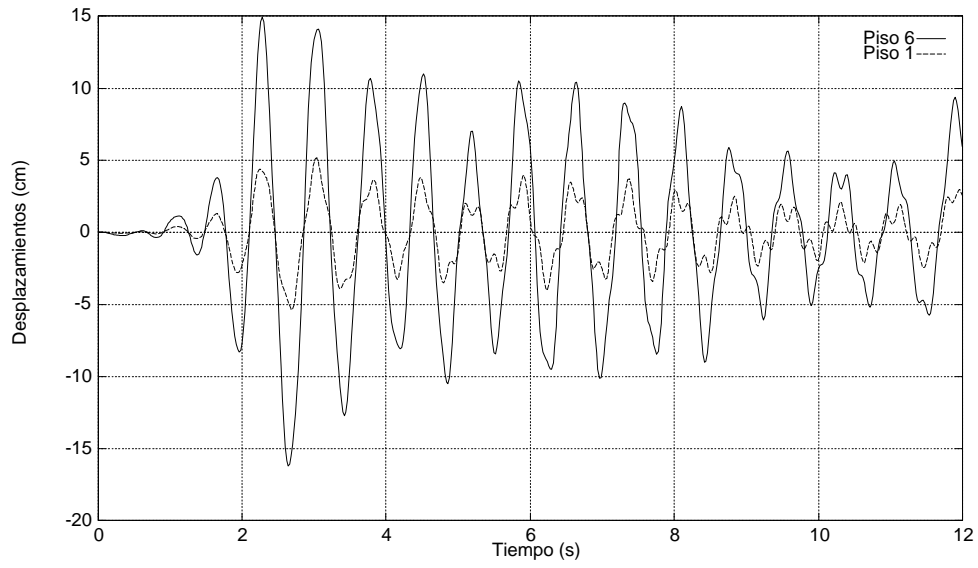
Los máximos esfuerzos se producen, para ambas estructuras, en el pilar de la primera planta (ver las figuras 6.22 a 6.27). El beneficio del sistema de aislamiento sobre estos esfuerzos se pone de manifiesto con una reducción de un 83.66% de los momentos flectores máximos. Esta reducción es de un 86.43% para los esfuerzos cortantes y de un 80.66% para los esfuerzos axiales. Los porcentajes de reducción de esfuerzos seccionales señalados se refieren a los esfuerzos generados por la acción sísmica (cargas dinámicas horizontales). Los esfuerzos producidos por cargas gravitacionales (no incluidas en el análisis) no sufrirían variación alguna por la utilización del sistema de aislamiento.

A continuación se describe con detalle la respuesta en el tiempo en desplazamientos, totales y relativos, y aceleraciones para diversos puntos (indicados en la figura 6.24) de ambas estructuras, de base fija y con aislamiento de base. En la figura 6.28 se puede observar la respuesta en desplazamientos del piso 6 de la estructura de base fija (punto H en figura 6.14). El desplazamiento máximo alcanza los 16.2 cm a los 2.64 s y, al ser nulos los desplazamientos de base, este valor es también el desplazamiento relativo total de la estructura.

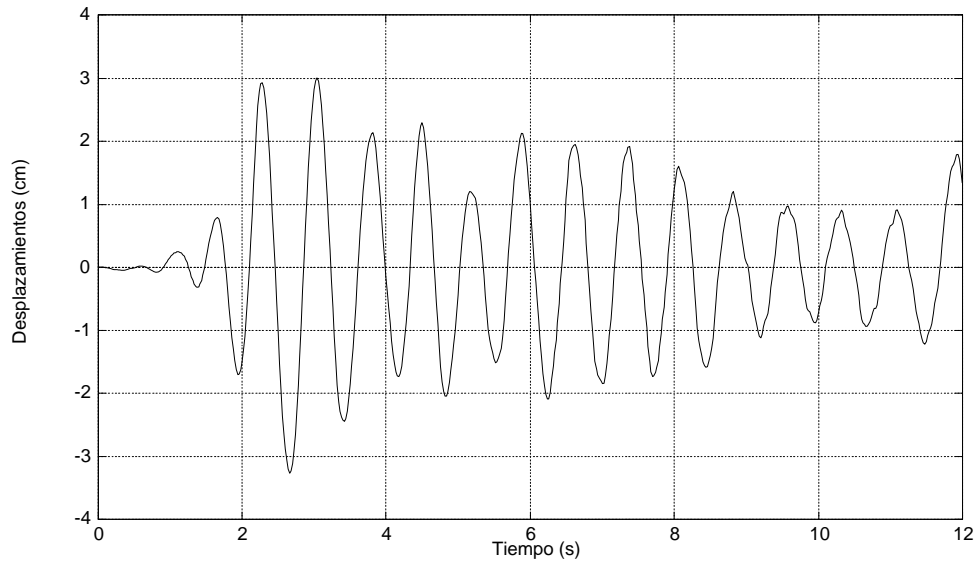
La historia de los desplazamientos relativos máximos entre pisos se indica en la figura 6.29 y corresponde a la diferencia de desplazamientos entre los pisos tercero y segundo (puntos E y D en figura 6.14). El valor máximo se produce a los 2.66 s y alcanza los 3.27 cm.

En la figura 6.30 se presenta la evolución de desplazamientos para el caso de la estructura aislada. Se grafican conjuntamente los desplazamientos de la base (punto B en figura 6.14) y del piso 6 (punto H en figura 6.14); lo que permite apreciar que la estructura se comporta aproximadamente como un sólido rígido. El desplazamiento máximo de la base es de 16.81 cm a los 5.66 s, mientras que el desplazamiento máximo del piso 6 es de 15.49 cm a los 5.64 s. Los desplazamientos de los pisos intermedios se encuentran entre estas dos curvas.

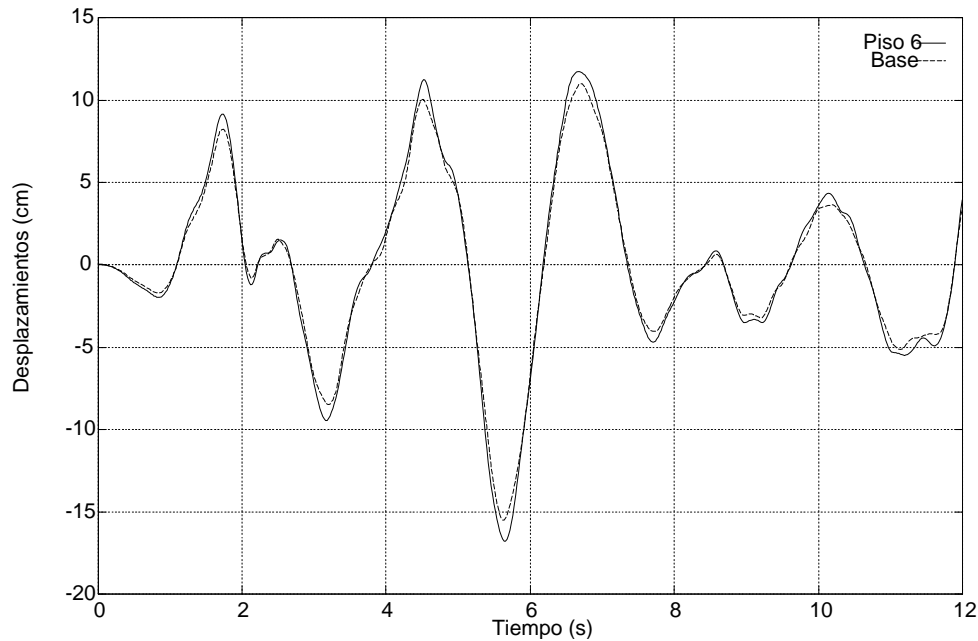
La diferencia entre los desplazamientos de la base y del piso 6 (estructura de base aislada) se grafica en la figura 6.31. Estos son los desplazamientos relativos que causarían daño estructural. Comparando estos valores con los desplazamientos en el caso de la estructura de base fija de la figura 6.28, se observa que en este último (base fija) el desplazamiento máximo alcanza los 16.2 cm, mientras que cuando la estructura se encuentra aislada este desplazamiento máximo se reduce



**Figura 6.28** Estructura de base fija. Respuesta en desplazamientos del primer (punto C) y último pisos (punto H).



**Figura 6.29** Desplazamiento relativo máximo entre pisos en la estructura de base fija (puntos E-D).



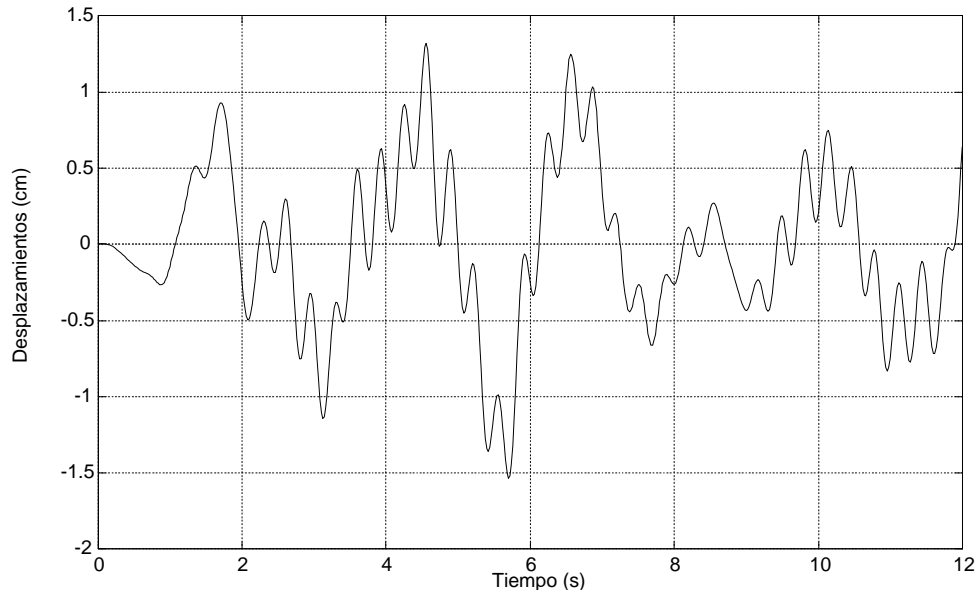
**Figura 6.30** Estructura de base aislada. Respuesta en desplazamientos de la base (punto B) y dintel del último piso (punto H).

a 1.53 cm a los 5.7 s. La reducción en desplazamiento estructural máximo es de un 90.56%.

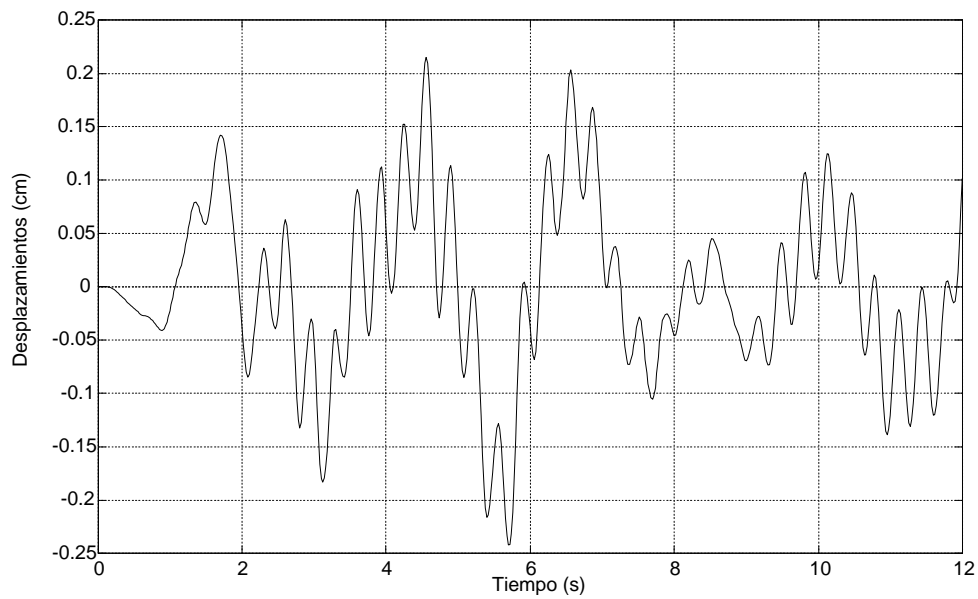
En la figura 6.32 se presentan los desplazamientos relativos máximos entre pisos, para la estructura de base aislada. El valor máximo alcanza los 0.24 cm a los 5.7 s, mientras que para la estructura de base fija, figura 6.29, tenemos un máximo relativo de 3.27 cm. La reducción en este caso es de un 92.66%.

En las figuras 6.33 y 6.34 se pueden apreciar las respuestas en aceleraciones del último piso (punto H en figura 6.14) en el caso de las estructuras de base aislada y fija, respectivamente. Al igual que en desplazamientos, la diferencia entre ambos resulta significativa. Los valores máximos obtenidos son  $380.8 \text{ cm/s}^2$  a los 2.14 s para la estructura aislada y de  $1831.6 \text{ cm/s}^2$  a los 6.96 s para la estructura de base fija. La reducción de aceleraciones máximas es igual al 79.2%.

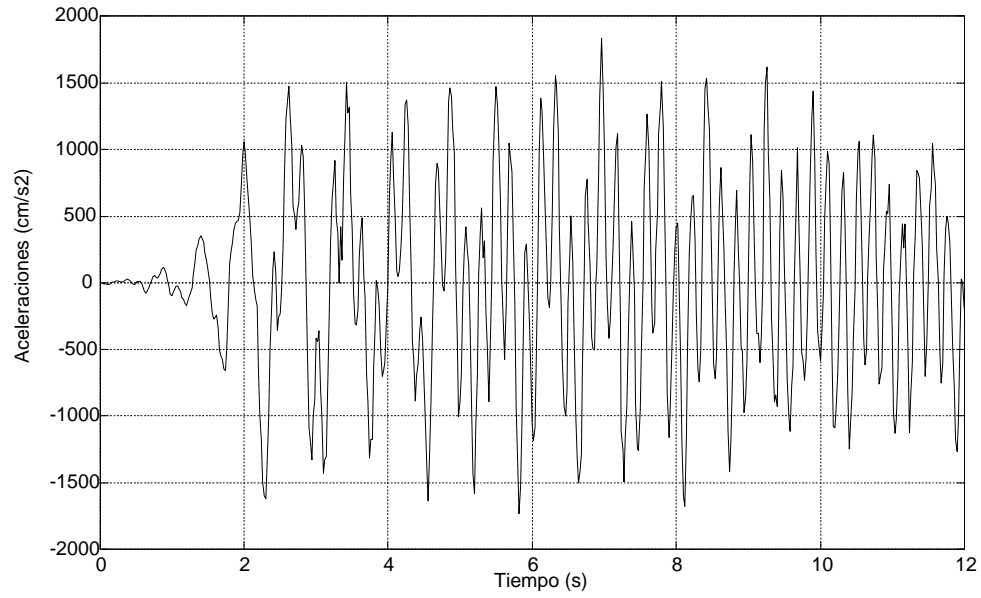
La historia de tensiones tangenciales en el dispositivo de apoyo (estructura con aislamiento), producida por los desplazamientos de la base durante el terremoto, se grafica en la figura 6.35. Estas tensiones corresponden al tercer punto de Gauss del elemento 1 y los desplazamientos son los correspondientes al nodo 4 (figura 6.15). El desplazamiento máximo de la base, que es de 16.81 cm, corresponde a una deformación por cortante del 67.78%, muy inferior a las deformaciones admitidas por este tipo de dispositivos. Por consiguiente, las tensiones tangenciales también son bajas y muy inferiores a las tensiones de rotura.



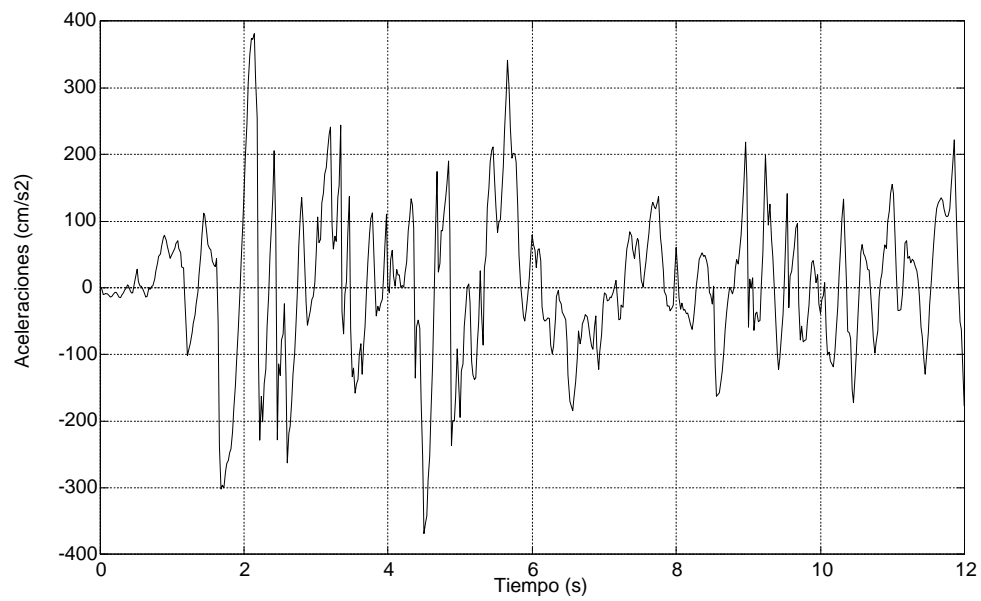
**Figura 6.31** Desplazamiento relativo total entre el piso 6 (punto H) y la base (punto B) en la estructura de base aislada.



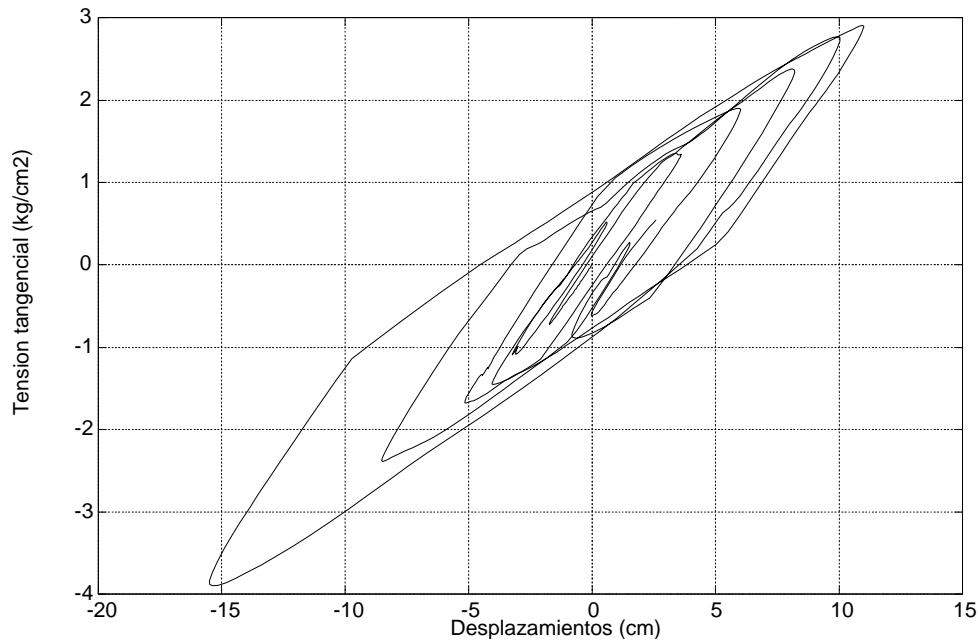
**Figura 6.32** Desplazamiento relativo máximo entre pisos en la estructura de base aislada.



**Figura 6.33** Aceleraciones máximas en la estructura de base fija, piso 6 (punto H).



**Figura 6.34** Aceleraciones máximas en la estructura de base aislada, piso 6 (punto H).



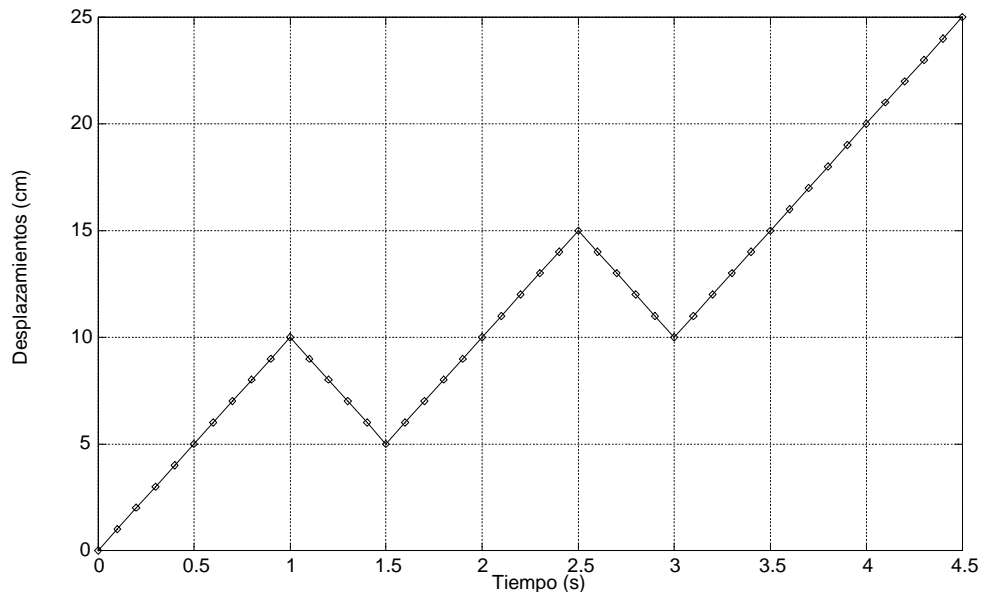
**Figura 6.35** Tensiones tangenciales en el dispositivo de apoyo.

### Índices de daño global de la estructura

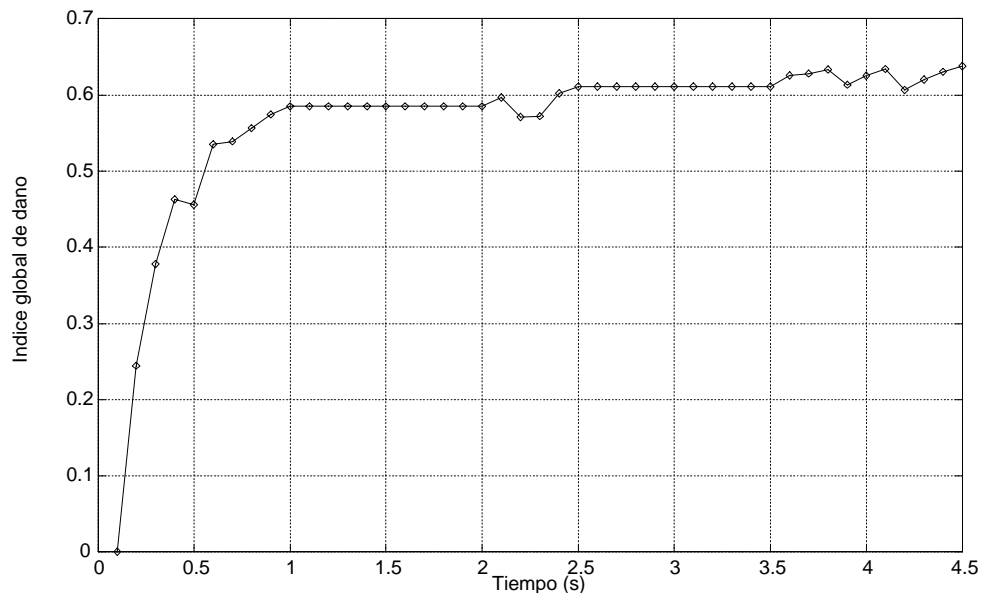
Para evaluar numéricamente el estado de una estructura después de una acción extraordinaria, estática o dinámica, pueden utilizarse índices de daño global. En el caso de estructuras de barras, estos índices permiten evaluar el daño a partir de magnitudes como esfuerzos seccionales, ductilidad o energía potencial de los elementos estructurales o describir el daño según el estado del material en diversos puntos de la estructura (Hanganu 1997).

El índice de daño puede ser local, si se refiere a un punto, o global si expresa el estado de una sección, de un elemento estructural o de toda la estructura. En este trabajo se denomina índice de daño local a aquel producido en un punto del material. Dicho índice puede variar entre 0 y 1. Cuando el estado tensional del material de este punto se encuentra dentro del límite elástico, dicho índice será igual a cero (no existe daño); cuando se supera dicho límite elástico, se considera el punto dañado (Oller, Luccioni & Barbat 1996). El índice de daño será igual a 1 cuando en el punto en consideración el material se encuentre totalmente degradado, sin resistencia.

Para cuantificar el índice de daño global utilizado se ensaya numéricamente en primer lugar la estructura de base fija con carga estática, imponiendo desplazamientos cíclicos en el punto mas alto de la estructura (piso 6). En la figura 6.36 pueden observarse los desplazamientos impuestos y en la figura 6.37 la evolución

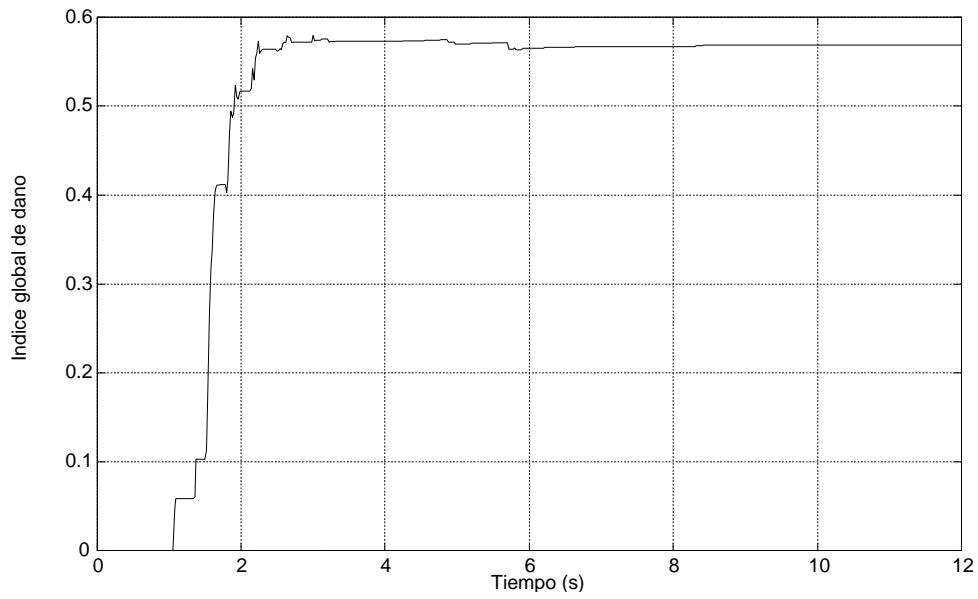


**Figura 6.36** Curva de desplazamientos impuestos en el último piso (punto H).

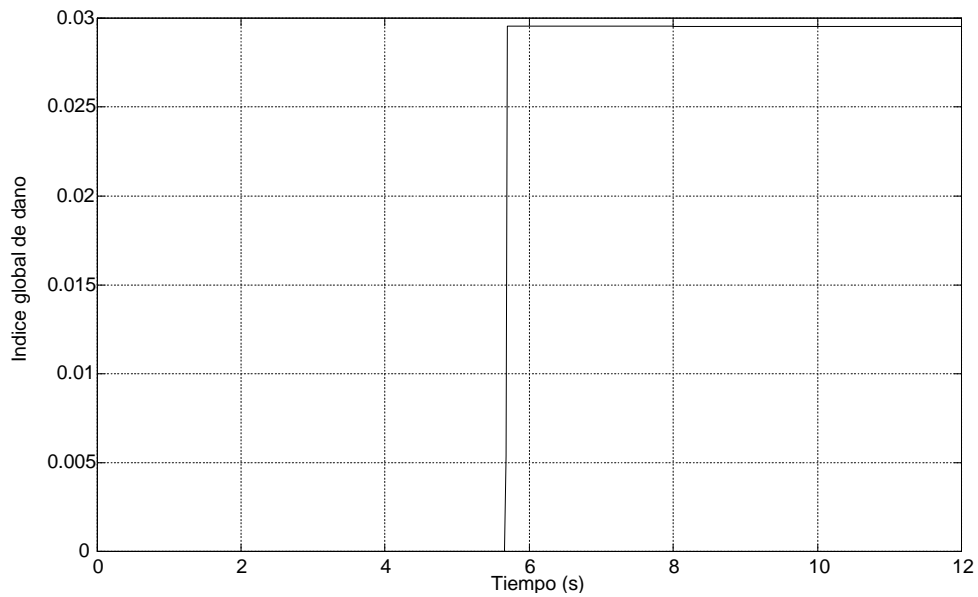


**Figura 6.37** Evolución del índice global de daño frente a carga estática.





**Figura 6.38** Evolución del índice global de daño en la estructura de base fija.



**Figura 6.39** Evolución del índice global de daño en la estructura de base aislada.

del índice de daño. Este índice es siempre creciente, descontando pequeños descensos causados presuntamente por la tolerancia en la convergencia. Durante los procesos de descarga y recarga el índice permanece constante.

En las figuras 6.38 y 6.39 puede apreciarse la evolución del índice global de daño para las estructuras de base fija y de base aislada, respectivamente, cuando éstas son sometidas al terremoto de El Centro. Obsérvese que en el caso de la estructura de base fija el índice de daño global alcanza valores próximos al 60%, indicando que la estructura se encuentra seriamente dañada y en consecuencia fuera de servicio. En este caso, una posible reparación de la estructura puede resultar económicamente inviable y podría ser necesaria su demolición.

Por otro lado, la estructura con aislamiento de base presenta un índice de daño global inferior al 3%. Un índice de daño global tan bajo como este indica que la estructura no solo continúa en servicio después de producirse el terremoto, sino que los daños son mínimos y serían difícilmente detectados en una inspección visual.

Una diferencia tan significativa en los daños producidos en una y otra estructura se comprende fácilmente al comparar los máximos desplazamientos estructurales totales, esto es los desplazamientos relativos entre la base y el piso 6, que son de 16.2 cm en la estructura de base fija y de 1.53 cm en la estructura con aislamiento de base (figuras 6.28 y 6.31), y los máximos desplazamientos relativos entre pisos, de 3.27 cm en la estructura de base fija y de 0.24 cm en la estructura con aislamiento de base (figuras 6.29 y 6.32).

Observando los índices de daño global (figuras 6.38 y 6.39) se puede afirmar que un aislamiento de base, como el aquí analizado, permite que la estructura supere un movimiento sísmico de la magnitud del terremoto de El Centro con daños insignificantes, mientras que la misma estructura sin aislamiento de base sería totalmente dañada.

# Apendice A

## ELEMENTOS DE MECÁNICA DEL CONTINUO EN GRANDES DEFORMACIONES

### A.1 INTRODUCCIÓN

En el presente Apéndice se hace una revisión de conceptos de mecánica de medios continuos en lo referente a la cinemática de grandes deformaciones. Esta revisión incluye conceptos como la definición de las configuraciones de referencia y deformada, tensor gradiente de deformaciones, descomposición polar del tensor gradiente, tensores de estiramiento y rotación, distintos tensores de deformación (Green-Lagrange, Almansi, Hencky), operadores *push-forward* y *pull-back* y los distintos tensores de tensión (Primer y Segundo tensor de Piola-Kirchhoff, Cauchy). Estos conceptos son utilizados, principalmente, en los Capítulos 3 y 4 de esta monografía.

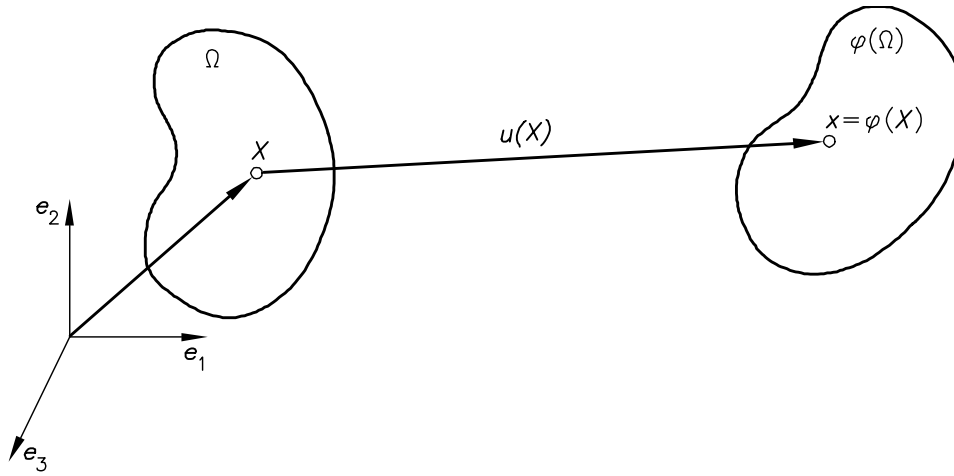
### A.2 CINEMÁTICA

Denominando  $\mathcal{B}$  a un *cuerpo* con un contorno  $\partial\Omega$  que ocupa una región  $\Omega$  del espacio de tres dimensiones  $\mathcal{E}$  en su *configuración de referencia*, una *deformación* de  $\mathcal{B}$ , tal como la indicada en la figura A.1, es definida por una función biunívoca,

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathcal{E}$$

que mapea cada partícula material  $\mathbf{X}$  de  $\mathcal{B}$  (identificada con su posición en la configuración de referencia de  $\mathcal{B}$ ) en un punto

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) \tag{A.1}$$



**Figura A.1** Deformación.

posicionando la partícula en la *configuración deformada* de  $\mathcal{B}$ . La región del espacio  $\mathcal{E}$  ocupada por  $\mathcal{B}$  en su configuración deformada es identificada como  $\varphi(\Omega)$

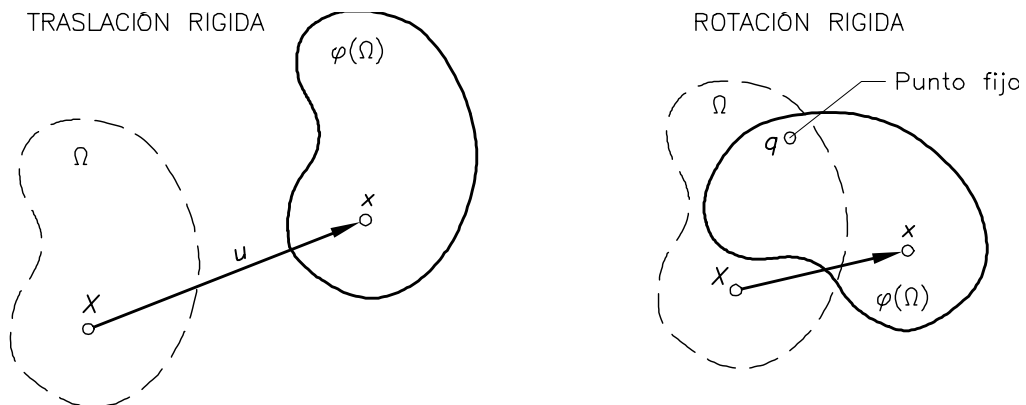
El vector de campo  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ , definido por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{X} \tag{A.2}$$

es el *desplazamiento* de  $\mathbf{X}$ , con el cual se puede escribir

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}) \tag{A.3}$$

Una deformación de cuerpo rígido de  $\mathcal{B}$  es una deformación que preserva las distancias entre todas las partículas materiales de  $\mathcal{B}$ . Tal como puede observarse



**Figura A.2** Deformaciones rígidas.

en la figura A.2, una deformación de cuerpo rígido puede ser una traslación o una rotación (o una combinación de ambas). Una *traslación rígida* es una deformación con vector de desplazamientos constante, es decir, el vector  $\mathbf{u}$  es independiente de  $\mathbf{X}$ ,

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u} \tag{A.4}$$

Una *rotación rígida* es una deformación que puede ser expresada como:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{q} + \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{q}) \tag{A.5}$$

siendo  $\mathbf{R}$  un tensor ortogonal y  $\mathbf{q}$  el punto alrededor del cual se produce la rotación del cuerpo  $\mathcal{B}$ . Una deformación es rígida, incluyendo traslaciones y/o rotaciones, sí y solo sí esta deformación puede ser expresada en la forma:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{q}) + \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{q}) \tag{A.6}$$

la cual representa una traslación rígida con desplazamientos  $\varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{q}$  superpuestos a una rotación rígida  $\mathbf{R}$  alrededor del punto  $\mathbf{q}$ .

Una deformación del cuerpo  $\mathcal{B}$  dependiente del tiempo se denomina *movimiento* de  $\mathcal{B}$ . Durante el movimiento  $\varphi$ , la posición  $\mathbf{x}$  de una partícula  $\mathbf{X}$  (véase la figura A.3) al tiempo  $t$  es dada por:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \tag{A.7}$$

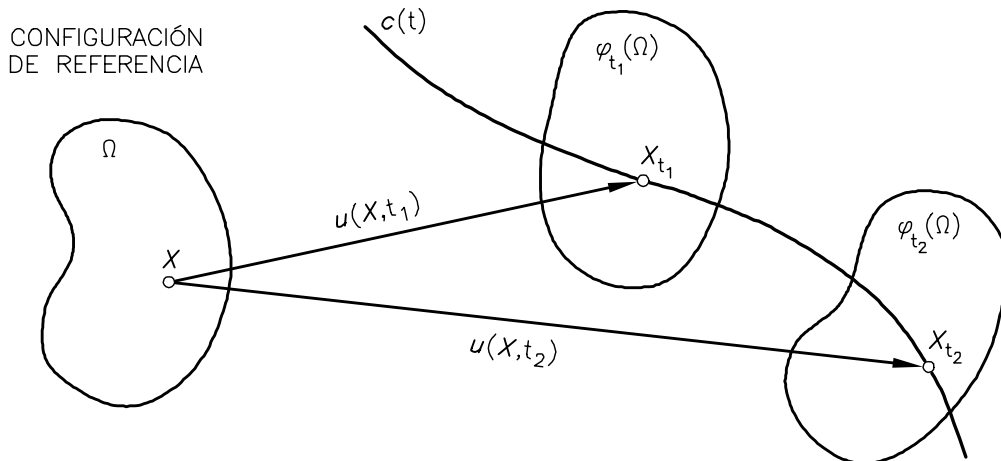
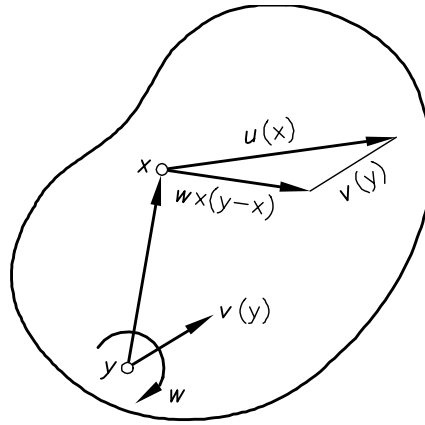


Figura A.3 Movimiento.

De manera similar, la región del espacio  $\mathcal{E}$  ocupada por el cuerpo  $\mathcal{B}$  al tiempo  $t$  viene dada por:  $\varphi(\Omega, t)$ . En términos del campo de desplazamientos, el movimiento es expresado como:

$$\varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{A.8})$$

La curva paramétrica  $\mathbf{c}(t)$ , definida como:  $\mathbf{c}(t) = \varphi(\mathbf{X}, t)$  para un punto material fijo, describe la trayectoria de  $\mathbf{X}$  durante el movimiento de  $\mathcal{B}$ .



**Figura A.4** Velocidad.

Durante un movimiento  $\varphi$ , la *velocidad* de una partícula material  $\mathbf{X}$  es definida por:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$$

Considerando que para cada tiempo  $t$  el mapa  $\varphi(\cdot, t)$  es biunívoco, los puntos materiales pueden ser expresados en términos del lugar que éstos ocupan al tiempo  $t$ , en la forma:

$$\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.9})$$

El mapa  $\varphi^{-1}$  se denomina *mapa de referencia*. Utilizando este mapa de referencia se puede definir la función:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$$

El campo  $\mathbf{v}$  es denominado *velocidad espacial* y da la velocidad de la partícula material en la posición  $\mathbf{x}$  al tiempo  $t$ .

Un *movimiento rígido* de  $\mathcal{B}$  es un movimiento para el cual, al tiempo  $t$ , el mapa  $\varphi(\cdot, t)$  es una deformación rígida. Un movimiento  $\varphi$  es rígido sí y sólo sí, para cada tiempo  $t$ , la velocidad espacial admite la representación:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{W}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (\text{A.10})$$

para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \varphi(\Omega, t)$ , siendo  $\mathbf{W}(t)$  un tensor vorticidad. La velocidad en  $\mathbf{x}$  es dada como la suma (véase la figura A.4) de una velocidad uniforme  $\mathbf{v}(\mathbf{y}, t)$  y una rotación sobreimpuesta en la línea que pasa por  $\mathbf{y}$  y es paralela al vector axial asociado al tensor vorticidad  $\mathbf{W}$ . Llamando  $\mathbf{w}(t)$  al vector axial de  $\mathbf{W}(t)$ , el campo de velocidades puede ser expresado como:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{w}(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (\text{A.11})$$

siendo ésta la forma estándar para el campo de velocidades en dinámica de cuerpos rígidos. El vector  $\mathbf{w}(t)$  se denomina *velocidad angular* del cuerpo.

### A.2.1 Campos Material y Espacial

Los campos  $\dot{\mathbf{x}}$  y  $\mathbf{v}$  introducidos en la sección anterior describen la velocidad de partículas materiales, pero tienen diferentes argumentos. Mientras  $\dot{\mathbf{x}}$  tiene como argumentos la partícula material y el tiempo, los argumentos de  $\mathbf{v}$  son la posición espacial y el tiempo. Esto motiva las siguientes definiciones. Sea  $\alpha$  un campo general (escalar, vectorial o tensorial) dependiente del tiempo y definido en un cuerpo  $\mathcal{B}$ . Si el dominio de  $\alpha$  es  $\Omega \times R$ , esto es, si el valor de  $\alpha$  es expresado como una función de partículas materiales  $\mathbf{X}$  (y tiempo), se dice que  $\alpha$  es un *campo material*. Si, en cambio, su dominio es  $\varphi_t(\Omega) \times R$  se dice que  $\alpha$  es un *campo espacial*. Empleando la ecuación (A.7) la *descripción material* de un campo espacial  $\alpha(\mathbf{x}, t)$  es definida por la expresión:

$$\alpha_m(\mathbf{X}, t) = \alpha(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \quad (\text{A.12})$$

y, a la inversa, la *descripción espacial* de un campo material  $\beta(\mathbf{X}, t)$  se define mediante la expresión:

$$\beta_s(\mathbf{x}, t) = \beta(\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \quad (\text{A.13})$$

Un campo material (o espacial) no necesariamente representa una cantidad físicamente asociada con la configuración de referencia (o deformada) del cuerpo, pero cualquier campo asociado con un movimiento del cuerpo  $\mathcal{B}$  puede ser expresado

como una función del tiempo y de partículas materiales o posiciones espaciales. Los subíndices  $m$  y  $s$  utilizados en las ecuaciones (A.12) y (A.13) para indicar las descripciones material o espacial de campos generales no son utilizados de aquí en adelante, a efectos de simplificar la notación se entenderá descripción material o espacial según los argumentos utilizados:  $\mathbf{X}$  (material) o  $\mathbf{x}$  (espacial).

### A.2.2 Gradientes material y espacial y derivadas de tiempo

Los *gradientes material*  $\nabla_{\mathbf{X}}\alpha$  y *espacial*  $\nabla_{\mathbf{x}}\alpha$  de un campo general  $\alpha$ , se definen como:

$$\nabla_{\mathbf{X}}\alpha = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}\alpha(\mathbf{X}, t) \quad \text{y} \quad \nabla_{\mathbf{x}}\alpha = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.14})$$

esto es, las derivadas de  $\alpha$  con respecto a  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{x}$  manteniendo fijo el tiempo  $t$ .

De manera similar, las *derivadas temporales material*  $\dot{\alpha}$  y *espacial*  $\alpha'$  del campo  $\alpha$  se definen como:

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial}{\partial t}\alpha(\mathbf{X}, t) \quad \text{y} \quad \alpha' = \frac{\partial}{\partial t}\alpha(\mathbf{x}, t)$$

La derivada temporal material  $\dot{\alpha}$  mide la tasa de cambio de  $\alpha$  en una partícula material fija  $\mathbf{X}$ , mientras que la derivada temporal espacial mide la tasa de cambio de  $\alpha$  observada en una posición espacial fija  $\mathbf{x}$ .

### A.2.3 Gradiente de deformación

El *gradiente de deformación* del movimiento  $\varphi$  es un tensor bipuntual de segundo orden  $\mathbf{F}$  definido por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}}\varphi(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial \mathbf{X}} \quad (\text{A.15})$$

y teniendo en cuenta la ecuación (A.8) puede ser expresado como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u} \quad (\text{A.16})$$

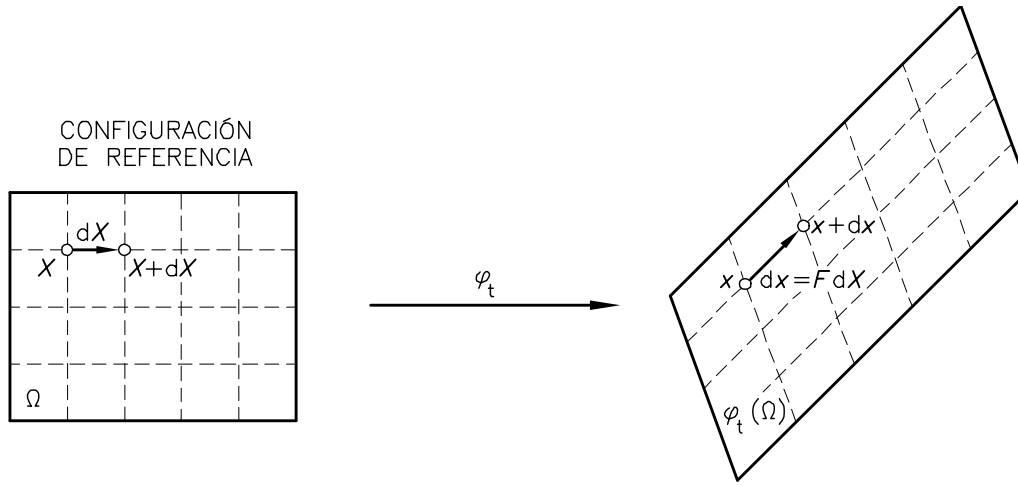
con componentes cartesianas dadas por:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (\text{A.17})$$

siendo  $x_i$  las componentes de  $\mathbf{x}_t$ .

Considérese la línea material infinitesimal  $d\mathbf{X}$  que conecta dos partículas materiales próximas  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$  de un cuerpo deformable, tal como el indicado en





**Figura A.5** Gradiente de deformación.

la figura A.5. Sometido el cuerpo a una deformación  $\varphi_t$  estas partículas son mapeadas en  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ , respectivamente. El gradiente de deformación es el operador lineal que relaciona la línea material infinitesimal  $d\mathbf{X}$  con su posición deformada  $d\mathbf{x}$ .

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \tag{A.18}$$

Una deformación de un cuerpo con gradiente de deformación constante, esto es con  $\mathbf{F}$  independiente de  $\mathbf{X}$ , se denomina *deformación homogénea*.

**Cambio de volumen. Determinante del gradiente de deformación**

Considérese el volumen infinitesimal  $dv_o$  definido por los vectores infinitesimales  $d\mathbf{a}$ ,  $d\mathbf{b}$  y  $d\mathbf{c}$  partiendo de una partícula material  $\mathbf{X}$  en la configuración de referencia, tal como se indica en la figura A.6. En esta configuración se tiene:

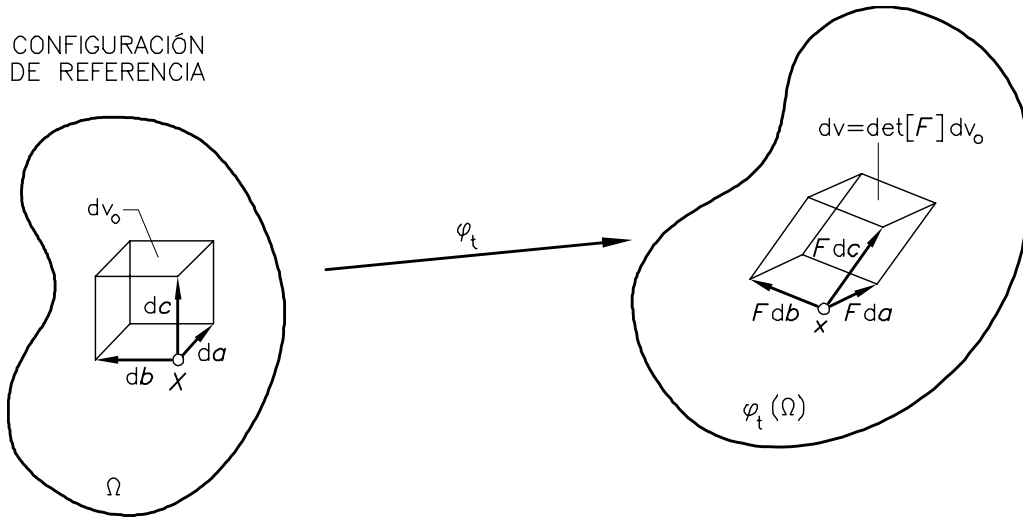
$$dv_o = (d\mathbf{a} \times d\mathbf{b}) \cdot d\mathbf{c}$$

La deformación  $\varphi_t$  mapea los vectores infinitesimales en  $\mathbf{F}d\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{F}d\mathbf{b}$  y  $\mathbf{F}d\mathbf{c}$ , de manera que el volumen infinitesimal deformado se expresa como:

$$dv = (\mathbf{F}d\mathbf{a} \times \mathbf{F}d\mathbf{b}) \cdot \mathbf{F}d\mathbf{c}$$

Haciendo uso de la identidad:

$$\det [\mathbf{A}] = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{u} \times \mathbf{A}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{A}\mathbf{w}}{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}}$$



**Figura A.6** Determinante del gradiente de deformación.

válida para cualquier tensor  $\mathbf{A}$  y cualquier conjunto  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  de vectores linealmente independientes, puede decirse que el determinante del gradiente de deformación,

$$\det[\mathbf{F}] = \frac{dv}{dv_0} \quad (\text{A.19})$$

representa el volumen después de la deformación por unidad de volumen de referencia. Este determinante es usualmente designado por  $J$ :

$$J \equiv \det[\mathbf{F}] \quad (\text{A.20})$$

En la configuración de referencia  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  y en consecuencia  $\det[\mathbf{F}] = 1$ . De la ecuación (A.19), si el  $\det[\mathbf{F}] = 0$  esto implica que el volumen infinitesimal ha colapsado en una partícula material, esto representa una situación físicamente inaceptable, y cualquier configuración con  $\det[\mathbf{F}] < 0$  no puede ser alcanzada desde la configuración de referencia sin haber pasado, en algún momento, por  $\det[\mathbf{F}] = 0$ . En consecuencia, para cualquier deformación del cuerpo,  $\mathbf{F}$  es un tensor definido positivo:

$$\det[\mathbf{F}] > 0 \quad (\text{A.21})$$

#### A.2.4 Descomposición polar. Estiramientos y rotación.

Aplicando una *descomposición polar* al tensor gradiente de deformación, se obtiene:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (\text{A.22})$$

donde el tensor ortogonal  $\mathbf{R}$  es el *tensor de rotación* y los tensores simétricos definidos positivos  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  son los *tensores de estiramiento derecho e izquierdo*, respectivamente. Los tensores de estiramiento derecho e izquierdo están relacionados en la forma:

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^T \mathbf{V} \mathbf{R} \quad \text{y} \quad \mathbf{V} = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^T \quad (\text{A.23})$$

Los *tensores derecho e izquierdo de Cauchy-Green*,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{b}$  respectivamente, se definen a partir del tensor gradiente de deformación, en la forma:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (\text{A.24})$$

y teniendo en cuenta la ecuación (A.22) y que siendo  $\mathbf{R}$  un tensor ortogonal,  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{1}$ , éstos pueden expresarse en la forma:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \mathbf{V}^2 \quad (\text{A.25})$$

En la figura A.7 se representa la descomposición polar de un cuerpo rectangular sometido a deformación homogénea,  $\mathbf{F}$  independiente de  $\mathbf{X}$ . El cuerpo sufre un estiramiento uniforme de valor  $\lambda_1$ , en la dirección de su eje longitudinal, simultáneamente con un acortamiento uniforme de valor  $\lambda_2$ , en la dirección de su eje transversal y una rotación rígida de un ángulo de valor  $\alpha$ . Siendo  $X_i$  y  $x_i$  las coordenadas de  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{x}$  en el sistema cartesiano asociado con la base ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , el mapa de deformaciones es definido por:

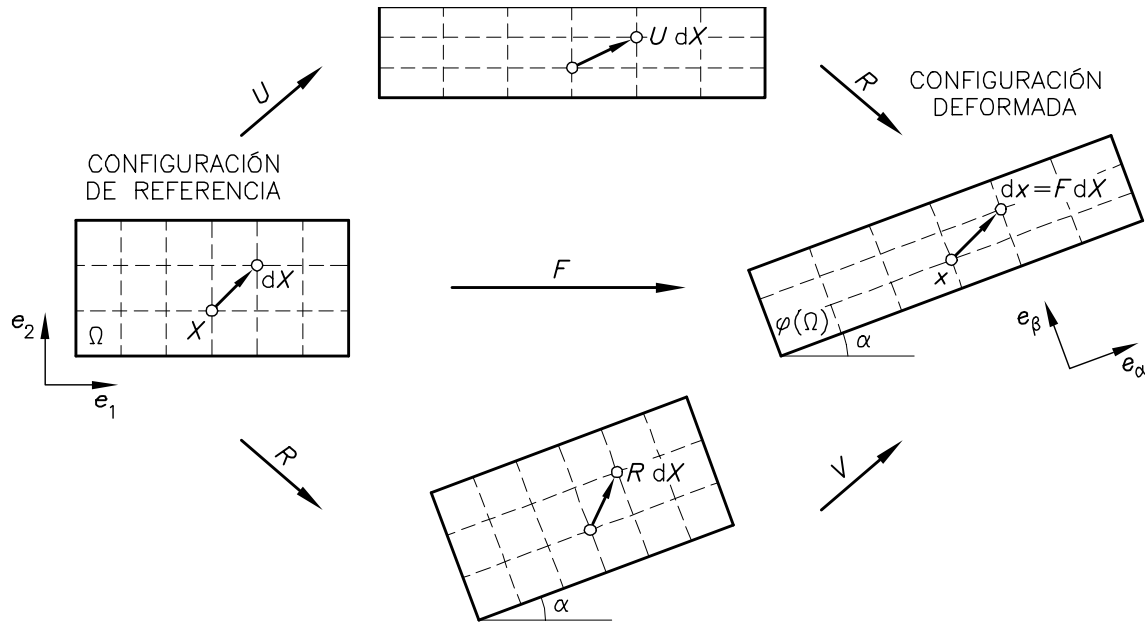
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{l} x_1 = X_1 \lambda_1 \cos \alpha - X_2 \lambda_2 \sin \alpha \\ x_2 = X_1 \lambda_1 \sin \alpha + X_2 \lambda_2 \cos \alpha \end{array} \right\}$$

La representación matricial del gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  en la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  es dada por:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cos \alpha & -\lambda_2 \sin \alpha \\ \lambda_1 \sin \alpha & \lambda_2 \cos \alpha \end{bmatrix}$$

De la descomposición polar de  $\mathbf{F}$  se obtienen el tensor de rotación  $\mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$



**Figura A.7** Descomposición polar del gradiente de deformación. Estiramientos y rotación.

y los tensores de estiramiento derecho  $\mathbf{U}$ ,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

e izquierdo  $\mathbf{V}$ ,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cos^2 \alpha + \lambda_2 \sin^2 \alpha & (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \alpha \cos \alpha \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \alpha \cos \alpha & \lambda_1 \sin^2 \alpha + \lambda_2 \cos^2 \alpha \end{bmatrix}$$

La descomposición polar de  $\mathbf{F}$ , permite considerar el mapeo de la deformación de  $d\mathbf{X}$  en  $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$  en dos pasos. Utilizando la descomposición polar derecha  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ , estos pasos son:

1.  $d\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{U}d\mathbf{X}$
2.  $\mathbf{U}d\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{R}(\mathbf{U}d\mathbf{X}) = \mathbf{F}d\mathbf{X}$

En el paso 1,  $d\mathbf{X}$  se deforma como si el cuerpo fuese solamente alargado y comprimido en las direcciones de los ejes longitudinal y transversal respectivamente, ejes cuyas direcciones coinciden en este paso con los ejes de referencia  $\{e_1, e_2\}$ . El paso 2 consiste en una rotación de la fibra deformada  $\mathbf{U}d\mathbf{X}$  y corresponde a una rotación rígida del cuerpo, de ángulo  $\alpha$ . Si se utiliza la descomposición polar izquierda  $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ , estos pasos se dan en orden inverso:

1.  $d\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{R}d\mathbf{X}$
2.  $\mathbf{R}d\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{V}(\mathbf{R}d\mathbf{X}) = \mathbf{F}d\mathbf{X}$

En este caso, la fibra es primero rotada un ángulo  $\alpha$ . El segundo paso corresponde a la deformación de esta fibra rotada por alargamiento y compresión del cuerpo según sus direcciones axial y transversal, direcciones que debido a la rotación previa resultan coincidentes con  $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{R}\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_\beta = \mathbf{R}\mathbf{e}_2$ , respectivamente. Con referencia a esta base  $\{\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta\}$  la representación matricial de  $\mathbf{V}$  tiene la misma forma que  $\mathbf{U}$  con referencia a  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

### Descomposición espectral de los tensores de estiramiento

Siendo  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  tensores simétricos, éstos admiten una *descomposición espectral*:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad \text{y} \quad \mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (\text{A.26})$$

donde  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  son los autovalores de  $\mathbf{U}$  y de  $\mathbf{V}$ , denominados *estiramientos principales* y los vectores  $\mathbf{N}_i$  y  $\mathbf{n}_i$  son autovectores unitarios de  $\mathbf{U}$  y de  $\mathbf{V}$ , respectivamente. Los conjuntos  $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3\}$  y  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$  forman bases ortonormales que definen las *direcciones principales lagrangeana y euleriana*, respectivamente.

De la ecuación (A.26) y recordando la ecuación (A.23) se obtiene la siguiente relación entre los autovectores de  $\mathbf{U}$  y de  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{R}\mathbf{n}_i \quad (\text{A.27})$$

esto es, cada vector  $\mathbf{n}_i$  difiere del correspondiente  $\mathbf{N}_i$  en una rotación  $\mathbf{R}$ .

La descomposición espectral de los tensores de estiramiento derecho e izquierdo implica que para cualquier deformación, el estiramiento local de una partícula material puede siempre ser expresado como una superposición de estiramientos según tres direcciones mutuamente ortogonales. En el ejemplo de la figura A.7 los estiramientos principales son  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  y las direcciones principales lagrangeana y euleriana son:  $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  y  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\} = \{\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_3\}$ , respectivamente.

#### A.2.5 Tensores de deformación

En la sección anterior se ha visto que en la zona infinitesimal próxima a una partícula material  $\mathbf{X}$ , las rotaciones pueden distinguirse de los estiramientos por medio de una descomposición polar del gradiente de deformación. Las distancias entre partículas permanece fija cuando se consideran solo las rotaciones; estas

distancias cambian si se consideran solo los estiramientos, caracterizados por  $\mathbf{U}$  o  $\mathbf{V}$ , por lo que en este caso se dice que la región se encuentra deformada. Para cuantificar la deformación, esto es, para evaluar en qué medida  $\mathbf{U}$  (o  $\mathbf{V}$ ) se aparta de  $\mathbf{I}$ , es necesario definir algunos *tensores de deformación*.

Considérese nuevamente la figura A.7 y la línea material representada por un vector infinitesimal  $d\mathbf{X}$  partiendo desde  $\mathbf{X}$  que la deformación lleva a  $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$ . El cuadrado de esta longitud deformada es:

$$|d\mathbf{x}|^2 = \mathbf{F}d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X} = \mathbf{C}d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \left( \mathbf{I} + 2\mathbf{E}^{(2)} \right) d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (\text{A.28})$$

donde  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$  es el tensor de Cauchy-Green derecho y el tensor de deformación  $\mathbf{E}^{(2)}$  es el denominado *tensor de Green-Lagrange*, definido como:

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left[ \nabla_X \mathbf{u} + (\nabla_X \mathbf{u})^T + (\nabla_X \mathbf{u})^T \nabla_X \mathbf{u} \right] \quad (\text{A.29})$$

El valor del tensor de Green-Lagrange deberá ser nulo  $\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{0}$ , para que el tamaño de la línea material infinitesimal partiendo desde  $\mathbf{X}$  permanezca constante,  $|d\mathbf{x}| = |d\mathbf{X}|$ . Esta condición es equivalente a  $\mathbf{C} = \mathbf{U} = \mathbf{I}$ , la cual implica que  $\mathbf{F}$  es un tensor ortogonal y la deformación es rígida (solo traslaciones y/o rotaciones) en la región de  $\mathbf{X}$ . Por la *definición* de  $\mathbf{E}^{(2)}$  en la ecuación (A.29), sus autovectores coinciden con la tríada lagrangeana, por lo que puede ser expresado como:

$$\mathbf{E}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (\text{A.30})$$

y al medir deformaciones según las direcciones lagrangeanas principales es una medida de *deformación lagrangeana*.

El tensor de deformación de Green-Lagrange no es la única manera de cuantificar deformaciones. La definición de medidas de deformación es en alguna manera arbitraria y la elección es usualmente dictada por conveniencias matemáticas. Una importante familia de tensores de deformación lagrangeanos es definida por la expresión:

$$\mathbf{E}^{(m)} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{m} (\mathbf{U}^m - \mathbf{I}) & \text{para } m \neq 0 \\ \ln [\mathbf{U}] & \text{para } m = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A.31})$$

siendo  $m$  un número real y  $\ln[\cdot]$  el logaritmo del tensor  $[\cdot]$ . En términos de descomposición espectral, la ecuación (A.31) puede expresarse como:

$$\mathbf{E}^{(m)} = \sum_{i=1}^3 f(\lambda_i) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (\text{A.32})$$

con

$$f(\lambda_i) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{m}(\lambda_i^m - 1) & \text{para } m \neq 0 \\ \ln \lambda_i & \text{para } m = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A.33})$$

El tensor de Green-Lagrange,  $\mathbf{E}^{(2)}$ , es un miembro de esta familia (con  $m = 2$ ). Otros miembros de la familia son los tensores de *Biot* ( $m = 1$ ), *Hencky* ( $m = 0$ ) y *Almansi* ( $m = -2$ ), y para todos ellos la deformación será nula solo en el caso de que el gradiente de deformación represente una deformación rígida:

$$\mathbf{E}^{(m)} = \mathbf{0} \iff \mathbf{U} = \mathbf{I} \iff \mathbf{F} = \mathbf{R}$$

Análogamente a estas medidas de deformación, es posible definir tensores que midan la deformación según las direcciones eulerianas principales, esto es *tensores de deformación eulerianos*. La definición, basada en el tensor de estiramiento izquierdo, es equivalente a la ecuación (A.31),

$$\mathbf{e} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{m}(\mathbf{V}^m - \mathbf{I}) & \text{para } m \neq 0 \\ \ln[\mathbf{V}] & \text{para } m = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A.34})$$

o, utilizando la tríada euleriana:

$$\mathbf{e} = \sum_{i=1}^3 f(\lambda_i) \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (\text{A.35})$$

Los tensores lagrangeanos y eulerianos difieren en una rotación,  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{e}^{(m)} = \mathbf{R}\mathbf{E}^{(m)}\mathbf{R}^t \quad (\text{A.36})$$

Si en la ecuación (A.36) se reemplaza  $\mathbf{E}^{(m)}$  por su definición según la ecuación (A.31) para el caso ( $m = -2$ ), se tiene:

$$\mathbf{e}^{(-2)} = \frac{1}{2}\mathbf{R}(\mathbf{I} - \mathbf{U}^{-2})\mathbf{R}^T$$

y recordando las ecuaciones (A.23) y (A.25)

$$\mathbf{e}^{(-2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-2}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1})$$

siendo ésta la forma más conocida del tensor de Almansi.

### A.2.6 Gradiente de velocidad. Tasa de deformación y vorticidad

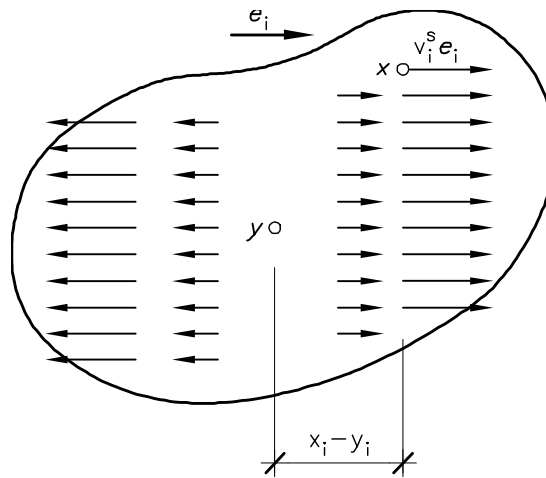
El campo espacial  $\mathbf{l}$ , definido como:

$$\mathbf{l} = \nabla_x \mathbf{v}$$

se denomina *gradiente de velocidad*,

$$\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}} \right) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{A.37})$$

Separando el tensor  $\mathbf{l}$  en sus partes simétrica y asimétrica, se obtienen los tensores



**Figura A.8** Campo de velocidad de deformación.

tasa de deformación  $\mathbf{d}$  y vorticidad (*spin tensor*)  $\mathbf{w}$ :

$$\mathbf{d} = \text{sim} [\mathbf{l}] = 0.5(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \text{asim} [\mathbf{l}] = 0.5(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) \quad (\text{A.38})$$

A efectos de conocer el significado físico de los tensores  $\mathbf{d}$  y  $\mathbf{w}$ , considérese un cuerpo en movimiento con gradiente de velocidad constante (independiente de  $\mathbf{x}$ ). Para tal movimiento, el campo de velocidades es:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{l}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Introduciendo la descomposición de  $\mathbf{l}$  en sus partes simétrica y antisimétrica, el campo de velocidades puede ser separado en la forma:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^R(\mathbf{y}, t) + \mathbf{v}^S(\mathbf{y}, t)$$



con las definiciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^R(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{w}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \mathbf{v}^S(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{d}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{y})\end{aligned}$$

Recordando la ecuación (A.10) la velocidad  $\mathbf{v}^R$ , asociada con el tensor vorticidad  $\mathbf{w}$ , puede identificarse como una velocidad *rígida*. La única contribución a la deformación es dada por el término  $\mathbf{v}^S$  asociado con el tensor tasa de deformación  $\mathbf{d}$ , que al ser un tensor simétrico admite la representación:

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^3 d_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$$

donde  $d_i$  son los autovalores de  $\mathbf{d}$  y  $\{\mathbf{n}_i\}$  una base ortonormal de autovectores del tensor  $\mathbf{d}$ . Con esta representación espectral, el campo de velocidades  $\mathbf{v}^S$  puede ser descompuesto como una suma de tres velocidades linealmente independientes de la forma:

$$d_i(\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

tal que las componentes de  $\mathbf{v}^S$  relativas a la base  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$  son dadas por:

$$v_i^s = d_i(x_i - y_i)$$

con  $x_i$  e  $y_i$  representando las coordenadas de puntos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  en un sistema cartesiano asociado a  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ . Como puede verse en el esquema de la figura A.8 cada  $v_i^s$  corresponde a una velocidad que solo "estira" el cuerpo en la dirección de  $\mathbf{n}_i$ . El tensor tasa de deformación corresponde a un estiramiento del cuerpo.

Si se considera un movimiento general, en el cual  $\mathbf{l}$  no es necesariamente constante, la descomposición del campo de velocidad en la suma de una velocidad rígida y una velocidad de deformación, sigue siendo válida en el sentido *local*.

### A.2.7 Deformaciones infinitesimales

Pequeñas deformaciones o deformaciones infinitesimales son deformaciones con un gradiente de desplazamientos  $\nabla_X \mathbf{u}$  suficientemente pequeño, con lo cual su descripción cinemática puede ser simplificada.

Recordando la definición de los tensores de Cauchy-Green de la ecuación (A.24) y reemplazando en ésta el valor de  $\mathbf{F}$  por la ecuación (A.16), en términos de gradiente de desplazamiento, se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u} + (\nabla_X \mathbf{u})^T + (\nabla_X \mathbf{u})^T \nabla_X \mathbf{u} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u} + (\nabla_X \mathbf{u})^T + \nabla_X \mathbf{u} (\nabla_X \mathbf{u})^T\end{aligned}$$

Si el gradiente de desplazamientos es suficientemente pequeño, los términos de segundo orden en  $\nabla_X \mathbf{u}$  pueden despreciarse y de esta manera puede hacerse la siguiente aproximación:

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{b} \approx \mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u} + (\nabla_X \mathbf{u})^T \quad (\text{A.39})$$

De esta expresión y de las definiciones de los tensores de deformación de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  y su equivalente euleriano  $\mathbf{e}$ , para el mismo orden de aproximación,

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{e} \approx \frac{1}{2} [\nabla_X \mathbf{u} + (\nabla_X \mathbf{u})^T]$$

lo que define el *tensor de deformación infinitesimal*  $\boldsymbol{\epsilon}$ :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla_X \mathbf{u} + (\nabla_X \mathbf{u})^T] \quad (\text{A.40})$$

Este tensor es *lineal* en  $\mathbf{u}$ , lo cual simplifica en gran medida la descripción cinemática en pequeñas deformaciones. Esta aproximación, con un error de segundo orden en  $\nabla_X \mathbf{u}$ , puede hacerse para *todo* tensor lagrangeano o euleriano definido por las ecuaciones (A.31) y (A.34) en el ámbito de pequeñas deformaciones,

$$\mathbf{e}^{(m)} \approx \mathbf{E}^{(m)} \approx \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{A.41})$$

### A.2.8 Invariantes de los tensores de deformación.

Dado un tensor  $\mathbf{Z}$  simétrico y de segundo orden, definido mediante sus componentes covariantes  $Z_{ij}$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}$$

se pueden calcular sus valores propios  $\lambda_i$  anulando el determinante

$$|Z_{IJ} - \lambda \delta_{IJ}| = \begin{vmatrix} Z_{11} - \lambda & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} - \lambda & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

este determinante, conocido como ecuación característica, expandido en función de los valores propios resulta

$$-\lambda^3 + I_Z \lambda^2 - II_Z \lambda + III_Z = 0$$

donde se identifican los invariantes

$$\begin{aligned}
I_Z &= \text{tr}(Z) = Z_{11} + Z_{22} + Z_{33} \\
II_Z &= \text{tr}(\text{adj}(Z)) = Z_{22}Z_{33} + Z_{33}Z_{11} + Z_{11}Z_{22} - Z_{23}^2 - Z_{31}^2 - Z_{12}^2 \\
III_Z &= \det(Z) = Z_{11}Z_{22}Z_{33} + 2Z_{12}Z_{23}Z_{31} - Z_{11}Z_{23}^2 - Z_{22}Z_{31}^2 - Z_{33}Z_{12}^2
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Estos invariantes también pueden expresarse en función de los valores propios  $\lambda_i$

$$\begin{aligned}
I_Z &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\
II_Z &= \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 \\
III_Z &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3
\end{aligned} \tag{A.43}$$

Estas expresiones de los invariantes de un tensor de deformaciones son utilizadas en la formulación de modelos constitutivos en el Capítulo 3.

## A.3 FUERZAS Y MEDIDAS DE TENSIÓN

En la sección anterior se ha hecho una descripción matemática de la cinemática de la deformación de un cuerpo sin hacer referencia a *fuerzas* y como éstas son transferidas entre cuerpos continuos. Estas fuerzas, asociadas con la descripción mecánica de un cuerpo, pueden ser clasificadas en tres categorías:

Fuerzas de contorno, aplicadas en el contorno de un cuerpo, tales como las fuerzas resultantes del contacto con otro cuerpo.

Fuerzas de masa, en el interior del cuerpo. Gravedad y fuerzas magnéticas son ejemplos de este tipo de fuerza.

Fuerzas producto de interacciones internas entre partes adyacentes de un cuerpo y transmitidas a través de la superficie que separa estas partes.

Las fuerzas producidas por la interacción interna entre una parte del cuerpo y otra adyacente al igual que las fuerzas de contorno son transmitidas a través de una superficie, por lo que pueden ser agrupadas como fuerzas de superficie, y para su descripción matemática son necesarios los conceptos de tensión.

### A.3.1 El vector de tensiones de Cauchy. El axioma de Cauchy

El axioma de Cauchy, crucial en la descripción de fuerzas de superficie, se expresa para una configuración deformada de un cuerpo  $\beta$ , tal como la indicada en la figura A.9, de la siguiente forma: Siendo  $\mathcal{S}$  una superficie orientada de  $\mathcal{B}$  con vector normal  $\mathbf{n}$  en el punto  $\mathbf{x}$ ; en este punto, la fuerza de superficie ejercida por la parte del cuerpo a un lado de  $\mathcal{S}$  sobre la parte del cuerpo al otro lado de  $\mathcal{S}$ ,

a través de esta superficie  $\mathcal{S}$ , depende de  $\mathcal{S}$  solo a través de su normal  $\mathbf{n}$ . Esto implica que idénticas fuerzas son transmitidas a través de cualquier superficie con normal  $\mathbf{n}$  en  $\mathbf{x}$ , como las superficies  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{T}$  en la figura A.9. Esta fuerza (por unidad de superficie) es denominada vector de tensiones de Cauchy  $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ . Si  $\mathcal{S}$  pertenece al contorno de  $\mathcal{B}$  entonces el vector de tensiones de Cauchy representa la fuerza de contacto ejercida por el exterior sobre  $\mathcal{B}$ .

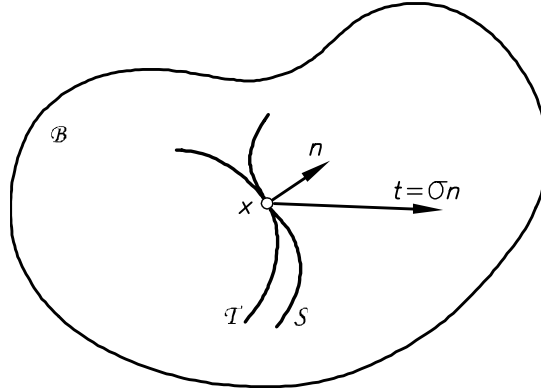


Figura A.9 Vector de tensiones de Cauchy.

### A.3.2 El axioma de balance de momento

Sea  $\mathcal{B}$  un cuerpo sujeto a un sistema de fuerzas de superficie  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  y fuerzas de masa  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ . El campo espacial  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  representa fuerzas por unidad de masa actuando en el interior de  $\mathcal{B}$ . El *axioma de balance de momento* se expresa: “Para toda parte  $\mathcal{P}$  de la configuración deformada de  $\mathcal{B}$ , con contorno  $\mathcal{S}$ , el *balance de momento lineal*:

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{t}(\mathbf{n}) da + \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{b} dv = \int_{\mathcal{P}} \rho \dot{\mathbf{v}} dv \quad (\text{A.44})$$

y el *balance de momento angular*:

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{n}) da + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} dv = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{v}} dv \quad (\text{A.45})$$

son satisfechos, siendo  $\rho = \rho(\mathbf{x})$  el campo de densidad de masa, masa por unidad de volumen en la configuración deformada de  $\mathcal{B}$ . El lado derecho de las ecuaciones (A.44) y (A.45) contiene los términos de inercia, siendo  $\dot{\mathbf{v}}$  el campo de aceleraciones de  $\mathcal{B}$ .

### A.3.3 El tensor de tensiones de Cauchy

Como consecuencia del axioma de balance de momento, la dependencia de la fuerza de superficie  $\mathbf{t}$  de la normal  $\mathbf{n}$  es *lineal*. Esto implica que existe un campo tensorial  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  tal que el vector de tensiones de Cauchy es dado por

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n} \tag{A.46}$$

El tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  es *simétrico* y se denomina *tensor de tensiones de Cauchy*, frecuentemente llamado de tensiones verdaderas.

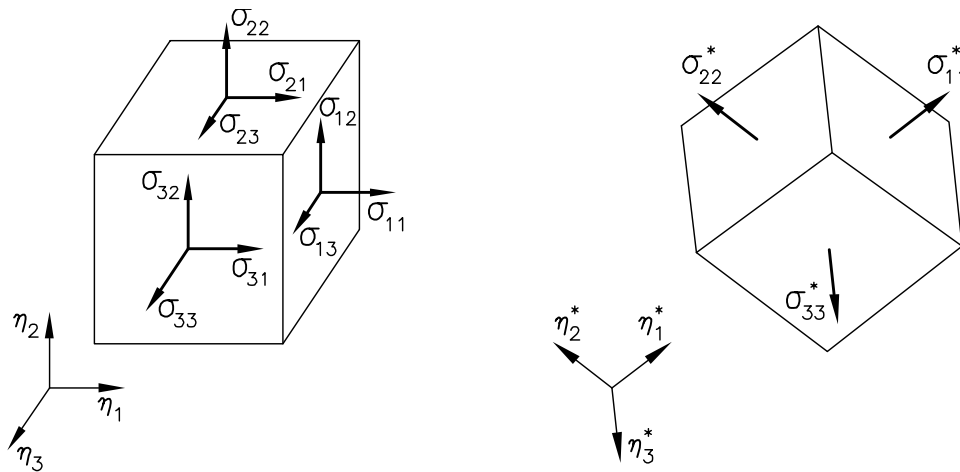
#### Componentes del tensor de tensiones de Cauchy

Utilizando una base ortonormal  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ , el tensor de tensiones de Cauchy se representa como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j$$

La componente  $\sigma_{ij}$  viene dada por:

$$\sigma_{ij} = (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{n}_j$$



**Figura A.10** Componentes del tensor de tensiones de Cauchy y tensiones principales de Cauchy.

De la ecuación (A.46) el vector  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_i$  es la fuerza por unidad de superficie ejercida a través de una superficie con vector normal  $\mathbf{n}_i$ . La componente  $\sigma_{ij}$  es la norma de la proyección de  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_i$  en la dirección de  $\mathbf{n}_j$ . La representación esquemática de tales proyecciones se presenta en la figura A.10. Las componentes  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  y  $\sigma_{33}$  representan tracciones *normales* a las caras del cubo infinitesimal, mientras que las componentes  $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$  y  $\sigma_{32}$  están asociadas con fuerzas de cortante actuando paralelas a las caras.

### Tensiones principales de Cauchy

Debido a su simetría, el tensor de tensiones de Cauchy admite la descomposición espectral:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}^* \mathbf{n}_i^* \otimes \mathbf{n}_i^*$$

siendo  $\{\mathbf{n}_1^*, \mathbf{n}_2^*, \mathbf{n}_3^*\}$  una base ortonormal en la cual todas las componentes de cortante del tensor de tensiones de Cauchy son nulas y solo las componentes normales pueden ser no nulas. Las componentes normales  $\sigma_{ii}^*$  son los autovalores de  $\boldsymbol{\sigma}$  y se denominan *tensiones principales de Cauchy* y las direcciones definidas por la base  $\{\mathbf{n}_1^*, \mathbf{n}_2^*, \mathbf{n}_3^*\}$  son denominadas *direcciones de las tensiones principales*. En la figura A.10 se muestra la representación esquemática de las fuerzas actuando en las caras del cubo infinitesimal según las direcciones de las tensiones principales; las fuerzas son normales a las caras del cubo.

#### A.3.4 El primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff

El vector de tracciones  $\mathbf{t}$  en la ecuación (A.46) mide la fuerza ejercida a través de una superficie material por unidad de superficie *deformada*. Por otra parte,  $\bar{\mathbf{t}}$  mide la fuerza que actúa en cualquier superficie cuya normal es  $\mathbf{n}$  en la configuración deformada, por unidad de superficie de *referencia*. Siendo  $da$  un área infinitesimal de una superficie normal a  $\mathbf{n}$  en la configuración deformada y  $da_o$  su equivalente en la posición no deformada, tal como se indica en la figura A.11,  $\bar{\mathbf{t}}$  se expresa como:

$$\bar{\mathbf{t}} = \frac{da}{da_o} \mathbf{t} = \frac{da}{da_o} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (\text{A.47})$$

Considérese la superficie  $\mathcal{S}$  del cuerpo  $\mathcal{B}$  en la configuración de referencia de la figura A.11,  $d\mathbf{X}_1$  y  $d\mathbf{X}_2$  son vectores infinitesimales tangentes a  $\mathcal{S}$  en el punto material  $\mathbf{X}$  y  $da_o$  es la superficie generada por  $d\mathbf{X}_1$  y  $d\mathbf{X}_2$ . Llamando  $\mathbf{m}$  a la normal a  $\mathcal{S}$  en  $\mathbf{X}$ , se tiene:

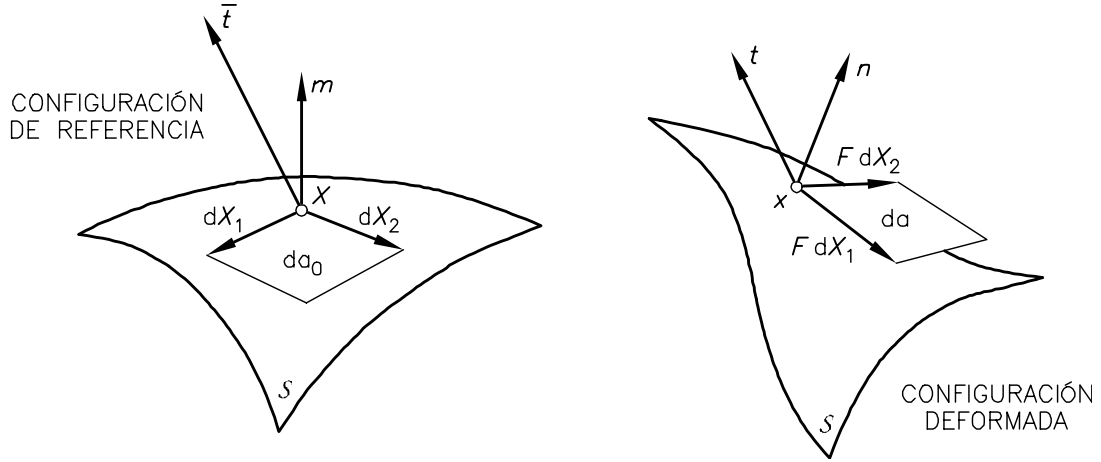
$$\mathbf{m} da_o = d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2$$

Sometido a deformación, los vectores tangentes  $d\mathbf{X}_1$  y  $d\mathbf{X}_2$  son mapeados en  $\mathbf{F}d\mathbf{X}_1$  y  $\mathbf{F}d\mathbf{X}_2$  tal que la normal a la configuración deformada de  $\mathcal{S}$  es:

$$\mathbf{n} da = \mathbf{F}d\mathbf{X}_1 \times \mathbf{F}d\mathbf{X}_2$$

donde  $da$  es la correspondiente superficie deformada. Pre-multiplicando ambos lados de esta expresión por  $\mathbf{F}^T$  y utilizando la identidad:

$$\mathbf{S} \mathbf{u} \times \mathbf{S} \mathbf{v} = \det [\mathbf{S}] \mathbf{S}^{-T} (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$



**Figura A.11** El primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff.

válida para todo tensor invertible  $\mathbf{S}$  y vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ , se obtiene:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{n} da = J d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2 = J \mathbf{m} da_0$$

donde  $J = \det[\mathbf{F}]$ . Esto es equivalente a

$$\frac{da}{da_0} \mathbf{n} = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{m}$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en la ecuación (A.47),  $\bar{\mathbf{t}}$  puede ser escrita en términos de  $\mathbf{m}$  como:

$$\bar{\mathbf{t}} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{m} = \mathbf{P} \mathbf{m} \quad ; \quad \mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{A.48})$$

El tensor  $\mathbf{P}$  se denomina *primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff* y es usualmente llamado como *tensión nominal*. El vector  $\bar{\mathbf{t}}$  se obtiene aplicando el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff al vector unitario  $\mathbf{m}$ , normal a la configuración de referencia de  $S$  en el punto de interés. En contraste con el tensor de tensiones de Cauchy,  $\mathbf{P}$  es en general asimétrico.

### A.3.5 Tensiones de Kirchhoff

Otra medida de tensiones frecuentemente utilizada es el tensor de tensiones de Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}$ , definido por:

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.49})$$

Debido a la simetría de  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones de Kirchhoff es simétrico y por lo tanto admite la representación espectral:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^3 \tau_{ii}^* \mathbf{n}_i^* \otimes \mathbf{n}_i^*$$

donde las *tensiones principales de Kirchhoff*  $\tau_{ii}^*$  son relacionadas con las tensiones principales de Cauchy  $\sigma_{ii}^*$  por la expresión:

$$\tau_{ii}^* = J \sigma_{ii}^*$$

### A.3.6 Trabajo conjugado y otras medidas de tensión

El trabajo de tensiones por unidad de volumen de la configuración de referencia es dado por

$$w = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} \tag{A.50}$$

Una medida de tensiones  $\hat{\mathbf{T}}$  es *trabajo conjugado* de una medida de deformaciones dada  $\hat{\mathbf{E}}$ , si satisface la igualdad:

$$\hat{\mathbf{T}} : \dot{\hat{\mathbf{E}}} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} \tag{A.51}$$

para cualquier movimiento. El concepto de trabajo conjugado permite la definición de pares conjugados  $\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{E}}$  especialmente útil en problemas relacionados con cinemática y modelos constitutivos. De especial interés son las tensiones objetivas conjugadas de la familia de medidas de deformación dadas por la ecuación (A.31):

$$\hat{\mathbf{T}}^{(m)} : \dot{\hat{\mathbf{E}}}^{(m)} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} \tag{A.52}$$

El par conjugado que se obtiene para  $m = 2$  son los denominados tensor de deformaciones de Green-Lagrange  $\mathbf{E}^{(2)}$  y *segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff*  $\mathbf{T}^{(2)}$ , usualmente citados en la literatura como  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{S}$ , respectivamente.

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T} \tag{A.53}$$

## A.4 OPERACIONES DE TRANSPORTE DE TENSORES. “Push-forward” $\phi_*$ y “Pull-back” $\phi^*$ .

Dado un campo tensorial  $\mathbf{T}$  contravariante de orden  $r$  y covariante de orden  $s$ , en la configuración de referencia, este puede *transportarse* a la configuración deformada mediante el operador *push-forward*  $\phi_*$



$$\mathbf{t} = \phi_* \mathbf{T} = \mathbf{F}_{i_1}^{a_1} \dots \mathbf{F}_{i_r}^{a_r} [T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}] (\mathbf{F}^{-1})_{b_1}^{j_1} \dots (\mathbf{F}^{-1})_{b_s}^{j_s} \quad (\text{A.54})$$

Y a la inversa, dado el campo tensorial  $\mathbf{t}$  en la configuración deformada, este puede transportarse a la configuración de referencia mediante el operador *pull-back*  $\phi^*$

$$\mathbf{T} = \phi^* \mathbf{t} = (\mathbf{F}^{-1})_{a_1}^{i_1} \dots (\mathbf{F}^{-1})_{a_r}^{i_r} [t_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}] \mathbf{F}_{j_1}^{b_1} \dots \mathbf{F}_{j_s}^{b_s} \quad (\text{A.55})$$

Conocido el tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F}$ , el *push-forward*  $\phi_*$  de un tensor en la configuración de referencia  $\Omega^0$  indicado mediante  $\mathbf{Z}$ , es un tensor espacial o euleriano  $\mathbf{z}$  en la configuración deformada  $\Omega^t$ ,

$$\mathbf{z} = \phi_* \mathbf{Z} \quad (\text{A.56})$$

que se escribe para un tensor contravariante  $\mathbf{Z}^\sharp$ :

$$z^{ij} = F_I^i F_J^j Z^{IJ} \quad (\text{A.57})$$

$$\mathbf{z}^\sharp = \mathbf{F} \cdot \mathbf{Z}^\sharp \cdot \mathbf{F}^T \quad (\text{A.58})$$

y se expresa para un tensor  $\mathbf{Z}$  expresado en componentes covariantes como:

$$z_{ij} = (F_I^i)^{-1} (F_J^j)^{-1} Z_{IJ} \quad (\text{A.59})$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{A.60})$$

La operación inversa denominada *pull-back*  $\phi^*$  transforma un tensor espacial  $\mathbf{z}$ , en la configuración deformada  $\Omega^t$ , en otro tensor  $\mathbf{Z}$  en la configuración original  $\Omega^0$ .

$$\mathbf{Z} = \phi^* \mathbf{z} \quad (\text{A.61})$$

que se define para un tensor  $\mathbf{z}^\sharp$  expresado en sus componentes contravariantes según:

$$Z^{IJ} = (F_I^i)^{-1} (F_J^j)^{-1} z^{ij} \quad (\text{A.62})$$

$$\mathbf{Z}^\sharp = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{z}^\sharp \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{A.63})$$

y se expresa para un tensor  $\mathbf{z}$  expresado en componentes covariantes como:

$$Z_{ij} = F_I^i F_J^j z_{ij} \quad (\text{A.64})$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{F} \quad (\text{A.65})$$

Utilizando los operadores *push-forward*  $\phi_*$  y *pull-back*  $\phi^*$ , se establecen las siguientes relaciones entre los tensores de deformación:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \phi_* \mathbf{E} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \\ \mathbf{E} &= \phi^* \mathbf{e} = \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F} \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

y de tensión:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \phi^* \boldsymbol{\tau} = J \phi^* \boldsymbol{\sigma} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \\ J \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\tau} = \phi_* \mathbf{S} = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

# BIBLIOGRAFÍA

- Ali, H. M. & Abdel-Ghaffar, A. M. (1995), ‘Modeling of rubber and lead passive-control bearings for seismic analysis’, *Journal of Structural Engineering* **121**(7), 1134–1144.
- Allred, B., Billings, L. & Shepherd, R. (1996), ‘Ultimate response characteristic of base isolated structures’, *Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering* (Paper 1348).
- Anand, L. (1996), ‘A constitutive model for compressible elastomeric solids’, *Computational Mechanics* **18**, 339–355.
- Arruda, E. M. & Boyce, M. C. (1993), ‘A three-dimensional constitutive model for the large stretch behaviour of rubber elastic materials’, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **41**(2), 389–412.
- Barbat, A. & Bozzo, L. (1997), ‘Seismic analysis of base isolated buildings’, *Archives of Computational Methods in Engineering* **4**(2), 153–192.
- Barbat, A., Hanganu, A., Oñate, E. & Oller, S. (1994), ‘Evaluation of the damage degree in buildings structures subjected to earthquakes’, *Revue Roumaine des Sciences Techniques - Méc. Appl.* **39**(1), 23–36.
- Barbat, A. & Miquel-Canet, J. (1994), *Estructuras Sometidas a Acciones Sísmicas*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, Barcelona.

- Barbat, A., Molinares, N. & Codina, R. (1996), 'Effectiveness of block iterative schemes in computing the seismic response of buildings with nonlinear base isolation', *Computers and structures* **58**(1), 133–141.
- Barbat, A., Oller, S., Oñate, E. & Hanganu, A. (1992), 'Simulation of damage phenomena in reinforced concrete buildings subjected to seismic actions'. Proceedings of ICNMEAS, Concepción, Chile.
- Barbat, A., Oller, S., Oñate, E. & Hanganu, A. (1997), 'Viscous damage model for Timoshenko beam structures', *International Journal of Solids and Structures* **34**(30), 3953–3976.
- Bathe, K. J. (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- Bergstrom, J. S. & Boyce, M. C. (1998), 'Constitutive modelling of the large strain time-dependent behavior of elastomers', *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **46**(5), 931–954.
- Blatz, P. J. & Ko, W. L. (1962), 'Application of finite elasticity to the deformation of rubbery materials', *Transactions of the Society of Rheology* **6**, 223–251.
- Bozzo, L. & Mahin, S. (1990), 'Design of frictional base isolation systems', *4<sup>th</sup> US National Conference on Earthquake Engineering* (Palm Springs, California).
- Brockman, R. A. (1986), 'On the use of the Blatz-Ko constitutive model in non-linear finite element analysis', *Computers and Structures* **24**, 607–611.
- Buckle, I. G. (1993), 'Future directions in seismic isolation. Passive energy dissipation and active control', *Proceedings, ATC171 Seminar on Seismic Isolation, Passive Energy Dissipation and Active Control* **1**, 307–318.
- Buckle, I. G. (1995), 'Applications of base isolation system to the seismic retrofit of historical building in the united states', *J. M. Kelly, Earthquake Engineering Research Center, Final Report on the International Workshop on the Use of Rubber-Based Bearing for the Earthquake Protection of Buildings*, College of Engineering, University of California (UCB/EERC-95/05), C5–C18.
- Buckle, I. G. & Mayes, R. L. (1990), 'Seismic isolation: History, applications and performance. A world view', *Earthquake Spectra* **6**(2), 161–202.
- Castellani, A., Kajon, G., Panzeri, P. & Pezzoli, P. (1998), 'Elastomeric materials used for vibration isolation of railway lines', *Journal of Engineering Mechanics* **124**(6), 614–621.

- Christensen, R. M. (1980), 'A nonlinear theory of viscoelasticity for application to elastomers', *Journal of Applied Mechanics* **47**, 762–768.
- Codina, R. (1992), A Finite Element Model for Incompressible Flow Problems, PhD thesis, Universidad Politécnic de Cataluña, Barcelona.
- de Souza-Neto, E. A., Peric, D. & Owen, D. R. J. (1997), 'Continuum modelling and numerical simulation of material damage at finite strains', *To appear in: Archives of Computational Methods in Engineering*.
- Deb, S. K., Paul, D. K. & Thakkar, S. K. (1997), 'Simplified non-linear dynamic analysis of base isolated buildings subjected to general plane motion', *Engineering Computations* **14**(5), 542–557.
- Delfosse, G. C. (1982), *Wood Framed Individual Houses on Seismic Isolators*, Proceeding of the International Conference on Natural Rubber for Earthquake Protection of Building and Vibration Isolation, Kuala Lumpur, Malaysia, pp. 104–111.
- Derham, C. J. & Plunkett, P. (1976), 'Fire resistance of steel-laminated rubber bearings', *Natural Rubber Technology* **7**(2).
- Eberlein, R., Wriggers, P. & Taylor, R. (1993), 'A fully non-linear axi-symmetrical quasi-Kirchhoff-type shell element for rubber-like materials', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **36**(23), 4027–4043.
- Eterovic, A. L. & Bathe, K. J. (1990), 'A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **30**, 1099–1114.
- Fan, F. G., Ahmadi, G., Mostaghel, N. & Tadjabakhsh, I. G. (1991), 'Performance analysis of aseismic base isolation systems for a multistorey buildings', *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* **10**, 152–171.
- Ferraioli, M. & Malangone, P. (1998), 'Nonlinear modeling for dynamic analysis of base-isolated structures', *Proceedings of the 11th European Conference on Earthquake Engineering*.
- Franta, I. (1989), *Elastomers and Rubber Compounding Materials. Manufacture, Properties and Applications*, Studies in Polymer Science, 1, Elsevier, Czechoslovakia.
- Fuller, K. N. G., Gough, J., Pound, T. J. & Ahmadi, H. R. (1997), 'High damping natural rubber seismic isolators', *Journal of Structural Control* **4**(2), 19–40.

- Gadala, M. S. (1991), 'Unified numerical treatment of hyperelastic and rubber-like constitutive laws', *Communications in Applied Numerical Methods* (7), 581–587.
- Gadala, M. S. (1992), 'Alternative methods for the solution of hyperelastic problems with incompressibility', *Computers and Structures* **42**(1), 1–10.
- Garcia-Garino, C. (1993), Un modelo numérico para el análisis de sólidos elasto-plásticos sometidos a grandes deformaciones, PhD thesis, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona, Universidad Politécnica de Cataluña.
- Garevski, M. (1995), *Earthquake Hazard Reduction in Historical Building Using Seismic Isolation*, Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California at Berkeley.
- Garevski, M., Kelly, J. M. & Bojadziev, M. (1998), 'Experimental dynamic tests on the first structure in the world isolated with rubber bearings', *Proceedings of the 11th European Conference on Earthquake Engineering* .
- Govindjee, S. & Simo, J. C. (1992a), 'Mullins' effect and the strain amplitude dependence of the storage modulus', *International Journal of Solids and Structures* **29**(14/15), 1737–1751.
- Govindjee, S. & Simo, J. C. (1992b), 'Transition from micro-mechanics to computationally efficient phenomenology: Carbon black filled rubbers incorporating Mullins' effect', *J. Mech. Phys. Solids* **40**(1), 213–233.
- Green, A. & Naghdi, P. (1965), 'A dynamical theory of interacting continua', *International Journal Engineering Computation Sciences* **3**, 231.
- Green, M. S. & Tobolsky, A. V. (1946), 'A new approach to the theory of relaxing polymeric media', *J. Chem. Phys.* **14**(2), 80–92.
- Guerrero, L. & Azevedo, J. (1996), 'Impact problems on base-isolated structures', *Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering* (Paper 1339).
- Gurtin, M. E. (1981), *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press.
- Hanganu, A., Barbat, A., Oller, S. & Oñate, E. (1994), *Simulación del daño sísmico en edificios de hormigón armado*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, Barcelona, España.

- Hanganu, D. A. (1997), Análisis no lineal estático y dinámico de estructuras de hormigón armado mediante modelos de daño, PhD thesis, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona, Universidad Politécnica de Cataluña.
- Hart-Smith, L. J. (1966), 'Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials', *ZAMP* **17**, 608–625.
- Hausler, K. & Sayir, M. B. (1995), 'Nonlinear viscoelastic response of carbon black reinforced rubber derived from moderately large deformations in torsion', *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **43**(2), 295–318.
- Herrmann, L. R., Hamidi, R., Shafiqh-Nobari, F. & Lim, C. K. (1988), 'Nonlinear behavior of elastomeric bearings. I: Theory', *Journal of Engineering Mechanics* **114**(11), 1811–1830.
- Herrmann, L. R., Hamidi, R., Shafiqh-Nobari, F. & Ramaswamy, A. (1988), 'Nonlinear behavior of elastomeric bearings. II: FE analysis and verification', *Journal of Engineering Mechanics* **114**(11), 1831–1853.
- Hill, J. M. & Lee, A. I. (1989), 'Combined compression and torsion of circular cylindrical pads of rubber', *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **37**(2), 175–190.
- Holzapfel, G. A. (1996), 'On large strain viscoelasticity: Continuum formulation and finite element applications to elastomeric structures', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **39**(22), 3903–3926.
- Hughes, T. J. R. (1984), 'Numerical implementation of constitutive models: Rate independent deviatoric plasticity', in: *Theoretical Foundations for Large Scale Computations of Nonlinear Material Behaviour*, S. Nemat-Naser, R. Asaro and G. Hegemier, eds. (Martinus Nijhoff, The Netherlands).
- Hughes, T. J. R., Taylor, R. & Kanoknukulchai, S. (1977), 'A simple and efficient finite element for bending', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **11**, 1529–1543.
- Hwang, J. S. & Ku, S. W. (1997), 'Analytical modeling of high damping rubber bearings', *Journal of Structural Engineering* **123**(8), 1029–1036.
- Jané, L. & Barbat, A. (1992), *Estructuras de edificación con aislamiento antisísmico*, Monografía 13, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, Barcelona.

- Johnson, A. R., Quigley, C. J. & Freese, C. E. (1995), 'A viscohyperelastic finite element model for rubber', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **127**, 163–180.
- Kachanov, L. (1958), 'Time of rupture process under creep conditions', *Otd. Tech. Nauk.* **8**, 26–31.
- Kaliske, M., Gebbeken, N. & Rothert, H. (1997), 'A generalized approach to inelastic behaviour at finite strains - Application to polymeric material', *Proceedings of the Fifth International Conference on Computational Plasticity*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, Barcelona pp. 937–944.
- Kaliske, M. & Rothert, H. (1995), 'Internal material friction of rubber modelled by a multiplicative elasto-plastic approach', *Proceedings of the Fourth International Conference on Computational Plasticity*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, Barcelona pp. 945–956.
- Kaliske, M. & Rothert, H. (1997), 'On the finite element implementation of rubber-like materials at finite strains', *Engineering Computations* **14**(2), 216–232.
- Kato, M., Watanabe, Y. & Kato, A. (1997), 'Ageing effect on laminated rubber bearings of Pelham bridge', *Proceedings of 14th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Lyons, Section K .
- Kato, M., Watanabe, Y. & Yoneda, G. (1996), 'Investigation of ageing effects for laminated rubber bearings of Pelham bridge', *Proceedings of 11th World Conference on Earthquake Engineering*, Acapulco .
- Kelly, J. M. (1983), *The Economic Feasibility of Seismic Rehabilitation of Building by Base Isolation*, Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California at Berkeley.
- Kelly, J. M. (1991a), 'Base isolation: Linear theory and design', *Earthquake Spectra* **7**(2), 301–323.
- Kelly, J. M. (1991b), *Dynamic and Failure Characteristics of Bridgestone Isolation Bearings*, Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California at Berkeley.
- Kelly, J. M. (1993), *Earthquake-resistant design with rubber*, Springer-Verlag, London.



- Kelly, J. M. (1995), *Final Report on the International Workshop on the Use of Rubber-Based Bearing for the Earthquake Protection of Buildings*, Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California at Berkeley.
- Kelly, J. M. (1996), *Theory and Practice of Seismic - Isolation Design*, Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California at Berkeley.
- Kilian, H. G. (1981), 'Equation of state of real networks', *Polymer* **22**, 209–217.
- Koh, C. G. & Kelly, J. M. (1989), 'Viscoelastic stability model for elastomeric isolation bearings', *Journal of Structural Engineering* **115**(2), 285–302.
- Le-Tallec, P., Raihier, C. & Kaiss, A. (1993), 'Three-dimensional incompressible viscoelasticity in large strains: Formulation and numerical approximation', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **109**, 233–258.
- Lee, E. H. (1969), 'Elastic-Plastic deformation at finite strains', *Journal of Applied Mechanics* **36**, 1–6.
- Lubliner, J. (1985a), 'A model of rubber viscoelasticity', *Mechanics Research Communications* **12**(2), 93–99.
- Lubliner, J. (1985b), *Thermomechanics of deformable bodies*, Department of Civil Engineering University of California at Berkeley.
- Lubliner, J. (1990), *Plasticity Theory*, Macmillan, New York.
- Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S. & Oñate, E. (1989), 'A plastic damage model for non linear analysis of concrete', *International Journal of Solids and Structures* **25**(3), 299–326.
- Luccioni, B. (1993), *Formulación de un modelo constitutivo para materiales ortótropos*, PhD thesis, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina.
- Luo, N., Rodellar, J. & Sen, M. D. L. (1998), 'Composite robust active control of seismically excited structures with actuator dynamics', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **27**(3), 301–314.
- Malangone, P. & Ferraioli, M. (1998), 'A modal procedure for seismic analysis of non-linear base-isolated multistorey structures', *Earthquake Engineering And Structural Dynamics* **27**(4), 397–412.

- Malhotra, P. K. (1997), 'Dynamics of seismic impacts in base-isolated buildings', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **26**(8), 797–813.
- Malvern, L. E. (1969), *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- Marsden, J. E. & Hughes, T. J. R. (1983), *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- Miehe, C. (1994), 'Aspects of the formulation and finite element implementation of large strain isotropic elasticity', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **37**, 1981–2004.
- Mokha, A. S., Amin, N., Constantinou, M. C. & Zayas, V. (1996), 'Seismic isolation retrofit of large historic building', *Journal of Structural Engineering* **122**(3), 298–308.
- Molinares, N. & Barbat, A. (1994), *Edificios con aislamiento de base no lineal*, Monografías de Ingeniería Sísmica 5, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, Barcelona.
- Mooney, M. (1940), 'A theory of large elastic deformation', *Journal of Applied Physics* **11**, 582–592.
- Moore, J. K. (1982), A nonlinear finite element analysis of elastomeric bearings, PhD thesis, Dept. of Civil Engineering, University of California at Davis.
- Mori, A., Moss, P. J., Carr, A. J. & Cooke, N. (1996), 'The seismic behaviour of elastomeric and lead-rubber bearings', *Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering* (Paper 1692).
- Morman, K. (1986), 'The generalized strain measure with application to non-homogeneous deformations in rubber-like solids', *Journal of Applied Mechanics* **53**, 726–728.
- Nagarajaiah, S., Li, C., Reinhorn, A. & Constantinos, M. (1994), *3D-BASIS-TABS: Version 2.0 Computer Program for Nonlinear Dynamic Analysis of Three Dimensional Base Isolated Structures*, Technical Report NCEER-94-0018, National Center for Earthquake Engineering Research, University at Buffalo.
- Nagarajaiah, S., Reinhorn, A. M. & Constantinou, M. C. (1991), 'Nonlinear dynamic analysis of 3-D-Base-isolated structures', *Journal of Structural Engineering* **117**(7), 2035–2054.

- Nagdi, K. (1993), *Rubber as an Engineering Material: Guideline for Users*, Hanser Publishers, Munich.
- Obraztsov, I. & Vasilev, V. (1982), *Mechanics of Composites*, MIR Publishers, Moscow.
- Ogden, R. W. (1984), *Non-Linear Elastic Deformations*, Ellis Horwood Limited, Chichester, England.
- Oliver, J., Cervera, M., Oller, S. & Lubliner, J. (1990), 'Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete', *SCI-C 1990, Second Int. Conf. on Computer Aided Design of Concrete Structure*, Zell am See, Austria pp. 945–957.
- Oller, S. (1988), Un modelo de daño continuo para materiales friccionales, PhD thesis, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona, Universidad Politécnica de Cataluña.
- Oller, S. (1989), *Nuevos materiales estructurales, cerámicos en ingeniería*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, Barcelona, España.
- Oller, S. (1991), *Modelización Numérica de Materiales Friccionales*, Monografía 3, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, Barcelona.
- Oller, S., Barbat, A., Oñate, E. & Hanganu, A. (1992), 'A damage model for the seismic analysis of building structures', *Proceedings 10th WCCE*, Madrid .
- Oller, S., Botello, S., Miquel, J. & Oñate, E. (1995), 'An anisotropic elasto-plastic model based on an isotropic formulation', *Engineering Computations* **12**, 245–262.
- Oller, S., Luccioni, B. & Barbat, A. (1996), 'Un método de evaluación del daño sísmico en estructuras de hormigón armado', *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* **12**(2), 215–238.
- Oller, S. & Oñate, E. (1996), 'A hygro-thermo-mechanical constitutive model for multiphase composite materials', *International Journal of Solids and Structures* **33**(20-22), 3179–3186.
- Oller, S., Oñate, E., Miquel, J. & Botello, S. (1996), 'A plastic damage constitutive model for composite materials', *International Journal of Solids and Structures* **33**(17), 2501–2518.

- Oller, S., Oñate, E., Oliver, J. & Lubliner, J. (1990), 'Finite element non-linear analysis of concrete structures using a plastic-damage model', *Engineering Fracture Mechanics* **35**(1/2/3), 219–231.
- Oñate, E. (1992), *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, Barcelona.
- Ortiz, M. & Popov, E. (1982), 'Plain concrete as a composite material', *Mechanics of Materials, North Holland* **1**, 139–150.
- Pan, T.-C. & Yang, G. (1996), 'Nonlinear analysis of base-isolated MDOF structures', *Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering* (Paper 1534).
- Peric, D., Owen, D. R. J. & Honnor, M. E. (1992), 'A model for finite strain elasto-plasticity based on logarithmic strains: Computational issues', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **94**, 35–61.
- Rivlin, R. S. (1948), 'Large elastic deformations of isotropic materials. IV Further developments of the general theory', *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A* (241), 379–397.
- Roeder, C. W. & Stanton, J. F. (1983), 'Elastomeric bearings: State-of-the-art', *Journal of Structural Engineering* **109**(12), 2853–2871.
- Roland, C. M. & Warzel, M. L. (1990), 'Orientation effects in rubber double networks', *Rubber Chemistry and Technology* **63**, 285–297.
- Salomón, O. (1995), Estructuras con sistema de aislamiento sísmico. Análisis por elementos finitos, Master's thesis, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona, Universidad Politécnica de Cataluña.
- Salomón, O., Oller, S. & Barbat, A. (1996), 'Un tratamiento de material tipo goma, mediante la condensación de la variable de presión', *Mecánica Computacional, Asociación Argentina de Mecánica Computacional* **XVII**, 361–372.
- Salomón, O., Oller, S. & Barbat, A. (1998), 'Modelling of laminated elastomeric passive-control bearing for seismic analysis', *Fourth World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires, Argentina .
- Salomón, O., Oller, S. & Barbat, A. (1999), 'Finite element analysis of base isolated buildings subjected to earthquake loads', accepted at: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* .

- Sanpaolesi, L. & Angotti, F. (1972), 'Appareils d'appui en caoutchouc pour les constructions', *Construction Metallique* (1), 21–42.
- Sidoroff, F. (1974), 'Un modèle viscoélastique nonlinéaire avec configuration intermédiaire', *Journal de Mécanique* **13**, 679–713.
- Simo, J. C. (1987), 'On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **60**, 153–173.
- Simo, J. C. (1988*a*), 'A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part 1 Continuum formulation', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **66**, 199–219.
- Simo, J. C. (1988*b*), 'A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part 2 Computational aspects', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **68**, 1–31.
- Simo, J. C. (1992), 'Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **99**, 61–112.
- Simo, J. C. (1993), *Topics on the Numerical Analysis and Simulation of Plasticity*, Vol. III of *Handbook of Numerical Analysis*, Elsevier Science Publishers, North Holland.
- Simo, J. C. & Armero, F. (1992), 'Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **33**, 1413–1449.
- Simo, J. C., Armero, F. & Taylor, R. (1993), 'Improved version of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D deformation problems', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **110**, 359–386.
- Simo, J. C. & Taylor, R. (1991), 'Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **85**, 273–310.
- Simo, J. & Ju, J. (1987), 'Strain and stress - based continuum damage models 1. Formulation', *International Journal of Solids and Structures* **23**(7), 821–840.
- Skinner, R. I., Robinson, W. H. & McVerry, G. (1993), *An Introduction to Seismic Isolation*, John Wiley and Sons, Chichester.

- SMiRT11 (1991), *Seismic Isolation and Response Control for Nuclear and Non-Nuclear Structures*, Structural Mechanics in Reactor Technology, SMiRT11, Tokyo.
- Spencer, A. J. M. (1992), *Continuum Mechanics*, Longman, England.
- Su, L., Ahmadi, G. & Tadjbakhsh, I. G. (1989), 'A comparative study of performances of various base isolation systems: Part 1: Shear beam structures', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **18**, 11–32.
- Su, L., Ahmadi, G. & Tadjbakhsh, I. G. (1990), 'A comparative study of performances of various base isolation systems: Part 2: Sensitivity analysis', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **19**, 21–32.
- Sussman, T. & Bathe, K. (1987), 'A finite element formulation for non-linear incompressible elastic and inelastic analysis', *Computers and Structures* **26**(1/2), 357–409.
- Swanson, S. R. (1985), 'A constitutive model for high elongation elastic materials', *Journal of Engineering Materials and Technology, ASME Transactions* **107**, 110–114.
- Tachibana, E. & Li, K. (1996), 'Temperature dependence of high damping rubber in base-isolated structures', *Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering* (Paper 492).
- Tajirian, F. F. (1995), 'Industrial applications of seismic isolation', *J. M. Kelly, Earthquake Engineering Research Center, Final Report on the International Workshop on the Use of Rubber-Based Bearing for the Earthquake Protection of Buildings*, College of Engineering, University of California (UCB/EERC-95/05), C57–C70.
- Treloar, L. R. G. (1975), *The Physics of Rubber Elasticity*, 3rd Edition, Oxford Univ. Press, Oxford, UK.
- Trusdell, C. & Noll, W. (1965), *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik III/3, Springer, Berlin.
- Trusdell, C. & Toupin, R. (1960), *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik III/I, Springer Verlag, Berlin.
- Tsai, H.-C. (1997), 'Dynamic analysis of base-isolated shear beams bumping against stops', *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **26**(5), 515–528.

- Twizell, E. H. & Ogden, R. W. (1983), 'Non-linear optimization of the material constants in ogden's stress-deformation function for incompressible isotropic elastic materials', *Journal of the Australian Mathematical Society Series B*(24), 424–434.
- van den Bogert, P. A. J. & de Borst, R. (1994), 'On the behaviour of rubber-like materials in compression and shear', *Archive of Applied Mechanics* **64**, 136–146.
- Weber, G. & Anand, L. (1990), 'Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic, hiperelastic-viscoplastic solids', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **79**, 173–202.
- White, J. L. (1995), *Rubber Processing. Technology, Materials and Principles*, Hanser Publishers, Munich.
- Yeoh, O. H. (1990), 'Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates', *Rubber Chemistry and Technology* **63**, 792–805.
- Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. (1994), *El Método los Elementos Finitos*, Vol. 1, Mc Graw Hill - Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, Barcelona.