

UNION NO CONFORME DE MALLAS DE ELEMENTOS FINITOS DE TIPO DESPLAZAMIENTO

LUIS QUIROZ*
PIERRE BECKERS**
e
IGNACIO ROMERA***

**Departamento de Ingeniería Mecánica,
Facultad de Ingeniería,
Universidad de Concepción,
Casilla 53-C, Concepción, Chile.*

***Laboratorio de Técnicas Aeronáuticas y Espaciales,
Universidad de Lieja,
21, rue E. Solvay, B4000 Lieja, Bélgica.*

****Departamento de Ingeniería Mecánica,
Universidad del País Vasco,
Alameda de Urquijo s/n, 48013 Bilbao, España.*

RESUMEN

Este trabajo presenta la formulación general del problema de unión de dos regiones discretizadas con elementos finitos de tipo desplazamiento, cuya interfaz no es conforme. La no conformidad puede provenir de una interfaz con nodos no coincidentes y/o elementos de tipo diferentes. De las soluciones propuestas en la literatura a este tipo de problema se estudian dos: una por medio de multiplicadores de Lagrange y otra mediante el método de la función de penalización. Se resaltan las ventajas y desventajas de la utilización de uno y otro método. En el caso de la función de penalización se obtienen valores de referencia del factor de penalización para los ejemplos estudiados.

SUMMARY

This paper describes the general formulation of mesh gluing problems. The meshes composed of displacement finite elements models are allowed to be non conform at the interface. This incompatibility results from non coincident nodes or from different elements types. According to the existing references, two solutions are examined: Lagrange multipliers method and penalty function method. Advantages and drawbacks of both are discussed. For the second one, reference values of penalty factors are deduced in some particular examples.

Recibido: Marzo 1991.

INTRODUCCION

En muchas ocasiones el análisis por elementos finitos confronta al usuario con el problema de efectuar la unión de dos o más regiones en cuyas interfaces los nodos de una y otra región no coinciden. Esto es particularmente cierto en el caso de la utilización de elementos cuadrilaterales, en que muy a menudo se deben utilizar elementos degenerados, los que degradan la solución en las proximidades de dicha interfaz, o bien hacer uso de elementos especiales de transición. La utilización de los generadores automáticos de tipo transfinito para obtener elementos cuadrilaterales relativamente regulares evidencia aún más este problema.

Otro problema de unión de mallas es cuando, luego de un análisis, se decide que se va a cambiar el tipo de elemento utilizado en una región por otro más apropiado al comportamiento local de la solución. Este es el caso del análisis de fisuras, en que, con elementos "normales" se determina la zona de inicio de una grieta y luego se reemplaza esa zona con elementos especiales para el estudio de la progresión de la fisura y la concentración de esfuerzos en su fondo.

A estos problemas "básicos" se agrega la necesidad de conectar diversos tipos de elementos finitos que no comparten el mismo tipo de variables nodales ni son isoparamétricos. Este es el caso de la unión de elementos de placa y cáscara con elementos de volumen, o la unión de elementos axisimétricos desarrollables en serie de Fourier con elementos de volumen y otros.

En general, los problemas de unión no conforme de mallas se pueden clasificar por el tipo de no conformidad en 3 categorías:

- 1.- elementos de igual tipo con nodos no coincidentes (Figura 1.a);
- 2.- elementos de tipo diferente con nodos coincidentes (Figura 1.b);
- 3.- elementos de tipo diferente con nodos no coincidentes (Figura 1.c).

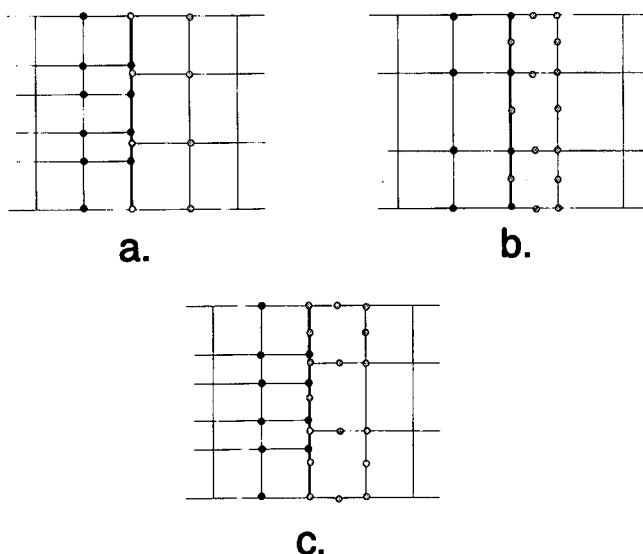


Figura 1. Tipos de no-conformidad en unión de mallas.

FORMULACION DEL PROBLEMA

Sean dos dominios discretizados con elementos finitos de tipo desplazamiento Ω_1 y Ω_2 , cuyos contornos son $\delta\Omega_1$ y $\delta\Omega_2$ los que no incluyen la interfaz Γ^* de unión de dichos dominios. La energía potencial de cada dominio, π_1 y π_2 , puede expresarse como:

$$\pi_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \varepsilon^T \mathbf{H} \varepsilon d\Omega_1 - \int_{\delta\Omega_{1t}} \bar{t}^T u d\delta\Omega_{1t} \quad (1)$$

$$\pi_2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \varepsilon^T \mathbf{H} \varepsilon d\Omega_2 - \int_{\delta\Omega_{2t}} \bar{t}^T u d\delta\Omega_{2t} \quad (2)$$

donde ε es el vector de deformación, $\mathbf{H}$ es la matriz de Hooke, $\bar{t}$ es el vector de tracciones de superficie especificadas en $\delta\Omega_t$ y u es el vector desplazamientos.

En esta formulación, se utiliza un campo de desplazamientos u que debe satisfacer a priori las condiciones de compatibilidad:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= Lu & \text{en } \Omega_1, \Omega_2 \\ u &= \bar{u} & \text{en } \delta\Omega_{1u}, \delta\Omega_{2u} \end{aligned} \quad (3)$$

Con esto los desplazamientos no se imponen directamente en el contorno, sino que su variación queda libre para que las fuerzas generalizadas aparezcan del proceso de minimización.

Dicho campo de desplazamientos no puede ser libre en la interfaz Γ^* , sino que debe ser impuesto como una relación entre los grados de libertad de una y otra región.

Esto puede escribirse como:

$$e_1(u) = e_2(u) \quad \text{en } \Gamma^* \quad (4)$$

Las funciones e_1 y e_2 dependen de la topología de los elementos a ambos lados de la interfaz y del tipo de no-conformidad existente.

La minimización del funcional $\pi = \pi_1 + \pi_2$ sujeto a la restricción de igualdad (4) conduce a la solución del problema planteado.

A continuación se muestra una forma de obtener las funciones de restricción, con ejemplos muy simples, para los tres casos de no-conformidad presentados anteriormente.

CONSTRUCCION DE RESTRICCIONES SEGUN LA NO CONFORMIDAD

Elementos de igual tipo con nodos no coincidentes

Se ilustrará este caso con elementos isoparamétricos bicuadráticos como se muestra en la Figura 2.

Si se toma el elemento I , el desplazamiento en la zona de interfaz será

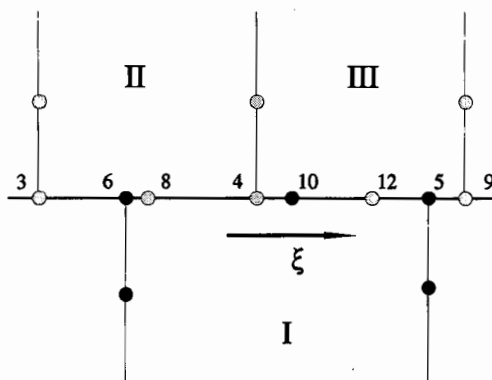


Figura 2. Unión de elementos isoparamétricos cuadráticos.

$$u^I = N_1^I(\xi)u_6 + N_2^I(\xi)u_{10} + N_3^I(\xi)u_5 \quad (5)$$

Las posiciones de los nodos 8, 4 y 12 de los elementos *II* y *III* dentro del elemento *I* están dadas por las respectivas coordenadas locales ξ_8 , ξ_4 y ξ_{12} .

Así, como se trata de elementos isoparamétricos, los desplazamientos de dichos nodos estarán restringidos por:

$$\begin{aligned} u_8 &= N_1^I(\xi_8)u_6 + N_2^I(\xi_8)u_{10} + N_3^I(\xi_8)u_5 \\ u_4 &= N_1^I(\xi_4)u_6 + N_2^I(\xi_4)u_{10} + N_3^I(\xi_4)u_5 \\ u_{12} &= N_1^I(\xi_{12})u_6 + N_2^I(\xi_{12})u_{10} + N_3^I(\xi_{12})u_5 \end{aligned} \quad (6)$$

Por lo tanto, la restricción de igualdad (4) para el nodo 8 puede escribirse como:

$$e_1^I(u_8) = u_8 \quad \text{y} \quad e_2^I(u_8) = N_1^I(\xi_8)u_6 + N_2^I(\xi_8)u_{10} + N_3^I(\xi_8)u_5$$

o bien

$$N_1^I(\xi_8)u_6 + N_2^I(\xi_8)u_{10} + N_3^I(\xi_8)u_5 - u_8 = 0 \quad (7)$$

Lo mismo puede escribirse para los nodos 4 y 12 que también permanecen en la frontera del elemento *I*. Si se efectúa el mismo análisis para todos los elementos que comparten la interfaz Γ^* , se obtiene el set completo de restricciones de igualdad (4) para el problema. Se observa que el mismo procedimiento es aplicable en elementos de volumen, con la diferencia que la interfaz será una superficie y que será necesario un procedimiento un poco más complejo de interpolación de los parámetros locales para cada elemento que contenga un nodo de la otra región.

Si los elementos adyacentes a la interfaz son sub-paramétricos o super-paramétricos, el tratamiento es el mismo que para los iso-paramétricos. Debe tenerse en cuenta que se trata de establecer relaciones entre las aproximaciones de las variables y no de la geometría de los elementos.

Elementos de tipo diferente con nodos coincidentes

La Figura 3 muestra un ejemplo de unión de elementos isoparamétricos de 8 nodos o cuadráticos con elementos isoparamétricos de 4 nodos o bilineales.

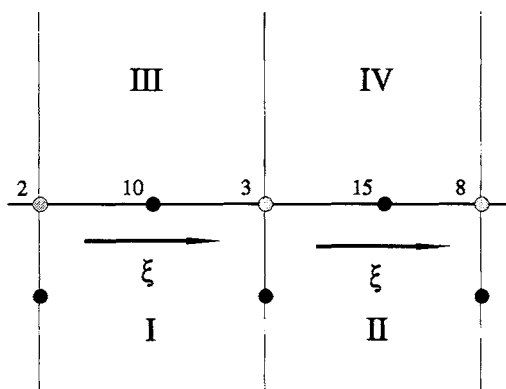


Figura 3. Unión de elementos diferentes con nodos comunes.

Es evidente, en este caso, que la unión de los elementos bilineales en la interfaz está asegurada por la coincidencia de los nodos extremos 2, 3 y 8. En los elementos cuadráticos, por el contrario, los nodos presentes en sus lados, 10 y 15, no tienen establecida su continuidad con los elementos bilineales.

Para imponer dicha continuidad debe ligarse el desplazamiento del mismo punto en los elementos bilineales con el de los nodos mencionados.

Si se toma, por ejemplo, el elemento III que comparte la interfaz con el elemento I, el desplazamiento de un punto perteneciente a la zona de interfaz será:

$$u^{III} = N_1^{III}(\xi)u_2 + N_2^{III}(\xi)u_3 \quad (8)$$

con lo que la restricción de igualdad (4) para el nodo 10 puede escribirse como:

$$N_1^{III}(\xi_{10})u_2 + N_2^{III}(\xi_{10})u_3 - u_{10} = 0 \quad (9)$$

El mismo tipo de expresión puede obtenerse para el nodo 15 del elemento II y que está en la interfaz compartida con el elemento IV.

Elemento de tipo diferente con nodos no coincidentes

Esta categoría es, obviamente, la mezcla de las dos mencionadas anteriormente. En la Figura 4 se presenta un caso simple con elementos bilineales a un lado de la interfaz y con elementos cuadráticos al otro lado.

Al igual que en el ejemplo mostrado en la Figura 2, se analizará primero el elemento isoparamétrico cuadrático I, el cual contiene en el lado perteneciente a la interfaz, el nodo 4 de los elementos bilineales II y III. Se obtiene la misma expresión (7):

$$N_1^I(\xi_4)u_6 + N_2^I(\xi_4)u_{10} + N_3^I(\xi_4)u_5 - u_4 = 0 \quad (10)$$

En el lado de la interfaz del elemento *III* se encuentran los nodos 10 y 5 pertenecientes al elemento cuadrático *I*. Para dichos nodos la restricción de igualdad queda:

$$\begin{aligned} N_1^{III}(\xi_{10})u_4 + N_2^{III}(\xi_{10})u_9 - u_{10} &= 0 \\ N_1^{III}(\xi_5)u_4 + N_2^{III}(\xi_5)u_9 - u_5 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

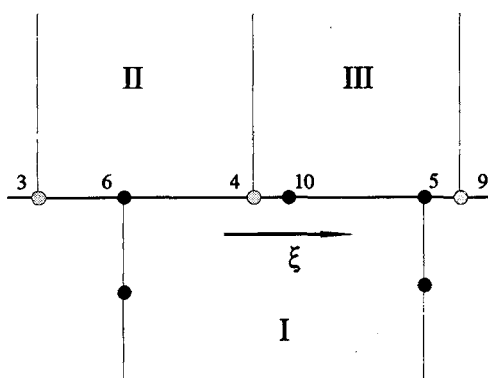


Figura 4. Unión de elementos cuadráticos con elementos bilineales y nodos no coincidentes.

Al igual que en los dos casos anteriores, la consideración de todos los elementos que tocan la interfaz lleva a establecer las relaciones de igualdad para todos los nodos no coincidentes.

Se han elegido expresamente estos ejemplos simples para mostrar el procedimiento que se utilizará en adelante. Las restricciones obtenidas involucran las variables discretizadas y no la geometría de la interfaz. Esto quiere decir que, en los modelos desplazamiento, son los desplazamientos las variables restringidas y que los nodos no necesariamente tocan los lados de los elementos del otro lado de la interfaz.

SOLUCION DEL PROBLEMA

Como fue mencionado en la formulación, la solución se obtiene mediante la minimización, o estacionalidad, del funcional formado por (1) y (2):

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T \mathbf{H} \varepsilon d\Omega - \int_{\delta\Omega_t} \bar{t}^T u d\delta\Omega_t \quad (12)$$

donde

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \quad \text{y} \quad \delta\Omega_t = \delta\Omega_{1t} + \delta\Omega_{2t}$$

sujeto en la interfaz entre Ω_1 y Ω_2 , Γ^* , a la restricción

$$e_1(u) - e_2(u) = 0 \quad (13)$$

Este problema es similar a aquellos de optimización restringida, con la diferencia fundamental de que aquí se trata de restricciones de igualdad y en la optimización aparecen además o sólo restricciones de desigualdad.

Existen varias estrategias para resolver el tipo de problema formulado. Para encontrar el valor estacionario de un funcional como, por ejemplo, la energía, sujeto a ciertas condiciones de restricción, se puede:

- buscar el valor estacionario solamente en el set restringido de funciones admisibles que realmente satisfacen la restricción, lo que se conoce en la literatura como el método de eliminación directa⁵;
- modificar el funcional variacional usando el método clásico de los multiplicadores de Lagrange para introducir las restricciones. Estos multiplicadores se agregan como incógnitas adicionales que se conocen de la condición de estacionalidad y la solución se busca entre todas las funciones admisibles^{5,8}.
- modificar el funcional variacional agregando un funcional de penalización. Como en el caso anterior, el valor estacionario se busca entre todas las funciones admisibles. El efecto del término de penalización es que fuerza la solución del problema penalizado a permanecer en el set de restricciones a medida que el factor de penalización aumenta al infinito^{1,3,4,6,7}.

La implementación de cada uno de estos métodos en un código de elementos finitos presenta las ventajas y desventajas que se explican a continuación tomando como ejemplo el caso elástico lineal. En este caso, el funcional (12) toma la forma cuadrática

$$\pi = \frac{1}{2} u^T \mathbf{K} u - f^T u \quad (14)$$

cuya minimización lleva al sistema algebraico lineal

$$\mathbf{K} u = f \quad (15)$$

y el set de restricciones (13) toma la forma

$$u = \bar{u}_i \quad \text{para } i = n_l + 1, n_l + 2, \dots, n \quad (16)$$

donde $n_l = n - n_r$ es el número de ecuaciones libres o no restringidas. Si se introduce (16) en (15), entonces puede escribirse

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{K}_{lr} \\ \mathbf{K}_{lr}^T & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_l \\ \bar{u}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_l \\ \bar{f}_r \end{Bmatrix} \quad (17)$$

donde los subvectores u_r y u_l representan las componentes restringidas y libres de u , respectivamente. No debe confundirse el subvector $\bar{f}_r$, que corresponde a la prescripción $u_r = \bar{u}_r$, con el subvector f_r , que está asociado a la variable *no restringida* u_r .

Método de la eliminación directa

Este método es el utilizado corrientemente para imponer valores especificados de las variables en los programas de elementos finitos. En general se trata de valores constantes aunque también se utiliza para relaciones entre grados de libertad con coeficientes unitarios.

El sistema lineal (17) puede tratarse por la técnica de la eliminación directa transfiriendo u_r al lado derecho, y resolviendo para u_l a partir de las primeras n_f ecuaciones:

$$u_l = K_u^{-1} f_{lr} \quad (18)$$

donde

$$f_{lr} = f_l - K_{lr} \bar{u}_r \quad (19)$$

asumiendo que K_u no es singular. El subvector $\bar{f}_r$ puede obtenerse de las últimas n_r ecuaciones:

$$\bar{f}_r = k_{lr} u_l + K_{rr} \bar{u}_r \quad (20)$$

La ventaja de este método reside en que la matriz de rigidez K permanece positiva definida y por lo tanto los métodos convencionales de resolución de ecuaciones de elementos finitos pueden usarse. Por otra parte, la transformación, además de consumir una cantidad significativa de memoria y tiempo, generalmente incrementa el ancho de frente o de banda (según el algoritmo de solución utilizado) lo que aumenta los requisitos de capacidad de resolución. La implementación para coeficientes de las restricciones diferentes de la unidad y su aplicación en problemas no lineales requiere una programación muy compleja.

Método de los multiplicadores de Lagrange

Este método se ha utilizado ampliamente en la formulación de elementos finitos de tipo híbrido. La aplicación de esta técnica al funcional (12) restringido por (13) lleva a un funcional de variables u y λ

$$\pi(u, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T \mathbf{H} \varepsilon d\Omega - \int_{\delta\Omega_t} \bar{t}^T u d\delta\Omega_t + \int_{\Gamma^*} \lambda (e_1(u) - e_2(u)) d\Gamma^* \quad (21)$$

con lo que el funcional cuadrático para el caso elástico lineal se transforma en

$$\pi(u, \lambda) = \frac{1}{2} u^T K u - f^T u + \lambda^T (u - \bar{u}) \quad (22)$$

y su minimización para ambas variables produce el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} K_u & K_{lr} & 0 \\ K_{lr}^T & K_{rr} & I \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_l \\ u_r \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_l \\ f_r \\ \bar{u}_r \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Con esta técnica es posible obtener todos los valores requeridos directamente del proceso de solución. Incluso los multiplicadores de Lagrange, que en el caso planteado representan los valores nodales de las tracciones de interfaz. Como el método anterior, éste aumenta el ancho de frente o banda y el tamaño general de las ecuaciones.

Otro problema es que produce una matriz de rigidez expandida en (23) de naturaleza definida no positiva. Los algoritmos comunes de resolución de ecuaciones de elementos finitos, basados en la eliminación de Gauss o en la descomposición de Cholesky, justamente toman ventaja del atributo de positividad definida. Su utilización en un contexto de multiplicadores de Lagrange puede llevar a problemas numéricos, a menos que se plantee una estrategia de pivotes alternativa.

Método de la función de penalización

Este método consiste en aumentar el funcional (12) con un término de penalización

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} (e_1(u) - e_2(u))^T W (e_1(u) - e_2(u)) d\Gamma^* \quad (24)$$

donde la matriz de ponderación W es una matriz diagonal formada por valores grandes que cumplen con

$$u_{\Gamma^*}^T W u_{\Gamma^*} \geq u_{\Gamma^*}^T K_{\Gamma^* \Gamma^*} u_{\Gamma^*} \quad (25)$$

donde $K_{\Gamma^* \Gamma^*}$ es la matriz de rigidez correspondiente a los nodos en la interfaz Γ^* .

De este modo se obtiene el funcional aumentado

$$\begin{aligned} \pi(u) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T H \varepsilon d\Omega - \int_{\delta\Omega_i} \bar{t}^T u d\delta\Omega_i + \\ & \frac{1}{2} \int_{\Gamma^*} (e_1(u) - e_2(u))^T W (e_1(u) - e_2(u)) d\Gamma^* \end{aligned} \quad (26)$$

con lo que el funcional cuadrático del ejemplo elástico se transforma en

$$\pi(u) = \frac{1}{2} u^T K u - f^T u + \frac{1}{2} (u_r - \bar{u}_r)^T W (u_r - \bar{u}_r) \quad (27)$$

cuya estacionalidad produce el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ur} \\ K_{ur}^T & K_{rr} + W \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_l \\ u_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_l \\ f_r + W \bar{u}_r \end{Bmatrix} \quad (28)$$

En la práctica, la matriz de ponderación W se define en función de un parámetro de penalización w y la rigidez de la estructura de tal modo que

$$W = w D_{K_{rr}} \quad (29)$$

donde $D_{K_{rr}}$ son los términos diagonales de K correspondientes a las variables restringidas.

El método de la función de penalización presenta la ventaja de no producir incógnitas adicionales y la matriz de rigidez resultante sigue siendo positiva definida. Los métodos tradicionales de resolución de ecuaciones de elementos finitos pueden seguir siendo empleados. La desventaja principal es que hay que determinar el factor de penalización apropiado a cada problema. Si el factor es muy pequeño la violación de las restricciones es inaceptable y si es muy alto se producen problemas numéricos o bien, en el caso que nos interesa de unión de mallas, la solución es trivial, es decir, $e_1(u) = 0$ y $e_2(u) = 0$ lo que trae como consecuencia el "anclaje" de la zona de interfaz.

En todo caso, a diferencia de los métodos anteriores, con el método de la función de penalización los resultados satisfacen sólo aproximadamente las restricciones y es necesario buscar el parámetro de penalización que minimiza la violación de ellas.

EJEMPLOS

Se presentan aquí dos ejemplos de unión de mallas no conformes. En ambos la conformidad es la de elementos de igual tipo con nodos no coincidentes. El objetivo es mostrar la aplicación de las técnicas de multiplicadores de Lagrange y de función de penalización. Fundamentalmente se desea establecer un factor de penalización que fuerce la solución a cumplir con las restricciones de igualdad en la misma medida que lo hace el método de multiplicadores de Lagrange.

Placa en flexión pura

La Figura 5 muestra una placa de 200 mm $\times$ 100 mm sometida a un momento flector de 25000 kg-mm, lo que provoca un esfuerzo máximo en la dirección longitudinal de 15 kg/mm².

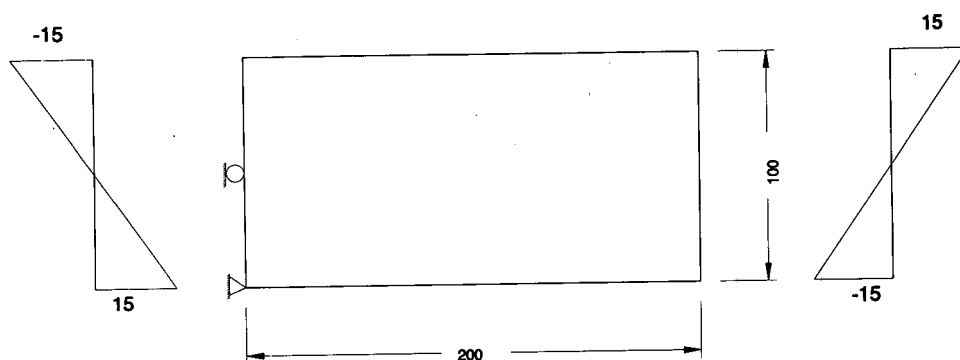


Figura 5. Placa en flexión pura.

Esta placa se ha dividido en dos regiones iguales, las que serán discretizadas de manera diferente y unidas mediante multiplicadores de Lagrange o mediante una función de penalización.

En la Figura 6 se muestran tres discretizaciones diferentes para la misma placa. Una de las regiones se mantiene constante, así como la interfaz, y la otra se discretiza de tal modo de obtener elementos de rigidez diferente.

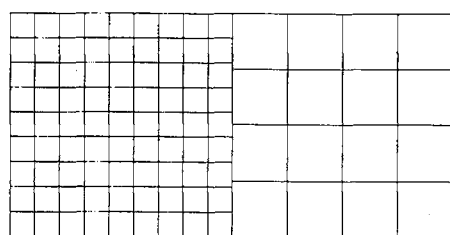
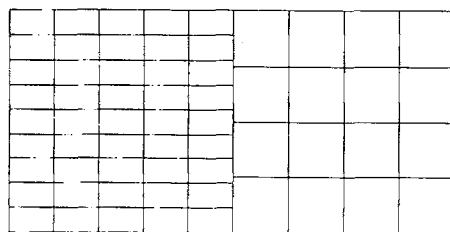
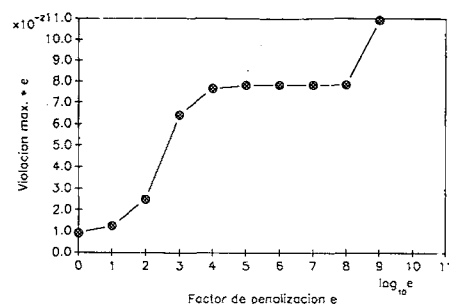
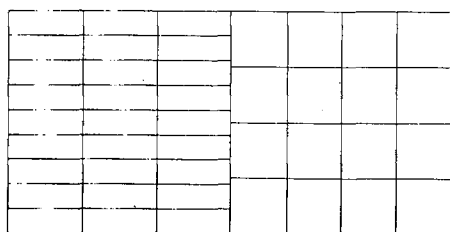
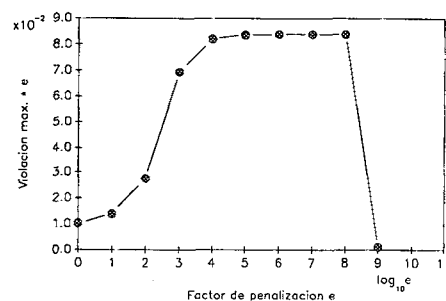
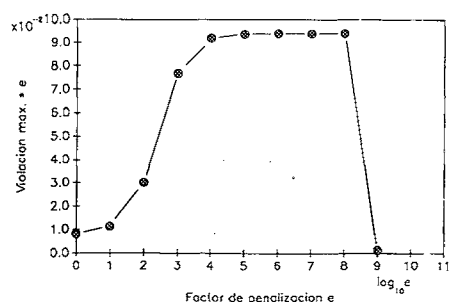
**a****b****c**

Figura 6. Placa en flexión. Tres discretizaciones con igual interfaz y curva de violación de la restricción.

El método de los multiplicadores de Lagrange cumple absolutamente en todos los casos con la restricción de igualdad impuesta, independientemente del tipo de discretización. Como también se podía esperar, el método de la función de penalización no cumple exactamente dicha restricción y la violación de ésta depende del valor del factor de penalización.

En dicha figura, al lado de cada modelo, se ha dibujado la curva de violación de la restricción normalizada por el factor de penalización en función del mismo. Se ha elegido normalizar los valores de la violación ya que ésta disminuye siempre con el aumento del factor de penalización y, en el intervalo estable, esta disminución es del orden del aumento del factor. Es decir, si para un factor de penalización de 10^6 el valor del gráfico es 0.08 y el valor real de la violación es de 8×10^{-8} , y si para el factor 10^8 es 0.08 el valor real es 8×10^{-10} . Esta elección está dictada por el hecho de que con esos

valores reales no es posible representar el límite superior del factor de penalización, ya que el valor de la violación de la restricción es muy pequeño en comparación a los valores iniciales. Con esto se logra observar el momento en que el alto valor del factor fuerza a la solución hacia valores nulos, es decir, el fenómeno de “anclaje” que se mencionó anteriormente.

El rango en que la curva de violación normalizada se estabiliza, coincide con la estabilización de otros parámetros estructurales como la energía potencial, la reacción máxima en la interfaz y el error máximo de los desplazamientos frente a los obtenidos mediante multiplicadores de Lagrange. Además, dichos parámetros estructurales toman los mismos valores que los que resultan de la aplicación de este último método.

Las curvas muestran una independencia del rango aceptable de factores de penalización frente a la rigidez de los elementos para una misma interfaz. Esto se explica por el hecho de haber introducido en la función de penalización los valores de la diagonal de la matriz de rigidez que corresponden a los nodos de la interfaz, como se menciona en el punto 4.3.

El rango de valores aceptables del factor de penalización para los ejemplos de la Figura 6, es aproximadamente, de $w = 10^5$ y $w = 10^8$.

Otras dos discretizaciones y la violación de la restricción en cada caso se muestran en la Figura 7. La idea era de determinar, con elementos de igual rigidez, la influencia del tipo de interfaz en el rango aceptable del factor de penalización.

Los resultados no muestran gran diferencia entre una y otra interfaz. Sin embargo,

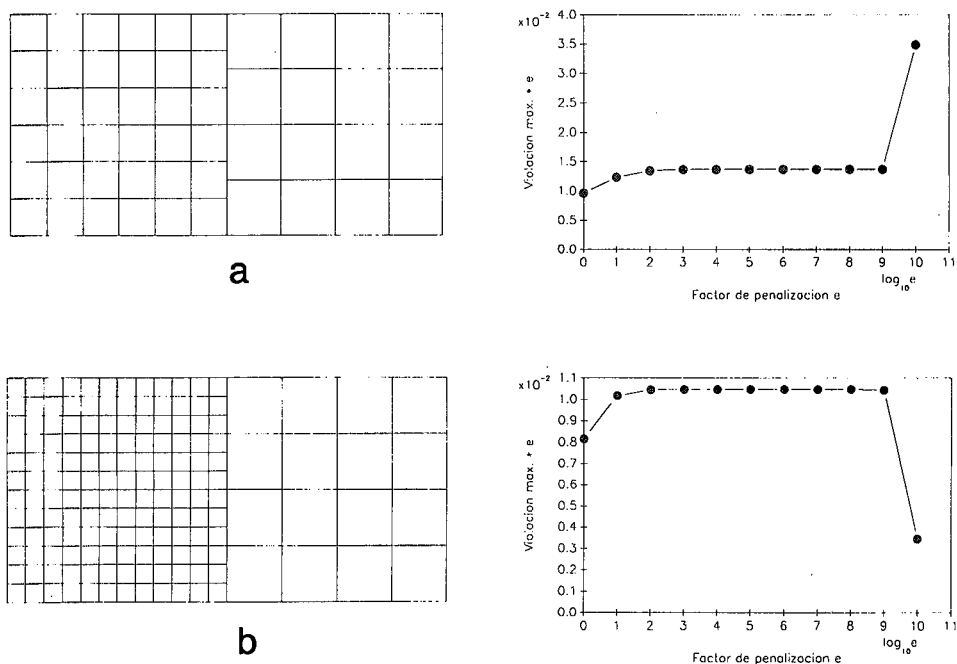


Figura 7. Placa en flexión. Dos discretizaciones con igual rigidez elemental y curva de violación de la restricción.

el ejemplo de la Figura 6a es también una discretización con igual rigidez elemental y el rango de estabilidad de la curva es muy diferente.

Esto, sin lugar a dudas, muestra que dicho rango es altamente dependiente de la topología de la interfaz. En efecto, la interfaz de los ejemplos de la Figura 7 es bastante "regular" ya que los nodos de los elementos del lado derecho en el caso a coinciden con los nodos del lado izquierdo o, a lo más, coinciden con la mitad de un lado de un elemento. En el caso b el lado derecho sólo tiene nodos coincidentes con el lado opuesto. Por el contrario, el caso mostrado en la Figura 6a presenta nodos correspondientes al lado derecho mucho más cercanos a nodos del lado izquierdo pero no coincidentes. De todos modos se estima que es necesario efectuar ensayos adicionales para corroborar esta afirmación.

Viga con entalla. Refinamiento local de mallas

En la Figura 8 se representa una viga con una sencilla entalla en V sometida a una flexión por corte. El objetivo de este ejemplo es mostrar la aplicación de la unión de mallas en el refinamiento de discretizaciones de elementos finitos para determinar los valores de esfuerzo en casos de concentración de éstos.

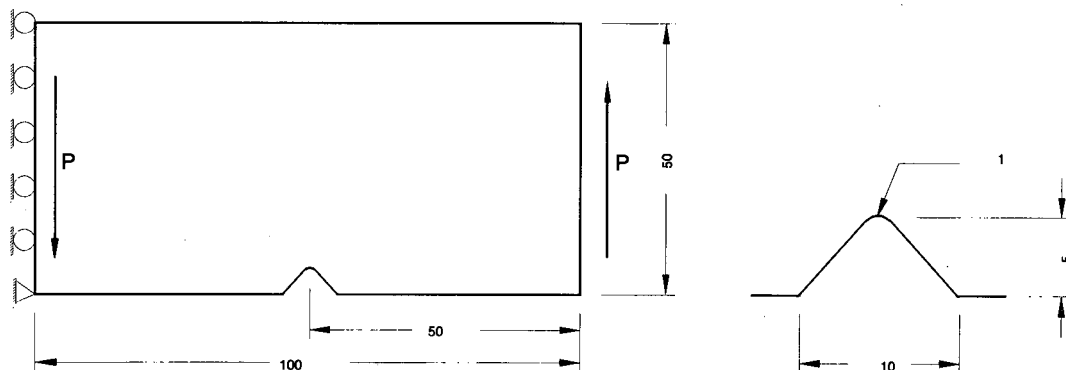


Figura 8. Viga con entalla.

Este mismo ejemplo ha sido utilizado, con el mismo objetivo, en un trabajo anterior¹⁰ sobre análisis local mediante el aislamiento de la región de interés, la que es refinada posteriormente para el cálculo de los esfuerzos.

La Figura 9a muestra la discretización inicial de la viga. Las Figuras 9b, 9c y 9d presentan tres niveles sucesivos de refinamiento de la región próxima del concentrador de esfuerzos.

Los resultados de la unión de estas mallas mediante multiplicadores de Lagrange se comparan con los obtenidos mediante el análisis aislado de cada región imponiendo en la interfaz los desplazamientos o las tracciones de superficie. En la Figura 10, donde el segundo, tercer y cuarto punto corresponden a los refinamientos de 9b, 9c y 9d respectivamente, se observa que la curva de convergencia del esfuerzo máximo se encuentra entre la de los dos métodos de aislamiento de la región. Es decir, sobre la curva de condiciones de contorno cinemáticas y bajo la curva de condiciones de contorno de equilibrio.

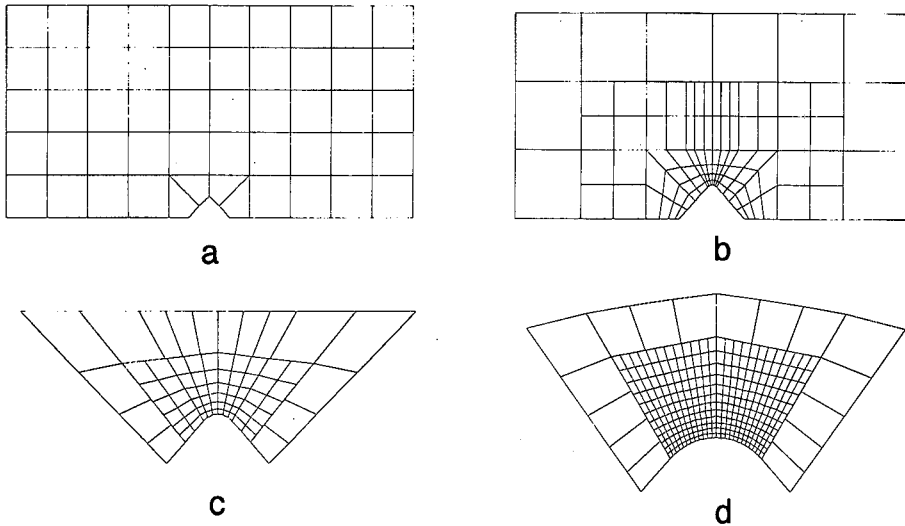


Figura 9. Viga con entalla. Discretización inicial y tres niveles de refinamiento sucesivos.

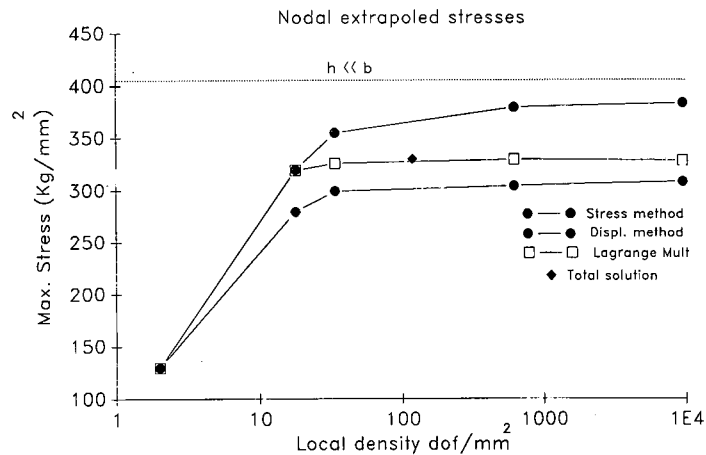


Figura 10. Viga con entalla. Curva de convergencia para cuatro niveles sucesivos de refinamiento.

Este resultado era esperado ya que la imposición de los desplazamientos del borde de una región discretizada a la misma refinada, produce esfuerzos menores ya que esta última es más flexible. Se puede observar que la curva para los valores de esfuerzo mediante multiplicadores de Lagrange pasa por el punto donde se tiene una solución para una discretización conforme. Esta última es llamada, en dicha figura, solución total.

La aplicación del método de la función de penalización lleva a obtener las curvas normalizadas de violación máxima de las restricciones explicadas en el ejemplo anterior. Estas se muestran en la Figura 11. Allí se observa la gran diferencia en el comportamiento de la solución para los diferentes niveles de refinamiento. La Figura 11a corresponde a la región mostrada en 9b, la 11b es el resultado para la región indicada

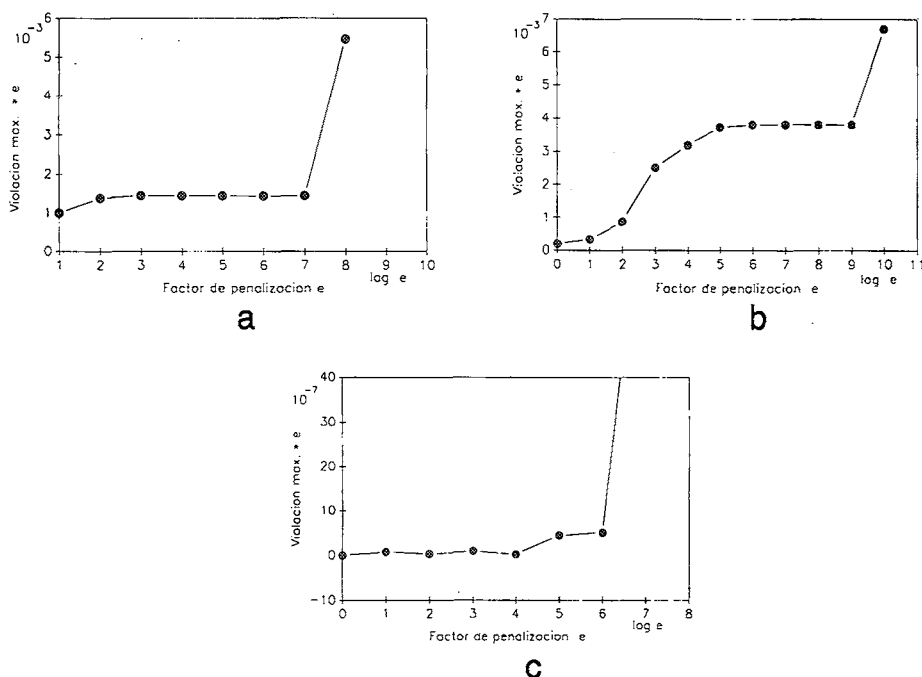


Figura 11. Viga con entalla. Curvas de violación máxima: a) figura 8b; b) figura 8c; c) figura 8d.

en 9c y la 11c para la región de 9d.

Para la primera región, el rango de valores aceptables del factor de penalización es entre 10^3 y 10^7 aproximadamente. En cambio para la segunda estos valores deben encontrarse entre 10^5 y 10^9 y para la tercera región entre 10^2 y 10^6 . En este último caso, la curva de violación máxima normalizada no entrega muy buena información debido a problemas de precisión ya que a ese nivel la geometría es muy pequeña. Por esto, para esa última curva, el rango aceptable se obtuvo de los otros parámetros estructurales.

CONCLUSIONES

Se ha formulado el problema de la unión no conforme de mallas en elementos finitos de modelo desplazamiento. El problema se ha clasificado según los tipos de no conformidad de la unión. Sin embargo, todas las categorías señaladas llevan al mismo planteamiento y por lo tanto pueden aplicarse los mismos métodos de resolución.

Mediante dos ejemplos, cuya no conformidad proviene de elementos de igual tipo con nodos no coincidentes, se ha mostrado la aplicación del método de los multiplicadores de Lagrange y de la función de penalización en la imposición de las restricciones de igualdad.

El método de los multiplicadores de Lagrange es directamente aplicable en los casos tratados, siempre que el sistema de resolución de ecuaciones esté acondicionado para resolver los problemas que plantea dicho método con la singularidad de la matriz de

rigidez resultante. Si este problema está resuelto, el del aumento de los grados de libertad del sistema no es tan importante actualmente, debido al costo descendente de la memoria de los computadores.

Por el contrario, el método de la función de penalización sigue siendo un método que requiere una intervención del usuario para la selección del valor apropiado del factor de penalización. Aunque en los dos ejemplos mostrados puede decirse que un factor de penalización de 10^6 entrega valores aceptables en todos los casos, estos no son lo suficientemente generales para decir que este valor puede ser universalmente utilizado en la aplicación del método en análisis de elasticidad bidimensional. No obstante, dicho valor puede ser utilizado como valor de partida en una implementación iterativa del método. En un caso lineal la iteratividad es muy costosa, sobre todo cuando se debe regenerar para cada iteración la matriz de rigidez. En una implementación no lineal, por su naturaleza iterativa este costo viene a ser marginal y la utilización de la penalización puede ser atractiva debido a que no aumenta los grados de libertad del sistema.

De los métodos estudiados, el método de los multiplicadores de Lagrange parece ser el más apto para tratar problemas de unión no conforme de mallas. La generalización del método para cualquier tipo de no conformidad, en vista de su implementación en un código de elementos finitos, puede efectuarse fácilmente si están resueltos los problemas mencionados del sistema de resolución de ecuaciones. Dicho método se muestra atractivo en el caso de unión de elementos de tipo diferente, como por ejemplo, uniones sólido-cáscara, sólido-axisimétrico, sólido-viga, cáscara-viga, etc.

REFERENCIAS

1. J.S. Campbell, "A Penalty Function Approach to the Minimization of Quadratic Functionals in Finite Elements Analysis", *Finite Meth. Engrg. Proceedings*, U. of N.S. New Wales, pp. 33-54, (1973).
2. J.W. Harvey y W.C. Clark, "Smooth Interfacing of Finite Element Models", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 14, pp. 1073-1104, (1979).
3. C.A. Felippa, "Iterative Procedures for Improving Penalty Function Solutions of Algebraic Systems", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 12, pp. 821-836, (1978).
4. C.A. Felippa, "Error Analysis of Penalty Function Techniques for Constraint Definition in Linear Algebraic Systems", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 11, pp. 709-728, (1977).
5. J. Barlow, "Constraint Relationships in linear and Nonlinear Finite Element Analysis", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 18, pp. 521-533, (1982).
6. G.F. Carey, A. Kabaila y M. Utku, "On Penalty Methods for Interelement Constraints", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 30, pp. 151-171, (1982).
7. M. Utku y G.F. Carey, "Boundary Penalty Techniques", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 30, pp. 103-118, (1982).
8. P. Tsai y W.H. Chen, "The Combination of Different Type Elements Using a Lagrangian Multiplier Technique for Static and Dynamic Structural Analysis", *Computers & Structures*, Vol. 21, pp. 493-500, (1985).
9. J.F. Abel y M.S. Shephard, "An Algorithm for Multipoint Constraints in Finite Element Analysis", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 14, pp. 464-467, (1979).
10. L. Quiroz y P.A. Beckers, "A New Approach for Zoom Techniques in Stress Analysis", *II Panamerican Congress of Applied Mechanics*, PACAM II, Chile, (1991).