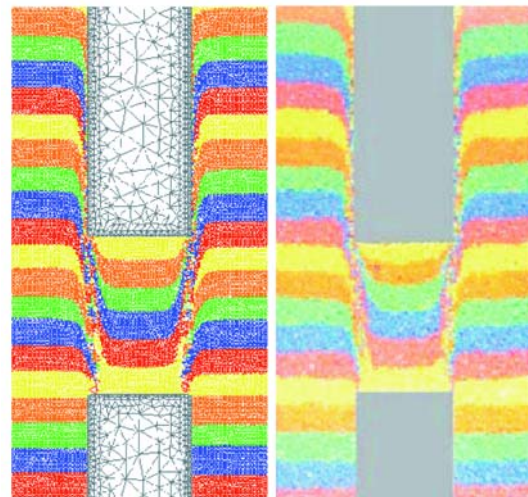


Aplicación del método PFEM a la simulación de procesos de transferencia propios de la industria pulvimetalúrgica

C. González
J.C. Cante
X. Oliver



Aplicación del método PFEM a la simulación de procesos de transferencia propios de la industria pulvimetalúrgica

C. González
J.C. Cante
X. Oliver

Monografía CIMNE N°-117, Abril 2010

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España
www.cimne.upc.es

Primera edición: Abril 2010

**APLICACIÓN DEL MÉTODO PFEM A LA SIMULACIÓN DE PROCESOS DE TRANSFERENCIA
PROPIOS DE LA INDUSTRIA PULVIMETALÚRGICA**

Monografía CIMNE M117

© Los autores

ISBN: 978-84-96736-88-7

Depósito legal: B-19608-2010

Índice general

Prólogo	v
1. PFEM - Definiciones y Conceptos Básicos	1
1.1. Introducción	1
1.1.1. Antecedentes históricos	1
1.2. PFEM - Generalidades	2
1.2.1. Fundamentos físicos	2
1.2.2. Descripción del movimiento	3
1.2.3. Discretización espacial	4
1.2.4. Discretización temporal	6
1.2.5. Fenómenos de interacción	8
1.2.6. Algoritmo de cálculo para el PFEM	9
1.3. Recapitulación	12
2. PFEM - Formulaciones y Algoritmos	13
2.1. Introducción	13
2.2. El problema de valores de contorno y condiciones iniciales	13
2.2.1. Introducción	13
2.2.2. Forma fuerte del problema mecánico general	14
2.2.3. Forma débil del problema mecánico	16
2.2.4. Discretización por elementos finitos	18
2.2.5. Linealización del problema - formulación general	20
2.3. Generación de las conectividades nodales	21
2.3.1. Introducción	21
2.3.2. Diagrama de Voronoï	21
Definiciones	21
Propiedades importantes [37][67]	22
Triangulación de Delaunay	23
Propiedades importantes [37][67]	23
2.3.3. Método de reconocimiento de las fronteras - Alpha-Shape	24
2.4. Transferencia de información entre conectividades	27
2.4.1. Introducción	27
2.4.2. Ensayo de suavizado local	29
2.4.3. Transferencia de información en el entorno PFEM	30
2.4.4. Proyección de la información elemental hacia los nodos (suavizado)	31
2.4.5. Actualización de los valores nodales	35

2.4.6. Proyección de la información nodal hacia los puntos de gauss (interpolación)	36
2.5. Recapitulación	38
Apéndice I. Métodos de Integración Temporal - Algoritmos	41
A. Métodos de integración temporal	41
A.1. Introducción	41
B. Método de Newmark	42
B.1. Algoritmo de Newmark	43
C. Método de Bossak	47
C.1. Algoritmo de Bossak	48
C.2. Matrices de Masa y de Amortiguamiento	50
3. Problema de Contacto e Interacción	51
3.1. Introducción	51
3.2. Descripción física del problema	52
Introducción de las restricciones de fricción	54
3.3. Imposición de las restricciones de contacto	55
3.3.1. Generalidades	55
3.3.2. Métodos no regularizados - Multiplicadores de Lagrange	57
3.3.3. Métodos regularizados - Penalización	59
Método de penalización clásico	61
3.3.4. Discretización del problema de contacto	62
3.4. El Método de la Interfaz de Anticipación del Contacto (ACIM)	63
3.4.1. Introducción	63
3.4.2. Creación de la interfaz de contacto	64
Determinación de las conectividades de la interfaz de contacto	66
3.4.3. Características de la interfaz de contacto	68
3.4.4. El elemento de interfaz	69
3.4.5. Deformación normal	70
Deformación normal inicial	71
Deformación normal incremental	72
Deformación normal total	73
3.4.6. Tensión de contacto	74
3.4.7. Fuerzas de contacto	75
3.4.8. Contacto tangencial - Efectos de la fricción: modelo de Coulomb	77
Introducción	77
Deformación tangencial	78
Tensión tangencial	79
Fuerzas tangenciales	80
3.4.9. Contacto tangencial - Efectos de la fricción: modelo de Norton-Hoff	81
Introducción	81
Velocidad de deformación y velocidad tangencial	84
Tensión tangencial	84
Fuerzas tangenciales	85
3.4.10. Algoritmos asociados al método ACIM	86
Algoritmo para el cálculo de la componente normal del contacto	87
Algoritmo para el cálculo de la componente tangencial del contacto	89

3.5. Problemas de validación	92
3.5.1. Problema 1: Patch Test de Contacto	92
3.5.2. Problema 2: Contacto de Hertz	97
3.5.3. Problema 3: Contacto Axisimétrico	104
3.6. Recapitulación	110
Apéndice I. Método de Triangulación de Voronoi con Restricciones - CDT	113
A. Introducción	113
B. Relación entre los métodos ACIM y CDT	114
C. Triangulación de Delaunay con Restricciones (CDT)	115
Apéndice II. Tratamiento de Casos Especiales	117
A. El Elemento Virtual	117
B. Elementos Degenerados	118
Apéndice III. Cálculo de los Operadores Tangentes Asociados al Método ACIM	119
A. Definiciones importantes	119
A.1. Expresión del gradiente de los desplazamientos virtuales	119
A.2. Linealización de las deformaciones incrementales normales	120
A.3. Linealización de las deformaciones incrementales tangenciales	120
A.4. Linealización de las tensiones normales de contacto	121
A.5. Linealización del incremento de velocidad relativa tangente	121
B. Contribución debida al contacto normal	121
C. Contribución debida a la fricción	122
C.1. Modelo de Coulomb	122
C.2. Modelo de Norton-Hoff	123
4. Ejemplos Aplicados a la Pulvimetalurgia	125
4.1. Introducción	125
4.2. Proceso de llenado	127
4.2.1. Generalidades	127
4.2.2. Aspectos fenomenológicos	128
4.2.3. Ensayo de llenado de molde	128
4.2.4. Aspectos del modelo numérico	130
4.2.5. Resultados numéricos y experimentales	131
4.3. Procesos de transferencia	136
4.3.1. Generalidades	136
4.3.2. Aspectos fenomenológicos	138
4.3.3. Estudio del transporte de cámara	138
4.3.4. Descripción del ensayo	138
4.3.5. Aspectos del modelo numérico	140
4.3.6. Resultados numéricos y experimentales	142
Análisis de los campos de desplazamientos	142
Análisis del flujo de masa	145
Eficiencia del proceso de transporte	148
Análisis de la distribución de densidades	149
Análisis de la evolución de la densidad media en la zona de transferencia	149

	Análisis de los campos de densidades	151
4.4.	Proceso de compactación	161
4.4.1.	Generalidades	161
4.4.2.	Aspectos fenomenológicos	162
4.4.3.	Descripción del Ensayo	163
4.4.4.	Aspectos del modelo numérico	166
4.4.5.	Resultados numéricos y experimentales	167
	Caso 1) Herramientas rígidas	167
	Caso 2) Herramientas deformables	169
4.4.6.	Recapitulación	170
A.	Modelo Constitutivo de Flujo	173
A.1.	Introducción	173
A.2.	Formulación constitutiva	175
A.2.1.	La densidad como variable fenomenológica del material	175
A.2.2.	Análisis de la densidad material	177
A.2.3.	La máxima densidad histórica como variable interna	178
A.2.4.	Relación cinemática - Velocidad de deformación	179
	Descomposición aditiva de la velocidad de deformación	179
A.2.5.	Funciones de fluencia	179
	Superficie de Drucker-Prager	181
	Superficie elíptica - casquete elíptico	182
A.2.6.	Regla de flujo	183
A.2.7.	Flujo plástico	184
	Flujo plástico sobre la superficie de Drucker-Prager	184
	Flujo plástico sobre la superficie elíptica	186
A.2.8.	Síntesis de la formulación del modelo de flujo	188
A.3.	Integración de la ecuación constitutiva	188
A.3.1.	Cálculo del multiplicador plástico - formulación continua	188
A.3.2.	Cálculo de las tensiones - formulación continua	190
A.3.3.	Algoritmo de integración y de actualización de las variables	192
	Tensor constitutivo tangente	196
A.4.	Calibración de los parámetros del modelo constitutivo	197
A.4.1.	Introducción	197
A.4.2.	Calibración de los parámetros pertenecientes a la superficie elíptica	197
A.4.3.	Calibración de los parámetros pertenecientes a la superficie de Drucker-Prager	200
	Parámetro de fricción interna	200
A.5.	Recapitulación	205

Prólogo

La resolución de un elevado número de problemas pertenecientes al ámbito de las ciencias aplicadas y de la ingeniería, que son actualmente de gran interés, exige disponer de programas computacionales robustos, confiables y que permitan un amplio rango de aplicación. Un ejemplo de ello son los problemas de ingeniería que se encuadran dentro del análisis estructural, donde se suelen presentar fenómenos físicos acoplados, entre los que se cuentan los efectos dinámicos, los grandes desplazamientos y deformaciones, la interacción entre cuerpos con contacto y fricción, etc.

Los paquetes de programas computacionales más utilizados en la actualidad suelen ser altamente especializados y modularizados, por lo que la resolución de problemas donde existen varios fenómenos simultáneos exige su desacoplamiento en otros más simples, que si bien pueden ser correctamente resueltos, su integración no logra representar en algunos casos el problema global inicial. Se presentan tales situaciones en casos como la simulación de procesos de conformado de metales durante las etapas de diseño y optimización de la fabricación, el análisis de estructuras multicomponentes donde se producen movimientos de sólido rígido e interacción de contacto entre diferentes cuerpos, el estudio de procesos dinámicos con o sin interacción termo-hidráulica y mecánica, etc.

El método de los elementos finitos FEM clásico o estándar, a pesar de haber demostrado su alto potencial para resolver una vastísima gama de problemas y situaciones físicas, presenta limitaciones de fondo que se hacen evidentes en la simulación de determinados problemas complejos. La existencia de una conectividad nodal constante a lo largo de la simulación de un proceso en el que se producen grandes deformaciones, suele generar elementos muy distorsionados, que en ciertos casos degeneran en volúmenes nulos y hasta negativos. La presencia de procesos que incluyen una alta interacción de contacto entre diferentes componentes estructurales, frecuentemente está asociado a una dificultosa o hasta imposible resolución, durante la cual se producen tasas de convergencia extremadamente bajas. Tales situaciones convierten al FEM en una metodología rígida y acotada, que en muchos casos no permite alcanzar resultados numéricamente fiables y en otros no logra arribar a la solución de un determinado problema físico.

Con estos antecedentes, resulta necesario aportar nuevas herramientas y estrategias con el objeto de proponer alternativas para solucionar algunas de las dificultades enunciadas. El Método de los Elementos Finitos de Partículas PFEM, cuya filosofía, desarrollo, formulación e implementación se presentan en este trabajo tiene su base en una reinterpretación y reformulación del clásico FEM.

El PFEM se caracteriza por mantener un número constante de partículas o nodos para describir a un medio continuo, y por utilizar de manera intensiva la reconexión nodal a

fin de minimizar las distorsiones que experimenta el medio a lo largo de un determinado proceso.

Por su concepción, el PFEM admite el desarrollo del denominado Método de la Interfaz de Anticipación del Contacto ACIM. Dicho método permite identificar de manera dinámica las zonas de contacto potencial y efectivo, como así también imponer la condición de impenetrabilidad y aplicar fuerzas de fricción entre componentes estructurales.

El objetivo primario del trabajo es desarrollar desde el enfoque de la ingeniería la metodología PFEM, la cual se fundamenta en una reinterpretación alternativa los métodos clásicos masivamente aceptados. Como objetivos adicionales de la monografía se tienen aplicar el PFEM a problemas complejos pertenecientes a la pulvimetalurgia, exhibir sus potencialidades en otros campos de la ingeniería y vislumbrar algunas líneas de investigación y desarrollo futuros.

La monografía se organiza de la siguiente manera: en el capítulo 1 se lleva a cabo una introducción al PFEM, donde se exponen sus ideas básicas y fundamentos conceptuales. El capítulo 2 presenta el desarrollo general de la formulación y la algoritmia asociada a la implementación del PFEM, donde se enfatiza el papel central desempeñado por el algoritmo de reconexión nodal y se lleva a cabo una revisión somera de los algoritmos estándares de integración temporal que son aplicables. Por otra parte se destaca la importancia que cobra la estrategia adoptada para transferir la información entre conectividades a fin de minimizar el fenómeno de difusión numérica y de preservar su consistencia a lo largo de un proceso de cálculo. Al respecto, se propone una metodología de suavizado incremental y de transporte nodal de la información, por medio de la cual se reduce el número de operaciones asociadas a este proceso y se minimizan los efectos adversos relacionados con la degradación de la información.

El capítulo 3 está dedicado al desarrollo detallado del método de contacto ACIM, donde a partir del análisis fenomenológico se introducen las metodologías clásicas de búsqueda e imposición de la condición de contacto, se analizan sus ventajas e inconvenientes. Luego, partiendo de dicha base y con el objetivo de utilizar las ventajas y de superar las limitaciones de sus predecesores, se desarrolla el método ACIM y se lo encuadra dentro de la familia de métodos de penalización. Finalmente, se resuelven un conjunto de problemas de referencia destinados a evaluar el desempeño de la metodología propuesta, cuyos resultados se comparan con los que surgen de la aplicación de algunos métodos y códigos numéricos estándares. En consecuencia, luego de la comparación crítica de ambos resultados, se lleva a cabo un análisis de los principales elementos aportados por el método ACIM y se plantean algunos posibles puntos de análisis futuro a fin de extender su rango de aplicación y mejorar su desempeño.

El capítulo 4 se destina a la demostración práctica de las posibilidades que abre la aplicación de la metodología PFEM y de sus métodos asociados para la resolución de problemas aplicados a la tecnología e ingeniería, haciendo hincapié en aquellos procesos pertenecientes a la pulvimetalurgia. En consecuencia, se logra poner de manifiesto que el PFEM logra resolver problemas de elevada dificultad técnica, que en algunos casos resultan inabordables por las metodologías clásicas.

De manera anexa se presenta la formulación y la implementación del denominado modelo constitutivo de flujo, cuyo marco de aplicación se centra en los procesos asociados a la pulvimetalurgia. Dicho modelo, que se caracteriza por tener una formulación cuya

descripción proviene esencialmente de los fluidos, resulta ser conveniente para describir procesos donde se producen grandes movimientos y altos flujos de materiales sólidos en polvo (llenado de moldes y transferencia previa a la compactación de pulvimetales). Una característica especial de dicho modelo es la incorporación del efecto producido por la fricción interna, que es típica en esta clase de materiales cuando se encuentran en estado estático o en reposo. Otra singularidad del modelo constitutivo de flujo es la inclusión de una región compresiva-disipativa destinada a describir el fenómeno de densificación que es propio de los polvos metálicos ante cargas dinámicas de impacto y durante la compactación. En suma, dicho modelo es potencialmente capaz de describir la evolución de un pulvimetal a través de los principales procesos mecánicos comprendidos por la pulvimetalurgia: el llenado del molde, la transferencia y redistribución del material dentro del molde y la compactación del material.

Capítulo 1

PFEM - Definiciones y Conceptos Básicos

1.1. Introducción

El objeto del presente capítulo es exponer de forma introductoria los elementos fundamentales y los aspectos característicos del método de los elementos finitos de partículas PFEM. Para ello se hace referencia a un conjunto de temas y aspectos que conforman la metodología. Los mismos, que aquí sólo son mencionados, luego son desarrollados de forma separada y con mayor grado de detalle en los diferentes capítulos y apartados del trabajo.

1.1.1. Antecedentes históricos

El método de los elementos finitos de partículas (PFEM) es un método numérico utilizado para resolver de forma aproximada problemas con condiciones iniciales y de contorno. Puede ser considerado como una evolución necesaria del método de los elementos finitos (FEM) y de algunos de los métodos sin malla (meshless methods) existentes, para lograr resolver convenientemente un determinado conjunto de problemas [79]. La mecánica de fluidos y en particular el CFD¹ [45], es el campo donde esta metodología presenta hasta el momento, sus mayores desarrollos y aplicaciones.

Dentro de este contexto, el método presenta un especial atractivo como consecuencia de su descripción típicamente lagrangiana de la fenomenología. Ciertos problemas que se encuentran actualmente dentro del campo de la investigación y que son inherentes a la simulación numérica de los medios fluidos, como la determinación de las superficies libres y el tratamiento numérico de los términos convectivos, pueden ser resueltos de manera trivial por medio de la metodología PFEM.

De acuerdo con la definición dada en [47], el PFEM es considerado como un método sin malla, ya que el cálculo de las funciones de forma utilizadas para llevar a cabo las respectivas interpolaciones depende exclusivamente de la posición de los nodos. Además, la evaluación de las conectividades nodales es un proceso que puede ser resuelto en un período acotado de tiempo, que es dependiente del número total de nodos del dominio.

¹CFD: Computational Fluid Dynamics

Los mismos autores asocian al método la utilización de una partición del dominio basada en la no convencional EDT² o poliedrización de Delaunay extendida, lo que conlleva a la utilización de un conjunto de funciones de forma especiales denominadas funciones de interpolación No-Sibsonianas [8]. Sin embargo, debe aclararse que esta metodología también admite la utilización de funciones de forma estándar. Una ventaja que le es propia al PFEM, a diferencia de la mayoría de los demás métodos sin malla, es la posibilidad de que las condiciones de contorno esenciales sean impuestas sin complicaciones extra y de forma coincidente a como se hace en el FEM clásico [47].

El método PFEM ha sido aplicado también a problemas de interacción fluido-estructura [48], y a fenómenos de flujo con transferencia de calor y cambio de fase [6]. Más recientemente, pueden encontrarse algunas incursiones destinadas a resolver problemas relacionados con el llenado de moldes para procesos de fundición de metales [80]. Tanto en un caso como en el otro, las fenomenologías tratadas y los materiales utilizados se siguen modelando con el enfoque propio de la mecánica de fluidos.

Finalmente, una adaptación del PFEM a aquellos fenómenos pertenecientes a la mecánica de sólidos, ha sido propuesta en [70]. En la misma se explotan por un lado las potencialidades generales del método de los elementos finitos de partículas y por el otro se aplican los aspectos más clásicos y probados del método de los elementos finitos estándar, como son la utilización de particiones triangulares del dominio en dos dimensiones y sus clásicas funciones de interpolación lineal. Bajo la última línea de investigación nombrada, acerca de la metodología PFEM, se encuentran ceñidos las hipótesis y los desarrollos presentados en este trabajo.

1.2. PFEM - Generalidades

1.2.1. Fundamentos físicos

El PFEM se basa en la representación macroscópica del medio continuo por medio de un número finito de partículas³ de tamaño infinitesimal. Las partículas que describen el comportamiento del medio continuo son interpretadas como puntos materiales que se encuentran situados en un determinado lugar del espacio, donde pueden ser definidas las tensiones y las deformaciones. La región del espacio ocupada por una porción de un determinado medio continuo contiene en su interior un número infinito de partículas de volumen y masa infinitesimal, que no son susceptibles de ser medidos o calculados⁴.

Como consecuencia, se acepta que la materia que conforma al medio continuo sea infinitamente divisible y que alrededor de cada partícula siempre puedan hallarse otras partículas vecinas [58]. De las anteriores afirmaciones se desprende el hecho de que un método que intente modelar el comportamiento de un medio, tal como lo hace el PFEM,

²EDT: Extended Delaunay Tessellation.

³La denominación de partícula, punto, punto material o nodo se utiliza indistintamente para hacer referencia al mismo concepto, excepto que se indique lo contrario.

⁴Sea Ω un cuerpo, o en general, un medio continuo que ocupa una determinada región del espacio, se puede afirmar que dicho cuerpo está formado por un conjunto infinito de puntos materiales, $\Omega = \{p_1, p_2, \dots, p_i\}$ con $0 < i \leq i_n$ e $i_n \rightarrow \infty$. De un modo similar, es posible representar al mismo cuerpo de forma discreta por un conjunto finito de puntos materiales, $\bar{\Omega} = \{p_1, p_2, \dots, p_i\}$, con $0 < i \leq i_n$ y $i_n \rightarrow n_p$. De forma que cuando $n_p \rightarrow \infty$, $\bar{\Omega} \rightarrow \Omega$.

alcanza un mayor grado de precisión y de calidad en la aproximación del fenómeno, cuando se incrementa el número de partículas n_p utilizadas para representarlo.

En el contexto del PFEM, las partículas que describen el comportamiento del medio, pueden moverse libremente, obedeciendo a lo largo del tiempo (cálculo dinámico o transitorio) a las ecuaciones de movimiento. En ciertos casos, se acepta que una o varias de las partículas puedan llegar a separarse del dominio al que pertenecían originalmente. Esto implica físicamente la formación de gotas en el caso de un fluido [79] o la fragmentación del medio en pequeñas porciones de material, en el caso de materiales sólidos o cuasi sólidos.

1.2.2. Descripción del movimiento

Tanto la descripción matemática de las propiedades del medio continuo como así también la fenomenología adoptados por la metodología PFEM, pertenecen a una descripción lagrangiana o material [65] del problema. El hecho de concentrar el comportamiento local de diferentes zonas del medio continuo y de estudiar su evolución mediante el seguimiento de un número finito de partículas⁵, exige tener que interpolar cualquiera de las propiedades del medio. Dicha situación se presenta siempre que sea necesario conocer el valor de la propiedad en un determinado punto que no coincide con ninguna de las partículas que representan al medio. Dicha interpolación se efectúa utilizando las conectividades vigentes en el respectivo instante de tiempo y las funciones de interpolación definidas para tal fin [70].

La descripción lagrangiana, que tradicionalmente ha sido utilizada en la mecánica de sólidos, presenta ciertas ventajas en el modelado de materiales fluidos o cuasi-fluidos. Como se dijo antes, la principal ventaja de esta descripción es que permite eliminar de forma natural, los términos convectivos presentes en ese tipo de formulaciones. Sin embargo, la dificultad que surge como consecuencia de utilizar esta metodología, es la de poder mover las partículas del medio de forma adecuada y eficiente [79] [35].

La descripción lagrangiana o material de aquellos medios sometidos a grandes movimientos y deformaciones implica a priori dos características:

1. **La definición de superficies libres:** el hecho de seguir en todo momento a un número determinado de partículas representativas del medio permite que se cuente en cada instante de tiempo con la información referente a la ubicación precisa de las superficies libres y de otros contornos en el espacio. Esto hace referencia a superficies libres y/o interiores ya existentes o a otras, tanto libres como interiores, que pudieran resultar de la evolución del fenómeno modelado, ver la figura 1.1.
2. **El reacomodamiento espacial de las partículas:** relacionar el movimiento de las partículas con el movimiento del medio continuo trae aparejado, en casos donde se presentan fenomenologías asociadas a grandes movimientos, un reacomodamiento de las partículas y, en consecuencia, del material que ellas representan. Físicamente, esto se traduce en la aparición de elevadas deformaciones en el medio, lo que bajo ciertas circunstancias puede causar un cambio de propiedades en la vecindad próxima a una cierta porción de material.

⁵El movimiento de las partículas es asimilado unívocamente con el movimiento del medio continuo.

En suma, el enfoque lagrangeano del método conduce al movimiento o actualización de las posiciones nodales desde su configuración inicial de referencia hasta su configuración deformada. Dado que el PFEM es un método concebido para la resolución de problemas que son por lo general no lineales (por razones geométricas o del material), su formulación y algoritmia se presentan de forma estrictamente incremental, por lo que el proceso de actualización nodal debe ser aplicado a todos los nodos de la partición del espacio luego de resolver cada problema incremental en el tiempo.

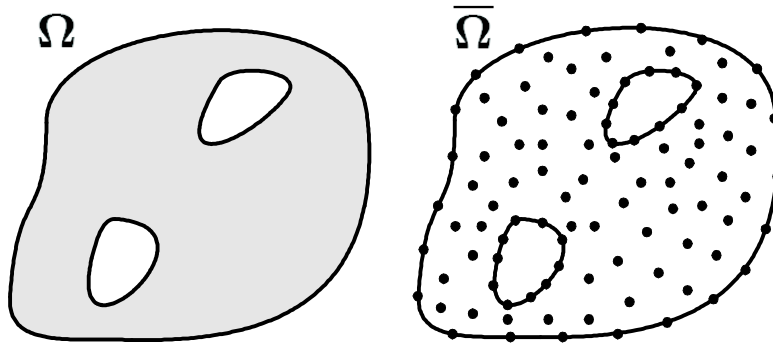


Figura 1.1: Esquema de un medio continuo con zonas interiores vacías representado en forma de continuo (infinito número de partículas) y en forma discreta (número finito de partículas)

1.2.3. Discretización espacial

En primer lugar, y con referencia a la representación discreta del dominio mediante un número finito de partículas, a continuación se introducen dos hipótesis de gran importancia que fueron asumidas para la construcción del método PFEM. Las mismas le aportan a la metodología un conjunto de propiedades que le son inherentes, y que a lo largo del trabajo, son numerosamente evocadas y detalladamente explicadas.

Hipótesis:

1. *Las partículas que describen al medio continuo son siempre las mismas a lo largo de todo el proceso de cálculo*
2. *El número de partículas que describen al medio continuo permanece constante durante el proceso de cálculo*

Para llevar a cabo la resolución de las ecuaciones propias del problema en el dominio de cálculo, la metodología PFEM utiliza particiones⁶ equivalentes a las utilizadas en el FEM. Estas, resultan de llevar a cabo un proceso de conexión⁷ de los nodos o partículas

⁶Se hace referencia a la partición de una región del espacio, que es dividida y cubierta completamente, sin superposiciones o solapamientos, por un número finito de formas geométricas simples y de igual clase (malla conforme).

⁷La conexión de las partículas o nodos implica la búsqueda de las partículas vecinas más próximas a cada una de ellas.

que describen al medio. Una vez definidos los subdominios de integración (particiones del dominio) el problema se resuelve en la dimensión temporal de manera incremental, y el resultado de cada uno de dichos incrementos es tomado como condición inicial del incremento posterior.

Ante ciertas fenomenologías y condiciones, la descripción lagrangiana de un medio, origina la aparición de grandes movimientos nodales y/o deformaciones en el dominio, lo que induce la aparición de grandes distorsiones en los subdominios de cálculo que pueden llegar a alterar la validez numérica y física de los resultados⁸. Con el fin de conservar la calidad de los mismos, y por ende el de las condiciones iniciales de cada problema incremental, como así también para no introducir errores ajenos a los ya presentes en el tipo de aproximación utilizada, la metodología exige que periódicamente se lleve a cabo la reconexión⁹ de las partículas.

La necesidad de hacer un uso intensivo de la herramienta de reconexión¹⁰ dentro de la algoritmia del PFEM, es una característica intrínseca y esencial de la metodología que presenta una serie de ventajas que serán citadas posteriormente. La información con que se cuenta para llevar a cabo cada proceso de reconexión de las partículas, es la coordenada, en cada una de las dimensiones espaciales, de cada uno de los puntos que conforman al conjunto de partículas. Un método capaz de buscar relaciones de proximidad y obtener conectividades a partir de una nube de puntos, en un período acotado de tiempo de cálculo, y que además garantiza la alta calidad de la partición resultante¹¹, es el que se basa en la generación de *diagramas de Voronoi* y *triangulaciones de Delaunay*, [37][14]. Sin embargo, lo que resulta de utilizar estas metodologías de forma no restringida, es un conjunto de conectividades que coinciden con la versión convexa¹² de la nube de puntos inicial o dato. Por esta razón, a pesar de contar con una descripción lagrangiana del medio, que a priori permite el seguimiento constante de cada uno de los contornos del mismo, se tiene que asociar al método de reconexión un algoritmo de búsqueda y reconocimiento de fronteras¹³. Dicho método debe ser capaz de recobrar las fronteras naturales que el medio poseía antes de la reconexión y encontrar, bajo unos ciertos criterios y tolerancias, los nuevos contornos que se producen durante la evolución del fenómeno descrito. La metodología adoptada a tal efecto, es el denominado método de alpha shape, [34][15][103].

El método de alpha shape explota algunas de las propiedades propias de las triangula-

⁸La calidad y validez de la interpolación estándar de elementos finitos es altamente dependiente del ángulo máximo que alcanzan los elementos de la discretización como consecuencia de las deformaciones del material. Esto ha sido demostrado para el caso de elementos triangulares en dos dimensiones en [7].

⁹Se entiende por reconexión a la búsqueda de nuevas conectividades nodales dependientes de las posiciones actualizadas de las partículas.

¹⁰Se entiende por herramienta de reconexión a un algoritmo numérico capaz de generar conectividades a partir de una nube o conjunto de puntos arbitrariamente distribuidos.

¹¹La calidad de una partición espacial, como la triangularización de una superficie en dos dimensiones, está íntimamente relacionada con el mínimo o máximo ángulo de cada uno de los triángulos que la forman. Los métodos de diagramas de Voronoi y triangulaciones de Delaunay garantizan, por sus propiedades constructivas, el máximo ángulo entre los lados de cada uno de los triángulos de la partición, para una determinada nube de puntos.

¹²Envoltorio convexo o convex hull: intersección de todas las regiones o semiespacios convexos que contienen a la totalidad de los puntos de la nube [4].

¹³Cuando se hace referencia a contornos o fronteras del medio, se incluyen en el mismo concepto a las superficies libres, las superficies interiores y cualquier otro contorno, nuevo o existente, del dominio tratado.

ciones de Delaunay, como son la inexistencia de esferas de Voronoï¹⁴ con puntos interiores y la no admisibilidad de triángulos formados por tres nodos colineales (triángulos de área nula). En líneas generales, este método considera que las conectividades pertenecientes a los contornos o fronteras del dominio están asociados a circunferencias de Voronoï de mayor tamaño que las pertenecientes a las conectividades interiores, ver [14]. Por tal razón, para reconocer y recuperar las fronteras, el algoritmo se limita a identificar y eliminar las conexiones nodales que fueron generadas por circunferencias de Voronoï cuyo radio cumple con la relación $r > \alpha h$, donde h es una medida característica del problema definida o calculada a tal fin (distancia media entre partículas vecinas) y el coeficiente α adopta valores dentro del intervalo $[0 - \infty]$, teniéndose conectividades nulas cuando $\alpha = 0$ y el convex-hull de la nube de puntos cuando $\alpha \rightarrow \infty$.

1.2.4. Discretización temporal

Como se mencionó anteriormente, el PFEM tiene su mayor rango y potencial de aplicación en problemas con elevadas no linealidades tanto geométricas como materiales. Por ende, su formulación y algoritmia, deben adaptarse a una estrategia incremental, y en consecuencia el PFEM puede ser clasificado como una metodología estrictamente incremental. En virtud de ello, el tiempo total durante el cual transcurre la fenomenología a simular numéricamente T , es discretizado en un determinado número de incrementos o pasos de tiempo nts , cada uno de tamaño Δt , de modo que $T = nts \cdot \Delta t$.

Cada incremento de tiempo se basa en que a partir del valor de un conjunto de propiedades que describen el estado del medio en el tiempo $t_n = n\Delta t$, se solucionan las ecuaciones del problema en el espacio, y con dicha solución se obtiene el valor actualizado de las mismas propiedades en el tiempo t_{n+1} .

El transporte de todas las propiedades del medio a través del espacio, se realiza de forma directa al desplazar las partículas desde la configuración de referencia hacia la configuración actualizada, por lo que el efecto convectivo es inherente al tipo de descripción que se está haciendo del medio y a la metodología utilizada. Dicho efecto puede ser observado en la figura 1.2, donde el citado transporte se produce entre los instantes de tiempo $(t, t + \Delta t^{(-)})$ y $(t + \Delta t^{(+)}, t + 2\Delta t)$.

En el caso general, cada problema incremental se lleva a cabo luego de una reconexión nodal, a partir de la cual se obtiene la geometría actualizada que será utilizada posteriormente como la nueva configuración inicial o de referencia para la resolución del próximo problema incremental, figura 1.2.

El transporte espacial de cada una de las propiedades está asociado al movimiento de las partículas, sin embargo, ciertas propiedades no se están expresadas a este nivel de forma permanente a lo largo del cálculo. En virtud de ello, y dado que cada etapa incremental del cálculo debe comenzar y terminar con todas las propiedades del medio expresadas a nivel de cada partícula, es necesario que la metodología tenga incorporado un procedimiento eficiente y consistente para obtener la expresión nodal de las propiedades

¹⁴Las esferas de Voronoï en \mathbb{R}^3 y circunferencias de Voronoï en \mathbb{R}^2 son las entidades geométricas que contienen sobre su contorno a los nodos (3 en el caso de triángulos en \mathbb{R}^2) que definen una conectividad nodal.

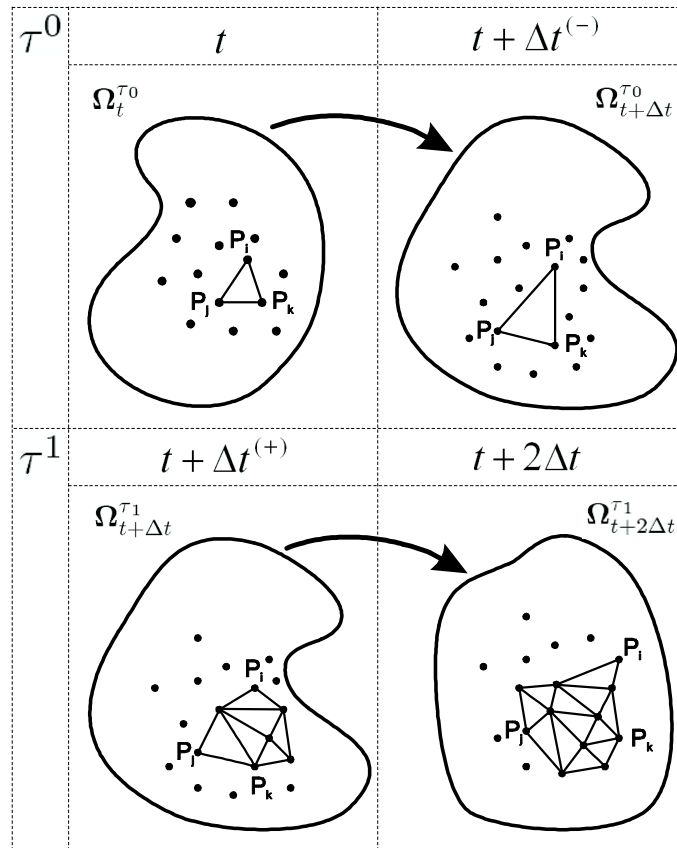


Figura 1.2: Esquema del proceso incremental: config. de referencia (t) y su deformada ($t + \Delta t^{(-)}$) con una conectividad inicial τ^0 y config. de referencia actualizada ($t + \Delta t^{(+)}$) y su deformada ($t + 2\Delta t$) con una nueva conectividad τ^1

situadas normalmente en los puntos de análisis^{15 16}. La metodología PFEM, al valerse de las hipótesis anteriormente expuestas, permite que el proceso de extrapolación nodal de las propiedades se realice de forma incremental, minimizando de esta forma, la introducción de fenómenos de difusión numérica propios de este tipo de procedimientos, como lo explican en detalle las referencias [75] y [76].

Por lo dicho hasta este punto, la metodología PFEM podría ser considerada coincidente con la clásica metodología de lagrangeano actualizado, descrita en [9]. Sin embargo, las diferencias fundamentales son que en el PFEM:

- Las particiones o conectividades, en el caso más general, no son mantenidas de forma invariable a lo largo del proceso de cálculo, sino que son recalculadas luego de llevar a cabo la actualización de las posiciones nodales después de resolver cada problema incremental. La reconexión nodal puede observarse en la figura 1.2, donde

¹⁵Los puntos de análisis hacen referencia a los típicos sampling points o puntos de gauss utilizados en el FEM para llevar a cabo el cálculo de deformaciones, tensiones, etc.

¹⁶El proceso de llevar el valor de una propiedad, a partir su valor expresado en puntos de gauss hacia su equivalente expresado en nodos, se denomina generalmente suavizado (smoothing) o extrapolación.

se pasa de una conectividad τ^0 con validez en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t^{(-)})$ a otra conectividad τ^1 con vigencia en el intervalo de tiempo $(t + \Delta t^{(+)}, t + 2\Delta t)$.

- Los subdominios de integración son definidos en la configuración de referencia, por lo tanto las derivadas presentes en la forma fuerte del problema están referidas a las coordenadas materiales.

1.2.5. Fenómenos de interacción

Los fenómenos de interacción entre diferentes medios o diferentes partes de un mismo medio, aparecen habitualmente en un elevado número de procesos físicos pertenecientes a diferentes ramas de la ciencia e ingeniería. Entre los más importantes pueden citarse los de contacto y fricción entre superficies, flujo de calor entre cuerpos, etc. La metodología PFEM, haciendo uso de sus hipótesis de base y del hecho de que es posible conocer en cada instante de tiempo la posición y la evolución de los diferentes contornos, permite abordar este tipo de situaciones de forma sumamente simple e intuitiva.

El método denominado ACIM¹⁷ [70], que surge de explotar la presencia a nivel nodal de la información que describe el estado del medio, permite imponer el contacto y la fricción entre diferentes cuerpos por medio de una interfaz de contacto¹⁸, ver la figura 1.3. Dicha interfaz de contacto se obtiene por medio de la utilización de la herramienta de reconexión nodal citada previamente y es generada entre los nodos pertenecientes a los contornos de los cuerpos involucrados en el fenómeno. El criterio utilizado para definir la existencia o no de conexiones nodales es el de proximidad geométrica (por ejemplo: la menor distancia geométrica medida por la norma euclídea). En general, se generan tantas interfaces de contacto como pares de cuerpos se encuentren implicados en el problema, ya que cada interfaz relaciona contornos de medios diferentes (caso de interacción simple), sin embargo la metodología permite además un tratamiento análogo entre zonas del contorno del mismo medio (caso de interacción entre diferentes partes de un mismo cuerpo).

Una vez generada una interfaz de contacto su existencia permite conocer y predecir, sin necesidad de realizar otras búsquedas geométricas, las zonas de contacto potencial, o ya activado, entre cuerpos, figura 1.3c). En cada una de las conectividades de cada interfaz de contacto se lleva a cabo la detección de la interacción o interferencia entre cuerpos mediante la definición de una medida de deformación conveniente, y a posteriori la imposición de fuerzas de interacción tendientes a cumplir con la condición de no penetración entre diferentes cuerpos (condición de contacto y/o fricción). El mismo concepto utilizado por esta metodología permite una generalización trivial ante la existencia de procesos físicos que pudieran involucrar otro tipo de fuerzas o fenómenos de interacción posible (flujos térmicos, electromagnéticos, etc).

Cabe destacar que, de acuerdo con el esquema incremental propio del PFEM y ante la certeza de que la actualización de las posiciones nodales modifica las condiciones de interacción, las conectividades o interfaces de contacto deben ser también actualizadas o recalculadas en cada incremento de tiempo. De esta forma, es posible conocer en cada

¹⁷ACIM: Anticipating Contact Interface Method.

¹⁸Se define como interfaz de contacto a una conectividad creada entre los contornos de o de los medios protagonistas del fenómeno de interacción.

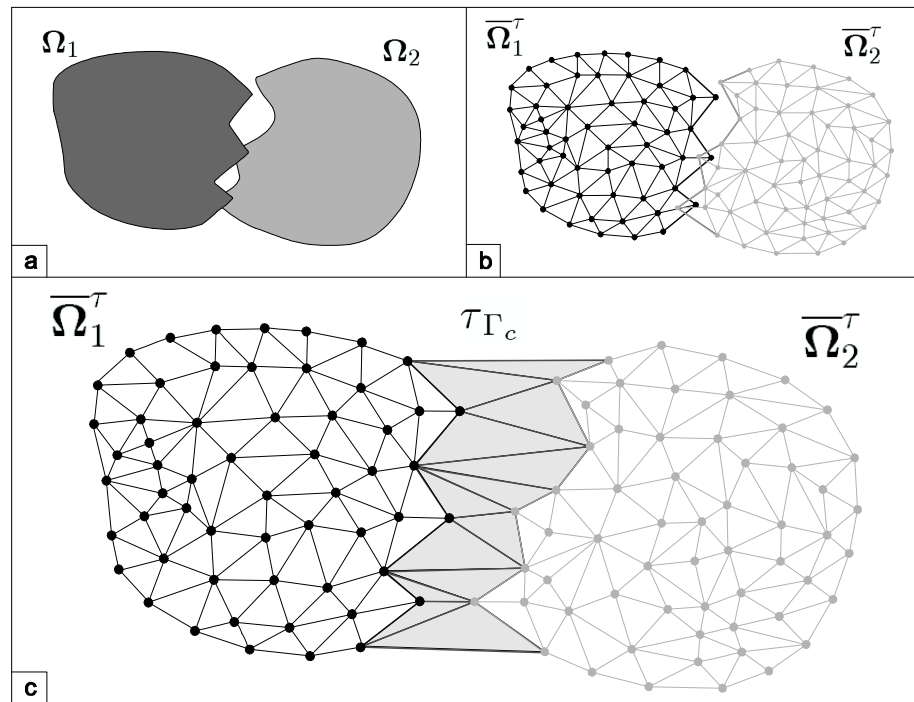


Figura 1.3: Interacción entre dos cuerpos. a) representación continua, b) representación discreta, b) interfaz de contacto en la zona de interacción

instante de tiempo la evolución de las zonas de contacto, la aparición de nuevas zonas de interacción (potenciales o activas), la desactivación de zonas que ya se encontraban interactuando entre sí, etc.

Como resultado de esta operatoria, y en virtud de las hipótesis asumidas por el PFEM, se logra de forma permanente (dependiendo del número de incrementos definidos para el cálculo), conocer la información completa acerca de la evolución de las zonas de interacción, de las velocidades de aproximación o alejamiento entre cuerpos, etc. e imponer las condiciones de impenetrabilidad y fricción entre cuerpos.

1.2.6. Algoritmo de cálculo para el PFEM

Debido a las características y propiedades expuestas anteriormente acerca del PFEM, la resolución numérica de un problema general se considera bajo la utilización de un esquema iterativo, como el ampliamente utilizado método de Newton-Raphson (NR) [9]. Dentro de cada uno de los incrementos en los que se divide el tiempo total del proceso se define un nuevo problema no lineal que puede ser resuelto por dicho esquema. La metodología PFEM permite ser condensada en un algoritmo incremental que incluye todos los aspectos y características antes explicados y que desde el punto de vista de la programación, puede ser entendido como un módulo formado por un conjunto de otros submódulos con funciones específicas con el potencial de ser incluidos dentro de un código de elementos finitos estándar ya existente. Teniendo en cuenta este concepto, y con un enfoque cualitativo, el algoritmo PFEM incremental comprende los pasos que se enumeran

1. Discretización del dominio en un número n_p de partículas
2. Inicio de un problema incremental (nuevo paso de tiempo - Δt)
3. Generación de las conectividades nodales (discretización en triángulos en 2D)
4. Recuperación y reconocimiento de las fronteras (método de alpha shape)
5. Generación de las conectividades de interacción (interfaz de contacto)
6. Interpolación de las propiedades (desde los nodos hacia los puntos de gauss)
7. Resolución del problema incremental (método iterativo - NR)
8. Transferencia de las propiedades hacia los nodos (suavizado)
9. Actualización de posiciones nodales (transporte convectivo de propiedades)
10. Regreso al paso 2 hasta completar el tiempo total T del proceso

Cuadro 1.1: Algoritmo general de cálculo para el PFEM

en el cuadro 1.1.

De forma gráfica, en la figura 1.4, se presentan de forma esquemática los principales pasos seguidos por el algoritmo propio de la metodología PFEM durante un incremento típico. En ella se pueden observar:

- La representación de dos cuerpos en el espacio, Ω_1 y Ω_2 en a)
- Su discretización en un número finito de partículas, $\bar{\Omega}_1$ y $\bar{\Omega}_2$ en b)
- La creación de las respectivas conectividades nodales para cada uno de los cuerpos, $\bar{\Omega}_1^{\tau_{ch}}$ y $\bar{\Omega}_2^{\tau_{ch}}$ en forma de convex-hull en c)
- Las mismas conectividades luego de haber sido recuperadas y reconocidas las fronteras de los cuerpos, $\bar{\Omega}_1^{\tau}$ y $\bar{\Omega}_2^{\tau}$ en d)
- La generación de las conectividades de contacto (interfaz de contacto), τ_{Γ_c} , donde $\Gamma_c = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ es la zona de contorno de contacto entre ambos cuerpos (intersección de contornos o contorno común entre cuerpos) en e)
- El proceso de suavizado nodal de las propiedades (desde los puntos de gauss hacia los nodos) en f), con la conectividad τ_1 en t .
- La actualización de las posiciones nodales con el inherente transporte convectivo de las propiedades y la interpolación de las mismas hacia los nuevos puntos de gauss (los que por lo general se conocen luego de llevar a cabo la generación de una nueva conectividad nodal), con la conectividad τ_2 en $t + \Delta t$. Cabe destacar que los procesos pertenecientes al último esquema de la figura 1.4f), se aplican sobre un determinado patch¹⁹ caracterizado por las conectividades más próximas al nodo de color gris claro, cuya evolución se sigue en la figura.

¹⁹La interpretación que se hace de patch es la del conjunto de conectividades asociadas a un determinado nodo, evidentemente éstos se definen sobre los nodos vecinos o más próximos al nodo considerado.

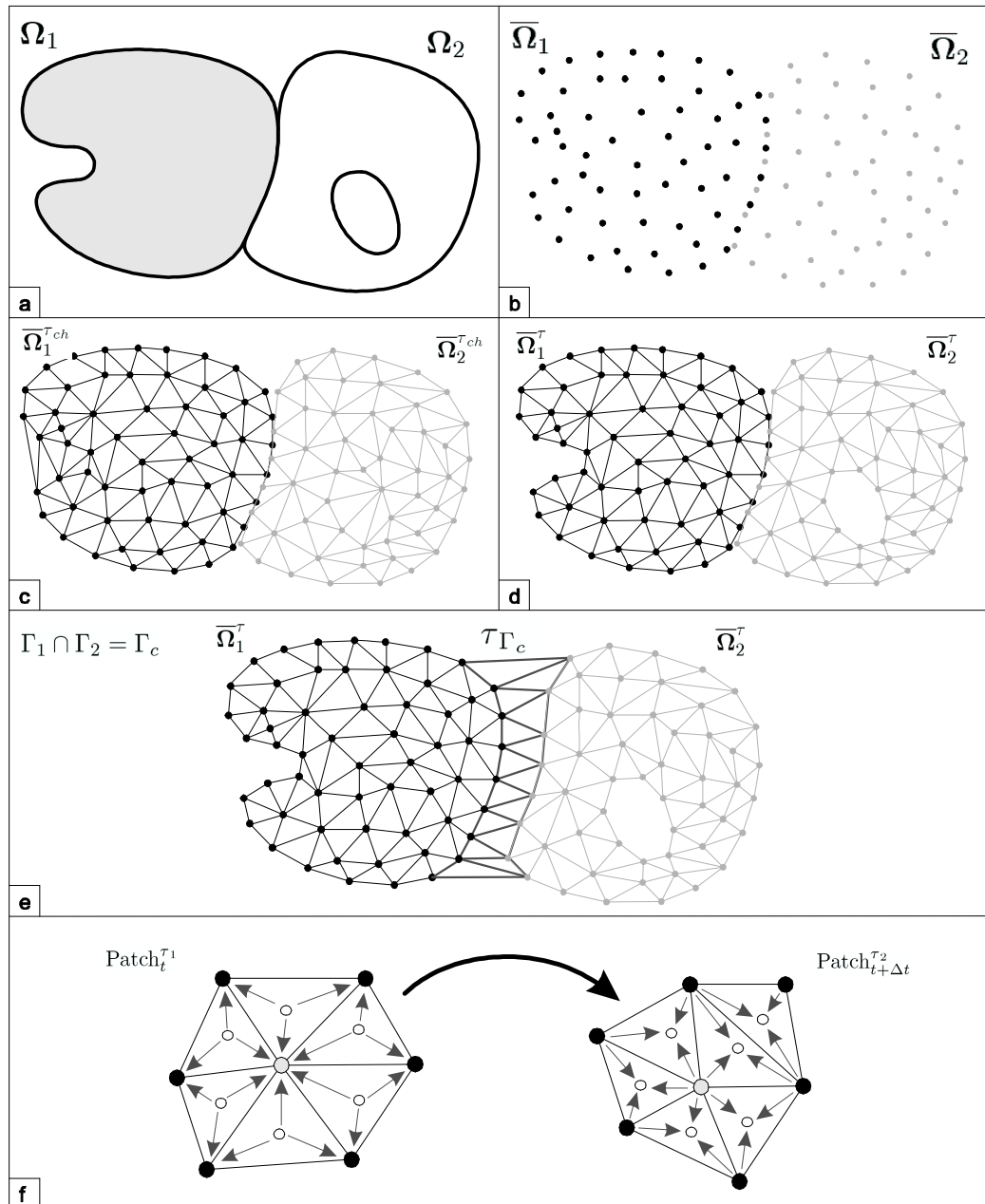


Figura 1.4: Esquema de los pasos seguidos por el método PFEM durante un incremento de tiempo y dentro de un esquema iterativo

1.3. Recapitulación

En el capítulo se presentó con un enfoque general, una introducción a los principios generales y a las características fundamentales del método de los elementos finitos de partículas PFEM. Los aspectos más destacables a los que se hizo referencia son:

- El medio continuo, que cuenta con un número infinito de partículas, es aproximado y descrito de forma discreta con un número finito de puntos.
- Tanto el número como la identidad de las partículas seleccionadas permanece invariable a lo largo de todo el proceso.
- Cada una de las partículas contiene la información acerca de las propiedades que describen al fenómeno.
- El PFEM se encuentra formulado de forma incremental, y en cada uno de los incrementos se resuelve un problema que en general puede ser no lineal (esto implica la adopción de una estrategia iterativa).
- La descripción que se hace del proceso físico bajo análisis es lagrangiana. Esto promueve la aparición de grandes distorsiones y deformaciones en los casos donde se consideran movimientos importantes de las partículas, a la vez que evita los problemas asociados a los términos convectivos de las formulaciones que los contienen.
- La integración espacial de las ecuaciones propias del problema se realiza sobre una partición de elementos que surge de obtener la conectividad de las partículas del medio.
- Para evitar problemas numéricos relacionados con la precisión y la calidad de los resultados incrementales obtenidos, se lleva a cabo la reconexión frecuente (incremental) de las partículas.
- La reconexión de las partículas se realiza por medio de la metodología relacionada con la generación de diagramas de Voronoï y triangulaciones de Delaunay. Adicionalmente, la recuperación de las fronteras del medio se logra al utilizar el método de alpha-shape de forma complementaria a los algoritmos generadores de conectividades.
- El transporte de las propiedades se realiza como consecuencia del movimiento de las partículas al actualizar incrementalmente sus posiciones.
- Los fenómenos de interacción entre cuerpos (contacto y fricción) son resueltos, aprovechando las ventajas inherentes a la localización de las propiedades del medio en las partículas, por medio de una interfaz de contacto. Con ésta se realiza la búsqueda de las zonas de contacto (activo o potencial) y se impone un sistema de fuerzas tal que garantiza la no penetración (contacto) y la fricción entre cuerpos.

Capítulo 2

PFEM - Formulaciones y Algoritmos

2.1. Introducción

En este capítulo se desarrollan las formulaciones y los algoritmos que fueron descritos de manera cualitativa en el capítulo precedente. Para ello, se establecen en primer lugar las formulaciones fuerte y débil del problema general considerado, y luego se describe la estrategia de discretización que se aplica en la implementación del método PFEM. Más tarde se presentan los algoritmos referidos a la discretización de la dimensión espacial, y finalmente se expone la formulación utilizada para resolver los problemas de transporte y transferencia de la información básica del problema entre diferentes conectividades nodales. Se incluye además un anexo donde se exponen en detalle las formulaciones y los algoritmos que fueron implementados para llevar a cabo la resolución temporal del problema.

2.2. El problema de valores de contorno y condiciones iniciales

2.2.1. Introducción

El problema mecánico general, que incluye tanto los efectos dinámicos como los derivados del contacto, se enuncia a partir del análisis de una situación física en la que dos cuerpos interactúan entre sí. Sobre los mismos se establecen además un conjunto de condiciones de contorno e iniciales que terminan por plantear completamente el problema.

Formalmente, se definen dos cuerpos Ω^1 y $\Omega^2 \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) en la configuración material, siendo $\Gamma^1 = \partial\Omega^1$ y $\Gamma^2 = \partial\Omega^2$ sus respectivos contornos, de forma que $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2$ y $\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2$ representan la unión de ambos cuerpos en un dominio y contorno únicos, ver la figura 2.1. Por otra parte se definen, un conjunto de subzonas pertenecientes al contorno de cada uno de los cuerpos que expresan las típicas condiciones de contorno presentes en un problema general de sólidos, Γ_u : condición de Dirichlet, Γ_σ : condición de Neumann y Γ_C : condición de contacto, de forma tal que se cumpla que: $\Gamma^i = \Gamma_\sigma^i \cup \Gamma_u^i \cup \Gamma_C^i$, con $\Gamma_\sigma^i \cap \Gamma_u^i = \emptyset$, $\Gamma_\sigma^i \cap \Gamma_C^i = \emptyset$, $\Gamma_u^i \cap \Gamma_C^i = \emptyset$ y $\Gamma_C = \Gamma_C^1 \cup \Gamma_C^2$, donde el superíndice $i = 1, 2$ indica el cuerpo a considerar. Adicionalmente, se definen los campos de desplazamientos de los cuerpos como $\mathbf{U}^1(\mathbf{X}, t)$ y $\mathbf{U}^2(\mathbf{X}, t)$ respectivamente, con $\mathbf{X} \in \Omega$ en la configuración material y $\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{X})$ en la configuración deformada (donde $\varphi_t(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}, t)$ es una función que describe el movimiento de cada uno de los puntos $\mathbf{X} \in \Omega$ desde la configuración

material hasta la espacial), mientras que los vectores unitarios normales¹ $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{X})$ con $\mathbf{X} \in \Gamma$, están situados en el contorno de cada uno de los cuerpos con una dirección que apunta hacia el exterior de los mismos, ver la figura 2.1. Por su parte, los vectores tangentes y normales se expresan en la configuración deformada como: $\hat{\mathbf{n}}(\varphi_t(\mathbf{X}))$ y $\hat{\mathbf{t}}(\varphi_t(\mathbf{X}))$.

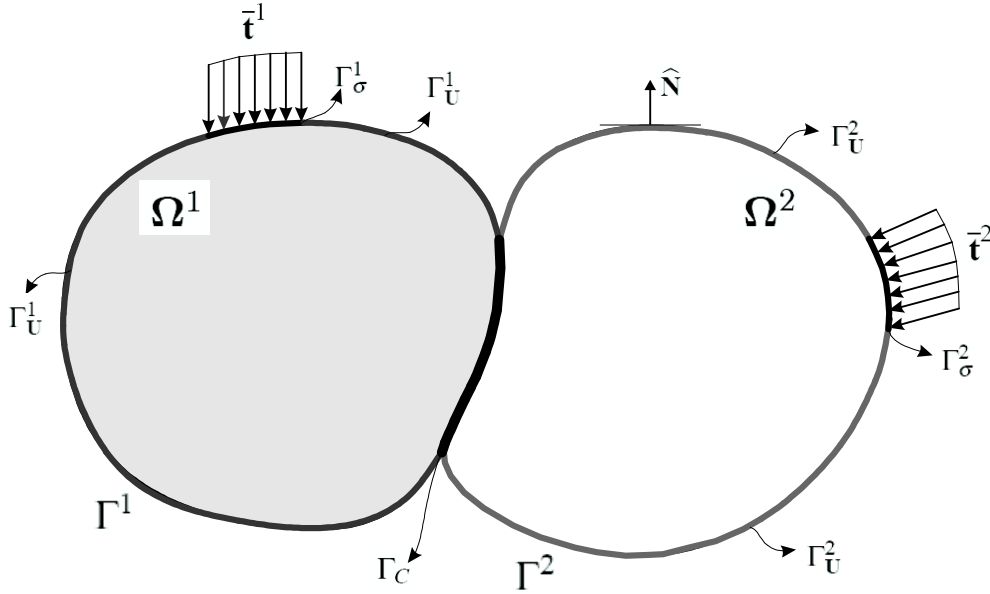


Figura 2.1: Esquema de un problema mecánico general de evolución en el tiempo con interacción entre cuerpos

2.2.2. Forma fuerte del problema mecánico general

El problema mecánico que incluye el contacto puede ser presentado bajo la asunción de que ambos cuerpos son deformables. La ecuación de conservación del momento lineal, en la configuración de referencia, establece que:

$$\text{Div } \mathbf{P}^i + \rho \mathbf{B}^i = \rho \mathbf{A}^i \quad \text{en } \Omega^i \quad (2.1)$$

donde \mathbf{P}^i es el primer tensor de Piola Kirchhoff que describe el estado tensional en un determinado punto \mathbf{X} situado en el interior del dominio Ω^i , \mathbf{B}^i es el vector de fuerzas de volumen y \mathbf{A}^i es el vector de aceleraciones actuantes sobre el cuerpo Ω^i , todos referidos a la configuración material o de referencia. Luego se definen las condiciones de frontera del problema de condiciones de contorno:

$$\mathbf{P}^i \cdot \hat{\mathbf{N}}^i = \bar{\mathbf{T}}^i \quad \text{en } \Gamma_\sigma^i \quad (2.2)$$

$$\mathbf{U}^i = \bar{\mathbf{U}}^i \quad \text{en } \Gamma_u^i \quad (2.3)$$

¹Los vectores normales unitarios asociados a una superficie deben cumplir con la condición: $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{T}}_1 \times \hat{\mathbf{T}}_2$, donde $\hat{\mathbf{T}}_1$ y $\hat{\mathbf{T}}_2$ son los vectores unitarios tangentes a la superficie con direcciones ortogonales entre sí, de lo que resulta una terna dextrógira de vectores unitarios que definen un sistema de referencia local.

donde Γ_σ^i es la subzona del contorno del cuerpo i donde las tracciones $\bar{\mathbf{T}}^i$ son conocidas y Γ_u^i es la subzona donde los desplazamientos $\bar{\mathbf{U}}^i$ son conocidos. De forma complementaria a las anteriores condiciones de contorno, y como requisito necesario para plantear completamente el problema dinámico, se establecen un conjunto de condiciones iniciales:

$$\mathbf{U}^i(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{U}_{t_0}^i(\mathbf{X}) ; \quad \mathbf{V}^i(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{V}_{t_0}^i(\mathbf{X}) \quad (2.4)$$

donde \mathbf{U}_t^i y \mathbf{V}_t^i representan los campos de desplazamientos y velocidades del cuerpo i en el instante de tiempo t . Adicionalmente, el problema de contacto exige la imposición de un conjunto de restricciones destinadas a garantizar el cumplimiento de la impenetrabilidad entre cuerpos bajo interacción mecánica, de forma que:

$$g_N^i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (2.5a)$$

$$P_N^i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (2.5b)$$

$$P_N^i(\mathbf{x}) \cdot g_N^i(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.5c)$$

donde $g_N^i(\varphi(\mathbf{X}, t))$ es la llamada función distancia normal con signo o gap, que indica el grado de separación o penetración entre cuerpos, y se calcula en cada momento en la configuración y tiempo actualizados. El punto de referencia desde el cual adquiere sentido la interpretación de la función gap, depende exclusivamente del cuerpo considerado (i) y del vector normal $\hat{\mathbf{n}}(\varphi(\mathbf{X}, t))$ en el punto de análisis \mathbf{X} . Por su parte, $P_N^i(\mathbf{x})$ es la tracción normal² asociada al fenómeno de contacto en el mismo cuerpo y punto donde se mide la función $g_N^i(\mathbf{x})$. La primera condición, $g_N^i(\mathbf{x}) \geq 0$, implica que la distancia entre los cuerpos sea positiva, es decir que no exista penetración o interferencia entre los cuerpos, la segunda condición, $P_N^i(\mathbf{x}) \leq 0$, establece que la tracción que resulta del contacto sea de compresión (valor negativo teniendo en cuenta la convención de signos habitual en la mecánica de medios continuos), y la tercera condición (complementaria), $P_N^i(\mathbf{x}) \cdot g_N^i(\mathbf{x}) = 0$, anula cualquier efecto de adherencia al separarse los cuerpos, ya que si hay separación o despegue de los cuerpos $g_N^i(\mathbf{x}) > 0$, se exige que $P_N^i(\mathbf{x}) = 0$. Si $g_N^i(\mathbf{x}) = 0$ se tiene una condición de contacto activo con $P_N^i(\mathbf{x}) < 0$, lo cual tiende a evitar la penetración de los cuerpos y logra imponer la condición de contacto. Este conjunto de condiciones son conocidas como condiciones de Hertz-Signorini-Moreau para el problema de contacto sin fricción (problema clásico de Signorini) [101], o como condiciones de Karush-Kuhn-Tucker de optimalidad³ en un contexto más general. Al igual que en el caso del problema de plasticidad, una condición extra, denominada condición de persistencia, que establece que la velocidad de separación \dot{g}_N entre las dos superficies no es nula sólo cuando la tracción de contacto desaparece (contacto no activo), puede ser añadida al problema de contacto antes expuesto. Tal condición se expresa explícitamente como:

$$P_N^i(\mathbf{x}) \cdot \dot{g}_N^i(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.6)$$

donde $\dot{g}_N^i(\mathbf{x})$ representa la tasa de variación o velocidad de cambio (rate) de la función gap.

²Se refiere a la componente normal del vector de tracciones, de modo que: $P_N := -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}}$

³Estas mismas condiciones son utilizadas en el contexto de la plasticidad, ya que en ambos casos (contacto y plasticidad), el problema admite una similitud mediante su expresión en un problema análogo de optimización [64].

En caso de que no se tengan en cuenta los fenómenos de fricción, se debe considerar además la condición de tensiones tangenciales de contacto nulas, definida como: $\mathbf{P}_T^i(\mathbf{x}) = 0$.

2.2.3. Forma débil del problema mecánico

A fin de obtener una forma variacional o débil del problema enunciado en el apartado anterior, que permita establecer la versión discreta del problema y su posterior implementación numérica, se continúa el proceso de obtención del *principio de los trabajos virtuales* (PTV). Para ello, se definen en primer lugar los siguientes elementos:

Sea ν^i el conjunto de desplazamientos admisibles asociados al cuerpo i , definidos como:

$$\nu^i = \left\{ \boldsymbol{\eta}^i: \Omega^i \longrightarrow \mathbb{R}^N \mid \boldsymbol{\eta}^i|_{\Gamma_u^i} = 0 \right\} \quad N : 2, 3 \quad (2.7)$$

Sea κ^i un conjunto de desplazamientos admisibles asociados al cuerpo i que satisfacen las restricciones de contacto anteriormente definidas, de la forma:

$$\kappa^i = \left\{ \boldsymbol{\eta}^i \in \nu^i \mid g_N^i(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})) \geq 0 \forall \mathbf{X} \in \Gamma_C^i \right\} \quad (2.8)$$

donde $\boldsymbol{\varphi}^i: \Omega^i \longrightarrow \mathbb{R}^N$ con $N : 2, 3$ representa al movimiento admisible definido a partir del desplazamiento $\boldsymbol{\eta}^i$, que viene dado de forma general por⁴: $\boldsymbol{\varphi}^i(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \boldsymbol{\eta}^i(\mathbf{X})$.

El proceso de obtención del PTV se inicia al multiplicar la ecuación 2.1 por el conjunto de desplazamientos $\boldsymbol{\eta}^i \in \kappa^i$, cuyo resultado se integra sobre el dominio Ω^i , de lo que resulta:

$$\int_{\Omega^i} [\text{Div } \mathbf{P}^i] \cdot \boldsymbol{\eta}^i dV + \int_{\Omega^i} \rho \mathbf{B}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i dV - \int_{\Omega^i} \rho \mathbf{A}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i dV = 0 \quad (2.9)$$

luego, aplicando el teorema de la divergencia de Gauss (integración por partes) sobre el primer término de la ecuación, se obtiene:

$$\int_{\Omega^i} \mathbf{P}^i : \text{Grad} [\boldsymbol{\eta}^i] dV + \int_{\Omega^i} \rho \mathbf{B}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i dV - \int_{\Omega^i} \rho \mathbf{A}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i dV - \int_{\Gamma^i} \boldsymbol{\eta}^i \cdot \mathbf{T}^i \cdot \widehat{\mathbf{N}}^i d\Gamma = 0 \quad (2.10)$$

donde $' \cdot '$ hace referencia al producto interno entre tensores de 2^{do} orden. Luego, teniendo en cuenta la condición de contorno de Neumann, ec. 2.2 y la definición de los desplazamientos admisibles sobre el contorno de Dirichlet ec. 2.7, el contorno al que se hace referencia en el cuarto término de la ecuación 2.10 puede expresarse como:

$$\int_{\Gamma^i} \boldsymbol{\eta}^i \cdot \mathbf{T}^i \cdot \widehat{\mathbf{N}}^i d\Gamma = \int_{\Gamma^i} \overline{\mathbf{T}}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i d\Gamma + \int_{\Gamma_C^i} \boldsymbol{\eta}^i \cdot \mathbf{P}^i \cdot \widehat{\mathbf{N}}^i d\Gamma \quad (2.11)$$

⁴A partir de la expresión $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{X} + \boldsymbol{\eta}$, se obtiene $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_\epsilon = \boldsymbol{\varphi} + \epsilon \boldsymbol{\eta}$, que puede ser interpretada como la derivada o variación de Gateaux de $\boldsymbol{\varphi}$ en la dirección $\boldsymbol{\eta}$, donde ϵ es el parámetro de perturbación. En el caso general $\boldsymbol{\eta} = \delta \boldsymbol{\varphi}$ se considera como una perturbación arbitraria.

donde Γ_C representa la porción del contorno donde pueden producirse interacciones de contacto entre los cuerpos. Cabe destacar que en los puntos $\mathbf{X} \in \Gamma_C^i$, que no se encuentran bajo la condición de contacto activo, el producto $\boldsymbol{\eta}^i \cdot \mathbf{P}^i \cdot \widehat{\mathbf{N}}^i$ es nulo, ya que si $g_N^i(\mathbf{x}) < 0$, por la restricción 2.5c, se tiene que $\mathbf{P}^i \cdot \widehat{\mathbf{N}}^i = P_N^i = 0$. Sin embargo, en caso de que el contacto se encuentre activo en el punto de interacción, se cumple que $g_N^i(\mathbf{x}) = 0$, y en consecuencia $\mathbf{P}^i \cdot \widehat{\mathbf{N}}^i = P_N^i < 0$.

El problema resultante, expresado en su forma débil, es el siguiente:

$$G^i(\boldsymbol{\varphi}^i, \boldsymbol{\eta}^i) + G_C^i(\boldsymbol{\varphi}^i, \boldsymbol{\eta}^i) = 0 \quad (2.12)$$

donde $G^i(\boldsymbol{\varphi}^i, \boldsymbol{\eta}^i)$ y $G_C^i(\boldsymbol{\varphi}^i, \boldsymbol{\eta}^i)$ son funcionales asociados al problema mecánico general (correspondiente a los dos cuerpos por separado) y al problema específico de contacto, de acuerdo con:

$$G^i(\boldsymbol{\varphi}^i, \boldsymbol{\eta}^i) = \int_{\Omega^i} \mathbf{P}^i : \text{Grad} [\boldsymbol{\eta}^i] dV + \int_{\Omega^i} \rho \mathbf{B}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i dV - \int_{\Omega^i} \rho \mathbf{A}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i dV - \int_{\Gamma^i} \overline{\mathbf{T}}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i d\Gamma \quad (2.13)$$

$$G_C^i(\boldsymbol{\varphi}^i, \boldsymbol{\eta}^i) = - \int_{\Gamma_C^i} \boldsymbol{\eta}^i \cdot \mathbf{P}^i \cdot \widehat{\mathbf{N}}^i d\Gamma \quad (2.14)$$

donde $\boldsymbol{\varphi}^i, \boldsymbol{\eta}^i$ han sido elegidas de forma independiente para cada uno de los cuerpos involucrados.

El problema enunciado puede expresarse de forma genérica como: encontrar $\mathbf{U}^i \in \kappa^i$ y las \mathbf{P}_C^i con $\mathbf{U}^i(\mathbf{X}^i) = \boldsymbol{\varphi}^i(\mathbf{X}^i) - \mathbf{X}^i$ y $\mathbf{P}^i = \mathbb{F}^i(\boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{U}^i))$, de forma tal que se cumpla la ecuación 2.12 (ver la ref. [9]), donde $\mathbb{F}^i(\boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{U}^i))$ es una función tensorial (ecuación constitutiva) que relaciona las tensiones con los desplazamientos en un determinado punto $\mathbf{X}^i \in \Omega^i$ por medio de una determinada descripción cinemática (medida de las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}^i$, etc.) y κ^i es el conjunto de desplazamientos admisibles que cumplen con la restricción de contacto, tal como se indica en la ecuación 2.8.

Observaciones

- *El acoplamiento mecánico de los cuerpos bajo estudio, lo que en otras palabras implica considerar el balance de momento de forma unificada para ambos cuerpos, requiere que exista el equilibrio de tracciones sobre el contorno común resultante del fenómeno de contacto. Dicha condición puede establecerse intuitivamente si se considera una porción diferencial del contorno de contacto en la configuración actual $d\Gamma^i$, donde actúan un par de fuerzas de contacto antagonistas⁵ de forma que:*

$$d\mathbf{f}_c^1(\overline{\mathbf{x}}^1) = -d\mathbf{f}_c^2(\overline{\mathbf{x}}^2) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{P}_{C,\overline{\mathbf{x}}^1}^1 \widehat{\mathbf{N}}^1 d\Gamma^1 = -\mathbf{P}_{C,\overline{\mathbf{x}}^2}^2 \widehat{\mathbf{N}}^2 d\Gamma^2 \quad (2.16)$$

donde $d\mathbf{f}_c^1$ es el diferencial de fuerza de contacto asociado al punto $\overline{\mathbf{x}}^1 = \boldsymbol{\varphi}(\overline{\mathbf{X}}^1)$, con $\overline{\mathbf{X}}^1 \in \Gamma^1$, y $d\mathbf{f}_c^2$ es lo propio para el cuerpo 2.

⁵Esta condición es equivalente al principio de acción y reacción, al imponer la conservación del momento lineal a través de la interfaz [85].

Como consecuencia de esto, la ecuación de momento lineal acoplada, expresada en forma débil puede escribirse como:

$$\sum_i [G^i(\boldsymbol{\varphi}^i, \boldsymbol{\eta}^i) + G_C^i(\boldsymbol{\varphi}^i, \boldsymbol{\eta}^i)] = 0 \quad (2.17)$$

- La forma débil del problema basada en desplazamientos virtuales admisibles (PTV), ecuaciones 2.13 y 2.14, ha sido construida sobre la base de conocer a priori la región de la frontera generalizada implicada en el problema de contacto Γ_C , lo que en la realidad forma parte de las incógnitas a encontrar.
- Este formato del problema permite la utilización no restrictiva de modelos constitutivos para describir el comportamiento de los cuerpos, incluso permite la utilización de leyes de fricción convenientes para la correcta descripción del fenómeno. Como contrapartida, esta forma general del problema no permite garantizar teóricamente la existencia y unicidad de la solución, sin embargo se puede asumir que la existencia de la solución está asegurada por la naturaleza física de los problemas estudiados [105].
- El problema variacional enunciado en la ecuación 2.17, admite una solución proveniente de la minimización de un funcional generalizado, sin embargo esta propiedad se encuentra restringida al problema de contacto sin fricción (problema de Signorini). Esto se debe a que el problema que incluye la fricción contiene intrínsecamente en su formulación la dependencia de las tracciones normales (resultantes del contacto puro), mientras que las mismas no dependen de las tracciones tangenciales (resultantes de los fenómenos de fricción). En consecuencia, la inclusión de la fricción con esta clara asimetría asociada, rompe con la simetría requerida para la solución del problema por medio de la minimización de un funcional, ya que el operador variacional (naturalmente simétrico) exige la simetría del problema. Un desarrollo exhaustivo de estos aspectos del problema de contacto pueden hallarse en la referencia [53].
- El problema general hasta aquí enunciado (que incluye dos cuerpos bajo interacción), es compatible y se reduce al que involucra a un solo cuerpo si se establece la condición de que el superíndice sea $i = 1$ ó $i = 2$.

2.2.4. Discretización por elementos finitos

La discretización espacial del problema enunciado se lleva a cabo, dentro del entorno del PFEM, siguiendo la metodología estándar [44], asociando a cada una de las conectividades nodales con el concepto de elemento finito⁶. A continuación se presentan los aspectos básicos de la forma discreta del problema mecánico general, cuyo punto de partida en el continuo es la ecuación del Principio de los Trabajos Virtuales PTV, que se expresa como:

$$\int_{\Omega} \mathbf{P} : \text{Grad} [\boldsymbol{\eta}] \, dV + \int_{\Omega} \rho \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV - \int_{\Omega} \rho \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dV - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma = 0 \quad (2.18)$$

⁶La discretización correspondiente al problema específico de contacto, referido a la ec. 2.14, se aborda en detalle en el capítulo 3.

la cual se puede expresar de forma condensada por medio de la ecuación semidiscreta de movimiento:

$$\mathbf{F}^{res}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}^{int}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}^{ext}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}^{ine}(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

Sea $\Omega^h = \cup_{e=1}^{n_e} \Omega^e$ una hipotética discretización del dominio Ω , donde n_e es el número de elementos o conectividades nodales y n_p es el número de nodos o partículas que lo componen y que están asociados a dicha discretización, cada componente espacial del campo de desplazamientos $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ se puede aproximar por medio de la función de interpolación del tipo:

$$U_i(\mathbf{X}) \approx U_i^h(\mathbf{X}) = \sum_{m=1}^{n_p} N_m(\mathbf{X}) \hat{u}_{im} \quad i : 1 \dots n_d \quad (2.20)$$

donde n_d es el número de dimensiones espaciales del problema.

El conjunto de funciones de base del espacio utilizado para interpolar el campo de desplazamientos es: $\{N_m, m : 1 \dots n_d\}$, mientras que el conjunto $\{\hat{u}_{im}\}$ coincide con los valores que toma la variable en cada uno de los nodos.

Por otra parte, los desplazamientos virtuales $\boldsymbol{\eta}$, que forman parte de la ecuación 2.18, se interpolan por medio de una expresión que coincide con la definida para el caso del campo de desplazamientos; lo cual obedece al comúnmente utilizado método de Galerkin [106]. La discretización de $\boldsymbol{\eta}$ proyecta el espacio original $\boldsymbol{\nu}$ de dimensión infinita sobre un espacio afín de dimensión finita $\boldsymbol{\nu}^h$, que se denomina espacio de los desplazamientos virtuales. En consecuencia, los desplazamientos virtuales ya discretizados adquieren la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\eta}_i \approx \boldsymbol{\eta}_i^h(\mathbf{X}) = \sum_{m=1}^{n_p} N_m(\mathbf{X}) \hat{\boldsymbol{\eta}}_{im} \quad i : 1 \dots n_d \quad (2.21)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{im}$ corresponde al desplazamiento virtual del nodo m en la dirección i . De acuerdo a las definiciones dadas, el gradiente del primer término de la ecuación 2.18, se puede escribir como:

$$\text{Grad}[\boldsymbol{\eta}] \approx \nabla [\boldsymbol{\eta}^h] = \sum_{m=1}^{n_p} \nabla N_m(\mathbf{X}) \hat{\boldsymbol{\eta}}_m \quad (2.22)$$

Por lo tanto, sustituyendo las formas discretas del campo de desplazamientos, de los desplazamientos virtuales y de su gradiente en la expresión del principio de los trabajos virtuales de la ecuación 2.18, se llega a la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}^{res}(\mathbf{U}^h) = \mathbf{F}^{int}(\mathbf{U}^h) - \mathbf{F}^{ext}(\mathbf{U}^h) - \mathbf{F}^{ine}(\mathbf{U}^h) \approx \mathbf{0} \quad (2.23)$$

donde $\mathbf{F}^{res}(\mathbf{U}^h)$ son las fuerzas residuales, $\mathbf{F}^{int}(\mathbf{U}^h)$ son las fuerzas internas⁷, $\mathbf{F}^{ext}(\mathbf{U}^h)$ son las fuerzas externas.

La componente *p-esima* de las fuerzas internas viene dada por:

⁷Se considera la relación $\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$, donde \mathbf{F} es tensor gradiente de la deformación y \mathbf{S} es el segundo tensor de Piola-Kirchhoff [93] [16].

$$\mathbf{F}_p^{int}(\mathbf{U}^h) = \int_{\Omega^h} \mathbf{F}(\mathbf{U}^h) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{U}^h) \cdot \nabla N_p(\mathbf{X}) dV \quad (2.24)$$

mientras que la de las fuerzas externas por:

$$\mathbf{F}_p^{ext}(\mathbf{U}^h) = \int_{\Omega^h} \rho N_p \mathbf{B} dV + \int_{\Gamma_g^h} N_p \bar{\mathbf{T}} d\Gamma \quad (2.25)$$

y las de las fuerzas de inercia o cinéticas por:

$$\mathbf{F}_p^{ine}(\mathbf{U}^h) = \int_{\Omega^h} \rho N_p N_p dV \quad (2.26)$$

En síntesis el problema mecánico general se reduce a encontrar $\mathbf{U}^h \in \nu^h$, o el conjunto de desplazamientos nodales $\{\hat{u}_{im}\}$, que satisfagan a la ecuación 2.23.

2.2.5. Linealización del problema - formulación general

Tomando como punto de partida que el problema expuesto en los apartados precedentes es no lineal, la resolución numérica del mismo requiere de la utilización de un método iterativo. Por lo general, el método más difundido a tal fin es el de Newton-Raphson [9]. Para su aplicación, el método exige la linealización del problema no lineal en cada punto de análisis del dominio e instante de tiempo del proceso. En consecuencia, resulta indispensable la definición de un operador tangente global que afecte a cada uno de los grados de libertad del problema en cada instante de tiempo durante la evolución del proceso.

El operador tangente continuo se obtiene por medio de la aplicación de la derivada direccional o de Gateaux sobre la ecuación 2.19, de lo que resulta:

$$\delta \mathbf{F}^{res}(\mathbf{U}, \Delta \mathbf{U}) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [\mathbf{F}^{res}(\mathbf{U} + \alpha \Delta \mathbf{U})]_{\alpha=0} \quad (2.27)$$

$$\delta \mathbf{F}^{res}(\mathbf{U}, \Delta \mathbf{U}) = \delta \mathbf{F}^{int}(\mathbf{U}, \Delta \mathbf{U}) - \delta \mathbf{F}^{ext}(\mathbf{U}, \Delta \mathbf{U}) - \mathbf{F}^{ine}(\mathbf{U}, \Delta \mathbf{U}) \quad (2.28)$$

mientras que el operador tangente discreto se obtiene de manera análoga al aplicar la derivada direccional sobre la ecuación 2.23, obteniendo:

$$\delta \mathbf{F}^{res}(\mathbf{U}^h, \Delta \mathbf{U}^h) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [\mathbf{F}^{res}(\mathbf{U}^h + \alpha \Delta \mathbf{U}^h)]_{\alpha=0} \quad (2.29)$$

$$\delta \mathbf{F}^{res}(\mathbf{U}^h, \Delta \mathbf{U}^h) = \delta \mathbf{F}^{int}(\mathbf{U}^h, \Delta \mathbf{U}^h) - \delta \mathbf{F}^{ext}(\mathbf{U}^h, \Delta \mathbf{U}^h) - \mathbf{F}^{ine}(\mathbf{U}^h, \Delta \mathbf{U}^h) \quad (2.30)$$

Tanto los procesos de linealización como sus resultados se desarrollan en detalle en cada una de las secciones que involucren formulaciones que contribuyan con algún término en la matriz tangente global del problema.

2.3. Generación de las conectividades nodales

2.3.1. Introducción

Uno de los pilares fundamentales sobre los que se construye la metodología PFEM es la gran flexibilidad geométrica que permite el proceso de reconexión nodal. Esta característica facilita el seguimiento de procesos de elevada redistribución interna de masas y con fuertes cambios de volumen, que van desde el flujo de fluidos hasta los procesos que involucran la compactación de materiales en polvo. Para llevar a cabo, de manera intensiva y en un tiempo reducido, la reconexión nodal y el consecuente reconocimiento de los contornos, se utiliza una metodología basada en la creación de *diagramas de Voronoï* y *triangulaciones de Delaunay* [37][67] para lo uno y la técnica de *alpha-shape* [34][33] para lo otro. Por sus características, estas metodologías permiten su aplicación óptima en espacios \mathbb{R}^n ($n = 2, 3, \dots, m$) al explotar paralelamente sus cualidades geométricas específicas y su propiedad de dualidad.

Los algoritmos clásicos destinados a obtener una triangulación de Delaunay, a partir de una distribución arbitraria de puntos, se basan en generar, como paso inicial, el diagrama de Voronoï asociado a esa distribución de puntos y luego en construir la triangulación de Delaunay haciendo uso de las propiedades de ambas entidades geométricas. Finalmente, por medio de la técnica de *alpha-shapes*, se encuentran de manera aproximada, las fronteras del dominio al eliminar los triángulos que extienden al dominio más allá de las fronteras reconocidas.

A continuación se definen los conceptos básicos relativos a las metodologías mencionadas y se describen brevemente sus principales características y propiedades con respecto a un espacio de dimensión \mathbb{R}^2 .

2.3.2. Diagrama de Voronoï

Dado un conjunto finito de dos o más puntos distintos sobre el plano euclídeo en \mathbb{R}^2 , se define a su diagrama de Voronoï asociado como una partición del plano en regiones convexas V_i , asociadas cada una de ellas, al nodo p_i . Para dicha partición se cumple que todas las posiciones del plano están relacionadas, con los demás miembros más cercanos y pertenecientes al conjunto antes definido, por medio de la distancia euclídea (mínima distancia). Como resultado, se obtiene un mosaico (recubrimiento conforme) del plano formado por regiones delimitadas por las relaciones entre los puntos del conjunto. El mosaico antes definido se denomina diagrama de Voronoï plano ordinario y cada una de las regiones que lo conforman son los polígonos de Voronoï [67].

Definiciones

- Sea $\mathbf{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$, donde $2 \leq n < \infty$ y $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, $i, j \in I_n \{1, \dots, n\}$, se denomina *polígono de Voronoï* a la región definida por:

$V(p_i) = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| \text{ para } j \neq i, j \in I_n\}$ asociada con el punto p_i . Al conjunto dado por $\mathcal{V} = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$ se lo define como el diagrama de Voronoï plano de P . Al punto p se lo denomina como punto generador i -ésimo del polígono de Voronoï, y a $\mathbf{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ como el conjunto de generadores

del diagrama \mathcal{V} , representados por líneas discontinuas y círculos negros en la figura 2.2

- Una circunferencia en \mathbb{R}^2 (o una esfera en \mathbb{R}^3) centrada en un vértice del diagrama, cuyo radio es la distancia común a 3, 4 ó más nodos y que se encuentra vacía, se denomina esfera o circunferencia vacía de Voronoï, ver la figura 2.2.

Una representación visual del diagrama de Voronoï de un conjunto de puntos se logra al suponer frentes de avance de una determinada propiedad, que al expandirse radialmente a velocidad uniforme desde algunos centros aislados, colisionan y se intersecan entre sí [14]. El lugar y la forma geométrica de tales colisiones delimitan las celdas o polígonos de Voronoï.

Propiedades importantes [37][67]

- El polígono de Voronoï es un conjunto cerrado, por lo tanto su definición contiene a su propio contorno: $\partial V(p_i)$.
- Un contorno, que puede ser un segmento, una media línea o una línea infinita, está compartido por dos polígonos de Voronoï ($e(p_i, p_j) = V(p_i) \cap V(p_j) \neq \emptyset$), y equidista de los nodos pertenecientes a dichos polígonos.
- El punto final de un límite de Voronoï se denomina vértice de Voronoï q_i , y puede ser compartido por tres o más polígonos.
- En el caso degenerado, existe al menos un vértice de Voronoï compartido por cuatro o más contornos de los polígonos que lo conforman.

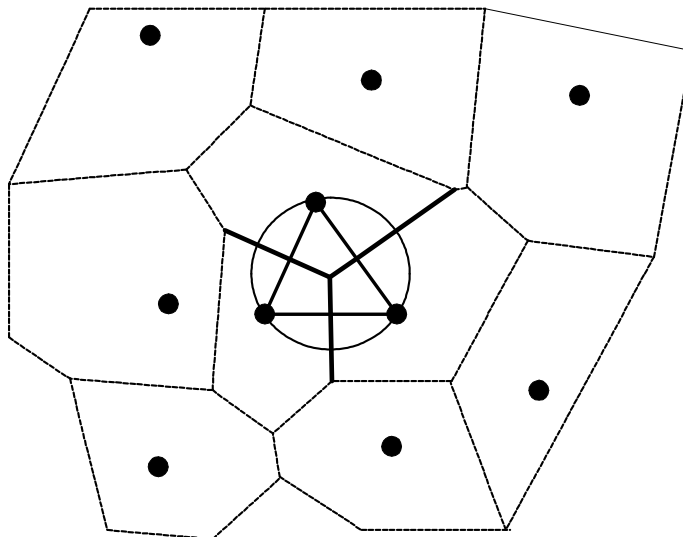


Figura 2.2: Diagrama y circunferencia de Voronoï, y triángulo de Delaunay asociado. Dualidad entre diagrama de Voronoï y la triangulación de Delaunay

Triangulación de Delaunay

La triangulación de Delaunay de un conjunto de nodos n es una partición del plano total convexo (convex-hull) Ω en regiones Ω_i , de forma tal que $\Omega = \cup \Omega_i$. Cada partición Ω_i es un triángulo construido a partir de la unión, mediante segmentos, de los nodos contenidos en los contornos de las circunferencias de Voronoï.

De todas las posibles triangulaciones de un conjunto de nodos con distribución arbitraria \mathbf{P} , que cumplen con la hipótesis de no colinealidad y de distancia no nula entre puntos, la triangulación de Delaunay $T(\mathbf{P})$ es la que presenta circunferencias de Voronoï que no contienen nodos en su interior [67]. Las circunferencias vacías de Voronoï están correctamente definidas cuando no contienen más de tres nodos coplanares, es decir contenidos en su contorno.

Propiedades importantes [37][67]

- El diagrama de Voronoï y la triangulación de Delaunay son estructuras con dualidad mutua. En d dimensiones, a cada elemento k -dimensional (donde $k < d$) de una, le corresponde un elemento $(d - k)$ -dimensional de la otra.
- En el caso degenerado, donde existe alguna circunferencia con más de tres nodos en su contorno, no hay unicidad en la definición de la triangulación. Por lo cual, cada circunferencia de más de tres nodos contiene un polígono formado por varios triángulos. La propiedad de dualidad se mantiene, pero implica que la celda de Voronoï se encuentra relacionada por un conjunto de polígonos (triangulares o no) que comparten un determinado nodo.
- El entorno natural (patch) de un punto i se obtiene de la unión de las circunferencias de Voronoï que continen al punto i . Todos los nodos contenidos por las circunferencias involucradas son los vecinos naturales de i . De forma análoga, dos puntos son vecinos naturales cuando sus correspondientes poliedros de Voronoï poseen una cara en común. Desde el punto de vista de los poliedros de Voronoï, el entorno natural de un determinado punto es una cavidad que resulta de la unión de los triángulos de las circunferencias que contienen al punto. Esta cavidad se utiliza luego para obtener la triangulación de Delaunay [14].
- La cavidad de un punto puede ser cóncava y no contiene ningún nodo en su interior, ya que todas las circunferencias de Voronoï son, por definición, vacías.
- Todos los triángulos y límites de Delaunay son finitos, a diferencia de los diagramas de Voronoï.
- De todas las posibles triangulaciones de un determinado conjunto de puntos, la de Delaunay es la que satisface la condición de circunferencias vacías, garantiza que los ángulos menores de todos los triángulos que la forman sean maximizados. Esto tiende a la condición ideal de equiangularidad [67]. Por ende, esta propiedad optimiza los factores de forma de las conectividades triangulares y minimiza la presencia de triángulos con áreas cuasi nulas o con bajos factores de forma [46].

Algunas de las estrategias relacionadas con la algoritmia e implementación de las metodologías de los diagramas de Voronoï y las triangulaciones de Delaunay para distribuciones de puntos arbitrarias se pueden encontrar en las referencias [67] y [14], entre otras. Existen además, una cantidad considerable de códigos abiertos y de libre disponibilidad en internet, sobre diversas implementaciones de los algoritmos de Voronoï y Delaunay, ver por ejemplo [92].

Observaciones

- *Los algoritmos de triangulación por las metodologías de Voronoï-Delaunay, permiten que las implementaciones más optimizadas terminen el proceso en un tiempo de $O(n \log(n))$, llegando a ser de $O(n)$ [46].*
- *Cabe destacar que la triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos se construye al utilizar la propiedad de las circunferas vacías de Delaunay.*
- *La triangulación de Delaunay, a diferencia del diagrama de Voronoï, es muy sensible a pequeñas perturbaciones de las posiciones geométricas de los puntos que la constituyen, haciendo que dicha entidad geométrica sufra de inestabilidad y no presente unicidad [46].*

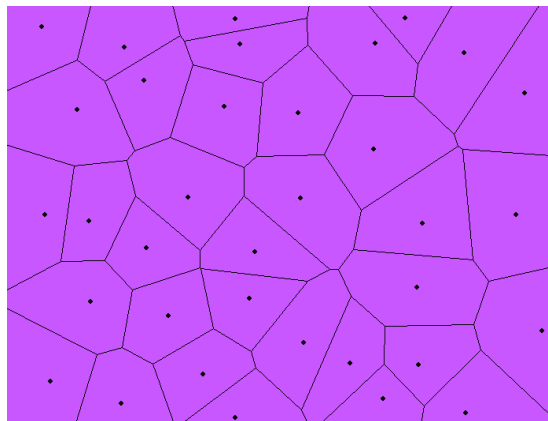
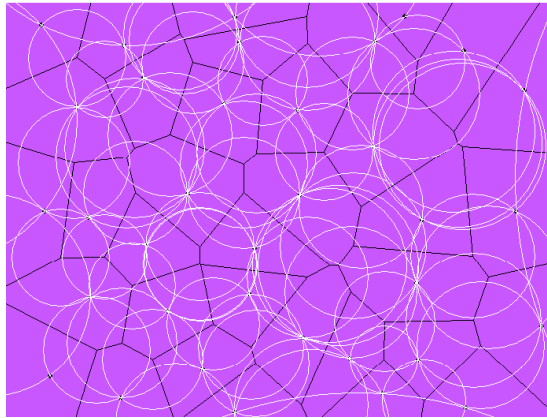
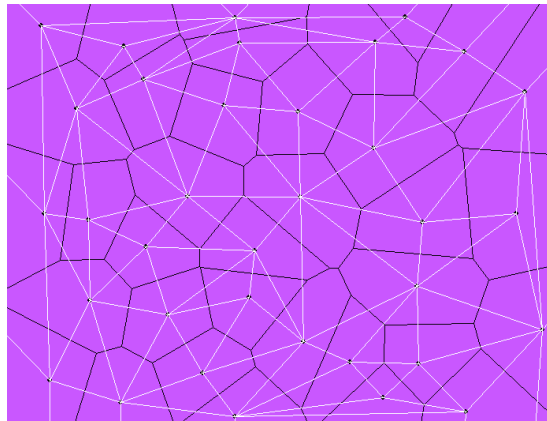


Figura 2.3: Diagrama de Voronoï del conjunto de puntos \mathbf{P}

2.3.3. Método de reconocimiento de las fronteras - Alpha-Shape

El reconocimiento de los contornos de un medio representado por un conjunto finito de puntos es un problema complejo cuya definición matemática no garantiza unicidad. El conocimiento y la imposición, a priori, del contorno completo de un dominio no siempre es posible, ya que en muchos procesos físicos la propia frontera evoluciona, se transforma y hasta se genera a lo largo del mismo. En tales casos, y especialmente en aquellas zonas de evolución dinámica del contorno, la definición de la frontera se hace difusa, en particular cuando el punto de partida para su reconocimiento es la triangulación general y convexa del dominio $\mathbf{T}(\mathbf{P})$ (convex-hull resultante de una triangulación de Delaunay).

Figura 2.4: Circunferencias de Voronoï del conjunto de puntos \mathbf{P} Figura 2.5: Triangulación de Delaunay - Diagrama de Voronoï del conjunto de puntos \mathbf{P}

Como ejemplo del tipo de problema al que se hace referencia, las figuras 2.6, 2.7 y 2.8 muestran un mismo conjunto de puntos \mathbf{P} que conforman a un único dominio Ω . Sin embargo, a lo largo de las mismas se observan situaciones extremas que van desde la mera presencia de los puntos inconexos hasta la definición de la triangulación de Delaunay y de su convex-hull asociado, ver las figuras 2.6a) y b). Paralelamente, las situaciones medias muestran las posibles fronteras que se pueden adoptar para el dominio Ω , donde aparecen zonas que son ajenas al cuerpo pero que, ante ciertas definiciones *erróneas* de su frontera, se incorporan al dominio Ω . Se observa además, la *correcta* definición de las fronteras del cuerpo Ω , en la figura 2.8a).

Una metodología que permite reconocer de forma aproximada el contorno de un cuerpo a partir de su envoltura convexa es la denominada alpha-shape [34][33]. Dicha metodología, que presenta características arbitrarias pero con resultados físicamente válidos [14], se fundamenta en la medida de las áreas de las celdas de Voronoï. La experiencia indica que a los nodos de la frontera les corresponden polígonos de Voronoï más grandes que a los del interior, sin embargo la algoritmia asociada al cálculo de dichas áreas no es la óptima. En consecuencia, una alternativa computacionalmente eficiente es discriminar

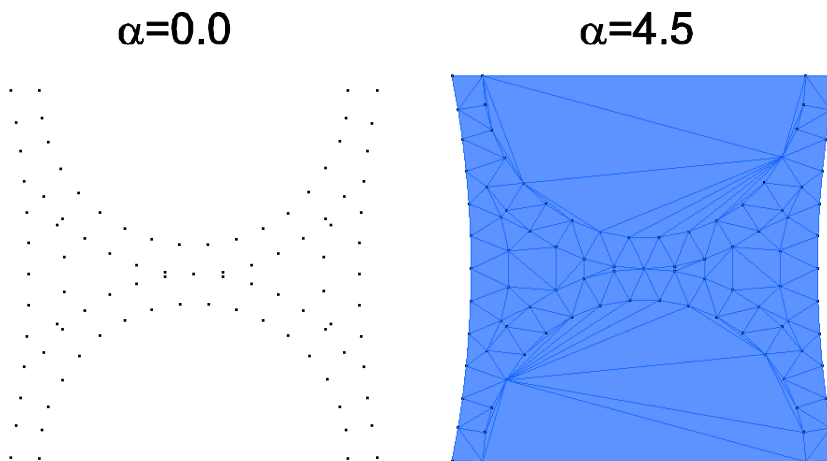


Figura 2.6: Conjunto de puntos \mathbf{P} y su convexo asociado (convex-hull) resultante de la triangulación de Delaunay

a los nodos de la frontera por medio de sus circunferencias de Voronoï asociadas, ya que estas son mayores que las del interior. El contorno se obtiene al eliminar los elementos asociados a las circunferencias con un radio mayor a un determinado valor αh , donde $\alpha > 0$ y h es la distancia media entre partículas vecinas. La condición a imponer es descartar las conectividades i con circunferencias de radio $r_i > \alpha h$.

El resultado de tal operatoria es la obtención de una nueva configuración del convexo inicial $\mathbf{T}_\alpha(\mathbf{P})$, siendo $\mathbf{T}_\alpha(\mathbf{P}) \subset \mathbf{T}(\mathbf{P})$. Las figuras 2.7 y 2.8 permiten notar la sensibilidad que presenta la metodología descrita a la variación del parámetro α , mediante su aplicación a una geometría arbitraria. De las figuras se destaca especialmente la 2.8a), donde con un valor de $\alpha = 1,25$, se recobra correctamente la frontera del cuerpo Ω discretizado por el conjunto de puntos \mathbf{P} de la figura 2.6a).

Como conclusión se debe advertir que el valor del parámetro α regula el grado de detalle de los contornos analizados y tiende a ser levemente dependiente del tipo de proceso que se está modelizando. Sin embargo, los resultados con mayor calidad y compatibilidad con la fenomenologías físicas aquí tratadas, suelen lograrse con valores de $\alpha \approx 1,2$. Los detalles de implementación de la metodología de alpha-shapes se encuentra desarrollada en las referencias [4] y [14].

Observaciones

- *En procesos que involucran el movimiento de fluidos o materiales en polvo, como así también en los de conformado y mecanizado de metales, la metodología de alpha-shape permite obtener fronteras de superficie libre y dinámicas (que se van generando en el transcurso del proceso), ver [35][14].*
- *Para valores de $\alpha > 1,25$, se tiende a eliminar cada vez menos conectividades, lo cual tiende a mantener el convex-hull original. De manera contraria, para valores de $\alpha < 1,25$, se eliminan la mayoría de las conectividades, generando huecos en zonas del dominio donde las mismas no tienen sentido físico, llegándose al extremo de tener todos los puntos desconectados.*

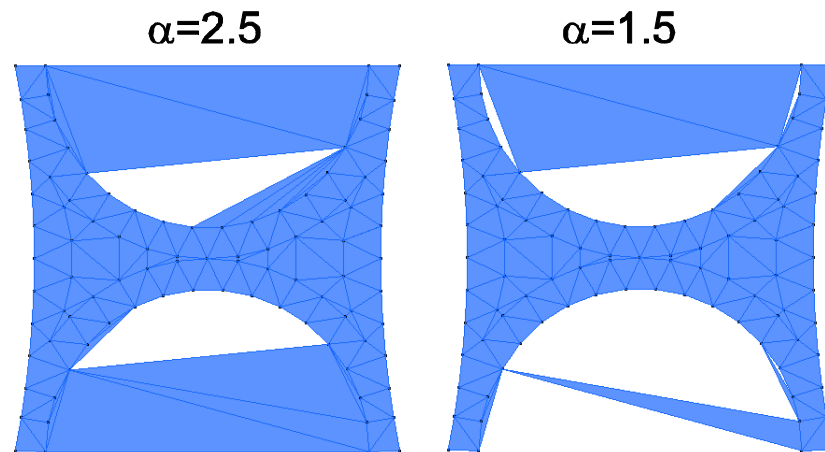


Figura 2.7: Recuperación de los contornos a partir del convexo para diferentes valores de α

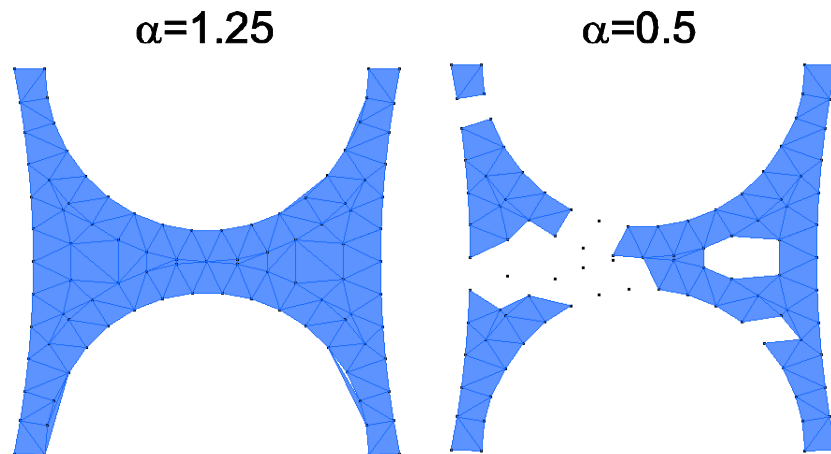


Figura 2.8: Recuperación de los contornos a partir del convexo con valores de α bajos

- *La eventual desconexión total de uno o más partículas indica la separación física de una o más regiones del dominio en partes independientes, lo cual obedece a la física del proceso descrito.*
- *En caso de existir más de un cuerpo, la totalidad del proceso descrito se aplica a cada uno de ellos por separado.*

2.4. Transferencia de información entre conectividades

2.4.1. Introducción

Los problemas en los que se producen grandes movimientos y deformaciones de los materiales exigen, para su correcta resolución numérica, mantener acotado el error introducido por las distorsiones que se generan en los elementos o conectividades nodales a

lo largo del cálculo. La metodología que normalmente se sigue para reducir este efecto es remallar el dominio con una frecuencia que depende de la fenomenología modelada, y que de acuerdo a la complejidad del problema tratado, pueden llegar a ser de varios miles de reconexiones.

Para que dicha operatoria sea practicable, no sólo es necesario generar óptimamente las conectividades entre las partículas del dominio, sino que también es imperioso contar con un método de transferencia y transporte de información que sea rápido, preciso y eficiente. Dicho método debe garantizar el paso de la información de una conectividad nodal hacia otra minimizando su degradación y difusión numérica a lo largo del proceso.

Un típico proceso de transferencia de información entre conectividades se caracteriza en general por las siguientes operaciones:

- a) Suavizado: el valor de las variables se extrapola desde los puntos de gauss hacia los nodos.
- b) Transferencia: las variables pertenecientes a la conectividad τ_{h_n} se transfieren a la $\tau_{h_{n+1}}$. La operación se efectúa a partir de la superposición de ambas conectividades, luego de lo cual los valores de la variable presentes en los nodos de τ_{h_n} se proyectan (interpolan) a la nueva conectividad $\tau_{h_{n+1}}$ utilizando para ello las funciones de interpolación conveniente.

El problema de transferencia de información entre mallas ha sido tratado por diversos autores, tal como se puede comprobar en la referencias [77][84][75][76] entre otras. En la mayoría de los casos, el proceso de transferencia se efectúa bajo una estrategia de remallado adaptativo local y dependiente de diversos criterios de error basados en el análisis de ciertas variables del proceso.

Por lo general, las estrategias más utilizadas para efectuar la transferencia de información son el suavizado global y el local. En el global el objetivo es encontrar una distribución espacial de la variable que minimice un funcional dependiente de alguna norma de error cuya evaluación comprenda la totalidad del dominio. Dicha metodología exige que cada vez que se lleve a cabo el suavizado y la transferencia de la información se deba resolver un sistema de ecuaciones cuya dimensión es proporcional al grado de discretización espacial del problema. Por otra parte, en el suavizado local se obtiene el promedio ponderado de la variable alrededor de una zona comprendida por las conectividades más próximas que rodean al nodo analizado, donde el alcance de la operación queda delimitado por un radio de influencia dependiente del grado de refinamiento utilizado en la discretización.

Otra subclasificación de los procesos de suavizado es la que los caracteriza por ser de tipo total o incremental. En el total, cada vez que se realiza el suavizado de la variable, el proceso se aplica sobre el valor total o acumulado de la misma. Por lo tanto, si η es el valor de una variable situada en los puntos de gauss, el suavizado total se caracteriza por calcular el valor de la misma variable en los nodos de acuerdo a una expresión del tipo $\hat{\eta}_{n+1} := \mathbb{S}(\eta_{n+1})$, donde \mathbb{S} es la función de suavizado que depende de la malla del dominio. En el caso incremental, el proceso de suavizado se aplica sólo al incremento $\Delta\eta$ experimentado por la variable durante un típico paso de tiempo y no a su valor acumulado, de forma que la expresión aplicada es del tipo $\hat{\eta}_{n+1} := \hat{\eta}_n + \mathbb{S}(\Delta\eta_{n+1})$, donde $\hat{\eta}_n$ es el valor acumulado de la variable antes de comenzar el incremento $n + 1$.

Dado que el PFEM se enmarca en un entorno que propicia una estrategia de resolución incremental, la metodología de suavizado que se aplica es local e incremental. Desde un punto de vista conceptual, la principal diferencia que existe entre los métodos total e incremental es que con el primero se tienden a recortar los valores pico de la variable uniformizando globalmente su campo resultante. Mientras que, con el método incremental sólo se tiende a homogeneizar una región reducida que se halla contenida dentro del radio de influencia anteriormente mencionado. La consecuencia numérica, atribuida al método de suavizado total, es su fuerte tendencia a difuminar los valores máximos y mínimos de la variable en el resto del dominio. Por lo tanto, una elevada repetición del proceso tiende a uniformizar la magnitud de la variable hacia un valor promedio en todo el dominio. Físicamente, el efecto del suavizado total permite trazar una analogía con un típico problema de conducción de calor transitorio, en el que a partir de una condición inicial con diferentes temperaturas y sin la presencia de una fuente de calor, se obtiene en el estado estacionario una temperatura homogénea y constante de equilibrio a en toda la extensión del dominio.

2.4.2. Ensayo de suavizado local

Un ejemplo ilustrativo, para poner en evidencia las diferencias existentes entre los procesos de suavizado local total y local incremental, es dejar evolucionar en el tiempo a un cuerpo sin cargas mecánicas y con densidades iniciales diferentes. La geometría del cuerpo es rectangular ($10 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$) y está formada por dos cuadrados de igual dimensión ($5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$), el superior que se denomina zona 1 y tiene asignada una densidad inicial de $10 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$ y el inferior o zona 2 que posee una densidad inicial de $2 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$, ver la figura 2.9. El problema consiste en resolver el problema de evolución durante 1 segundo con 1000 incrementos de tiempo. En ninguno de ellos se aplican cargas ni se generan deformaciones en el material, pero se lleva a cabo en cada uno de los incrementos el proceso de reconexión nodal y de transferencia de información entre conectividades.

Para cuantificar el grado de difusión numérica introducido por ambos métodos, se mide a lo largo del tiempo, la masa total del dominio y la correspondiente en las zonas 1 y 2. Las curvas que resultan de dicha medición son las que observan en las figuras 2.10 y 2.11.

En el caso del suavizado total se produce un alta difusión de la densidad, cuyo origen es numérico y no tiene ningún fundamento físico o fenomenológico. Por lo tanto, se establece un flujo de masa ficticio que va desde la zona 1 con mayor masa inicial, hacia la zona 2 con menor masa inicial, mientras que la masa total (reflejada por la zona 3) se mantiene constante y la masa del sistema se conserva, ver la figura 2.12a). En consecuencia, si el número de incrementos utilizados para resolver el problema el suficientemente elevado, la densidad de todo el dominio llega a ser uniforme, y el método numérico altera de manera artificial el resultado del fenómeno físico modelado.

En el caso del suavizado incremental no se establece ningún flujo de masa aparente entre las zonas 1 y 2, en consecuencia la difusión numérica se minimiza drásticamente y la que escasamente se percibe se encuentra concentrada alrededor de la frontera que divide las zonas 1 y 2 (acotada al radio de influencia de los nodos frontera en la zona de gradiente de densidad elevado), ver la figura 2.12b).

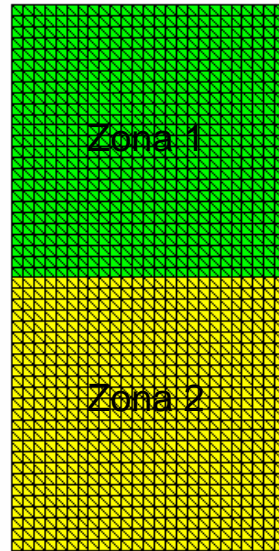


Figura 2.9: Geometría y conectividad inicial pertenecientes al ensayo para la comparación de las estrategias de suavizado

2.4.3. Transferencia de información en el entorno PFEM

Como se mencionó oportunamente, en el PFEM el proceso de transferencia de información entre conectividades se lleva a cabo mediante la metodología de suavizado local incremental, que coincide con el segundo caso analizado en el apartado precedente. Dicha metodología, explota la propiedad del PFEM asociada a la invariancia de las partículas durante todo el proceso, lo cual implica que la dimensión de los espacios asociados a la discretización nodal permanece constante, es decir que $\dim(\mathcal{V}^{h_n}) = \dim(\mathcal{V}^{h_{n+1}})$. La consecuencia inmediata es que ya no es necesario proyectar (interpolarse) la información desde la conectividad τ_{h_n} a la $\tau_{h_{n+1}}$, lo cual permite la transferencia directa de la información y evita que se produzcan los típicos saltos o discontinuidades en el campo de la variable transferida al pasar de una conectividad a la otra cuando los nodos de ambas no son coincidentes [75].

Dentro del entorno PFEM, el proceso de transferencia y transporte de la información del problema, consiste de los pasos que se enumeran a continuación, ver la figura 2.13:

1. Como punto de partida se considera que se acaba de resolver un incremento del proceso, por lo tanto, la información se encuentra situada en los puntos de gauss de las conectividades nodales, excepto los desplazamientos que son calculados a nivel nodal.
2. La información que está ubicada en los puntos de gauss de la conectividad nodal inicial τ_{h_n} se proyecta a los nodos por medio de un proceso de suavizado local-incremental, que se desarrolla con mayor detalle más adelante.
3. La posición de las partículas se actualiza obedeciendo a la solución del problema desde la última configuración de referencia Ω_n hasta la configuración deformada o

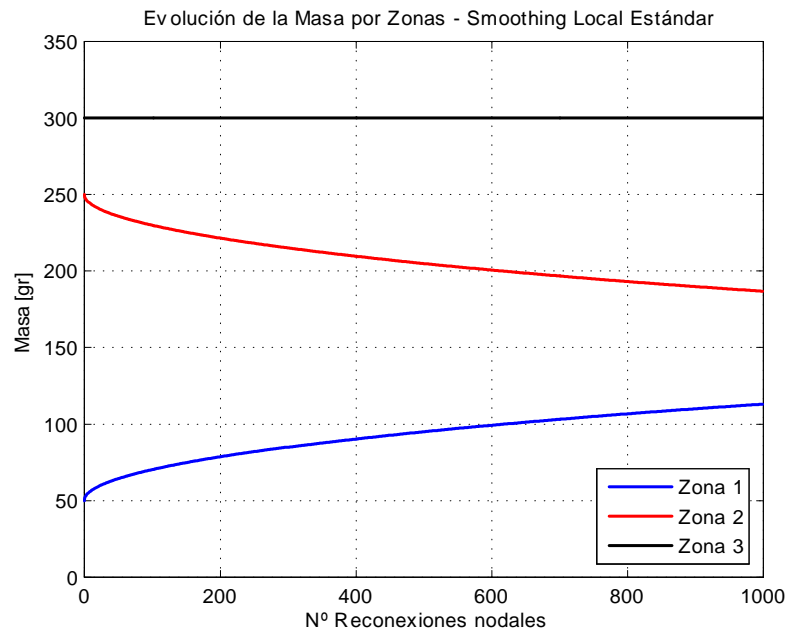


Figura 2.10: Evolución de la masa total y por zonas vs. tiempo para un proceso de suavizado local total

actualizada Ω_{n+1} , llevando consigo la información primaria del problema (proceso lagrangeano que induce la convección de la información junto con el movimiento de los nodos).

4. Ante una distribución espacial actualizada de las partículas se genera una nueva conectividad nodal $\tau_{h_{n+1}}$, siguiendo el método descrito en el apartado 2.3.
5. La información situada en las partículas se proyecta por medio de un proceso de interpolación a los puntos de gauss de la nueva conectividad.
6. Finalmente, se inicia el cálculo de un nuevo incremento contando con la información básica del problema en los puntos de gauss de cada nueva conectividad nodal.

Observación

- *El proceso no induce a ninguna discontinuidad en el campo de la variable transferida, ya que como los nodos de ambas conectividades (la original y la recién generada) son los mismos no es necesario proyectar una conectividad sobre la otra.*

A continuación se analizan cada uno de los pasos del proceso de transferencia previamente enunciados.

2.4.4. Proyección de la información elemental hacia los nodos (suavizado)

Como el proceso de suavizado que se aplica es local incremental, para cada una de las variables transferidas es preciso poder determinar una expresión con la forma

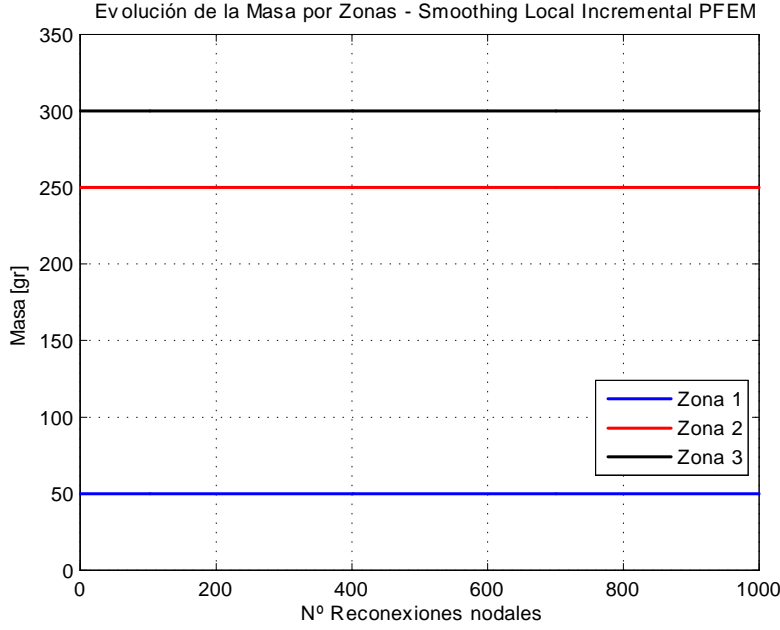


Figura 2.11: Evolución de la masa total y por zonas vs. tiempo para un proceso de suavizado local incremental

general: $\hat{\eta}_{n+1} = \hat{\eta}_n + \mathbb{S}(\Delta\eta_{n+1})$. Por lo tanto, en esta sección se plantea el cálculo de $\hat{\Delta}\eta_{n+1} = \mathbb{S}(\Delta\eta_{n+1})$ y se define el formato de la función \mathbb{S} . Para ello se toma como ejemplo la aplicación de la metodología a un problema general cuya fenomenología depende del camino recorrido (típico problema elastoplástico), en el que se requiere en cada instante de tiempo, disponer de toda la información referente a las variables internas y al campo de tensiones y de deformaciones plásticas. Si al conjunto de variables internas se las define como \mathbf{Q} , al campo de tensiones como $\boldsymbol{\sigma}$ y al de deformaciones plásticas como $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, el proceso de proyección o suavizado desde los puntos de gauss hacia los nodos se define para el campo \mathbf{Q} como: $\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{n+1} = \mathbb{S}_{h_n}(\mathbf{T}_n^{-1}, \mathbf{N}_{Qn}, \Delta\mathbf{Q}_{n+1}, \boldsymbol{\tau}_{h_n})$, donde, para cada uno de las variables se tiene que la función \mathbb{S}_{h_n} se define como:

$$\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{n+1} = \mathbb{S}_{h_n}(\mathbf{T}_n^{-1}, \mathbf{N}_{Qn}, \Delta\mathbf{Q}_{n+1}) = \mathbf{T}_n^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{N}_{Qn} \cdot \Delta\mathbf{Q}_{n+1} dV \quad (2.31)$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \mathbb{S}_{h_n}(\mathbf{T}_n^{-1}, \mathbf{N}_{\sigma n}, \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = \mathbf{T}_n^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{N}_{\sigma n} \cdot \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1} dV \quad (2.32)$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \mathbb{S}_{h_n}(\mathbf{T}_n^{-1}, \mathbf{N}_{\varepsilon n}, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) = \mathbf{T}_n^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{N}_{\varepsilon n} \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p dV \quad (2.33)$$

donde $\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{n+1}$, $\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$, $\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$ son las variables internas, las tensiones y las deformaciones plásticas situados en las partículas, mientras que $\Delta\mathbf{Q}_{n+1}$, $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ y $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ son las variables internas, las tensiones y las deformaciones plásticas situadas en los puntos de gauss de

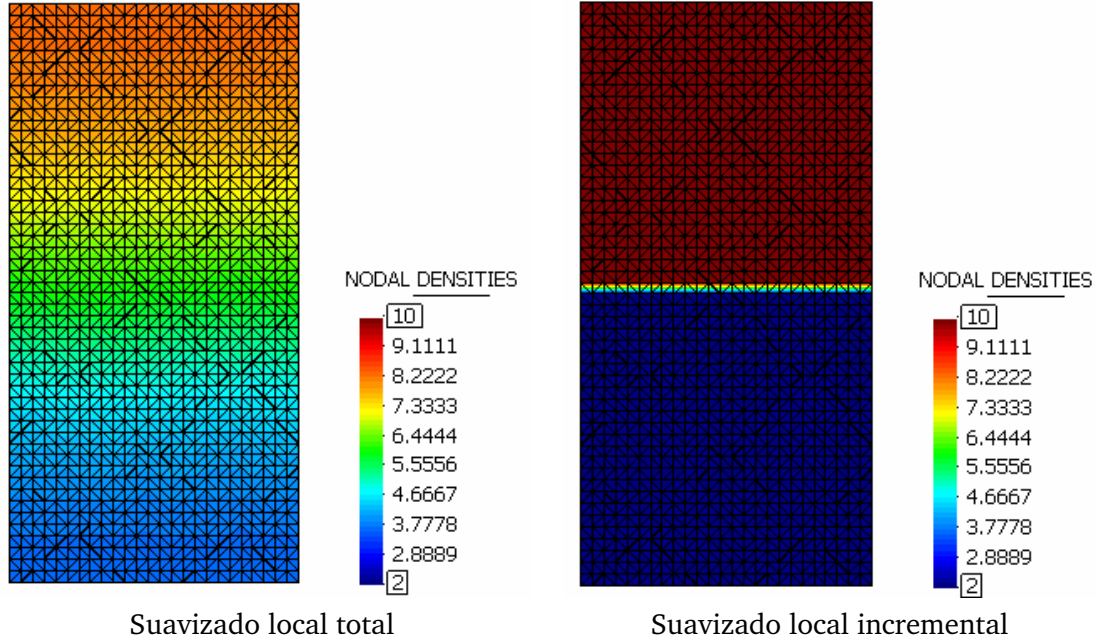


Figura 2.12: Campos de densidad final (incremento No 1000) para los procesos de suavizado total e incremental

las conectividades nodales pertenecientes a la configuración τ_{h_n} . Por otra parte, \mathbf{N}_{σ_n} y \mathbf{N}_{Q_n} son las matrices de transferencia (puntos de gauss \rightarrow nodos) dimensionalmente consistentes con las variables a operar y \mathbf{T}_n^{-1} es una matriz similar a la de masa. Cabe destacar que Ω corresponde a la configuración actualizada de Ω_n con las conectividades τ_{h_n} .

Las matrices de transferencia o proyección \mathbf{N}_{σ_n} y \mathbf{N}_{Q_n} están conformadas por las funciones de forma de cada uno de los nodos pertenecientes a las conectividades nodales y son evaluadas en los puntos de gauss. Su función es la de ponderar (por volúmenes o áreas) el valor de la variable a extrapolar o suavizar en cada una de las conectividades del patch (conjunto de elementos) asociado a una partícula dada. Por su parte, la matriz \mathbf{T} es diagonal, trivialmente invertible y se define como: $T_{ii} = \int_{\Omega} \delta_{ij} N_i N_j d\Omega$, donde $T_{ii} \neq 0$ y N son las mismas funciones de forma antes nombradas. El objeto de dicha matriz es la de normalizar los valores de ponderación contenidos en las matrices de proyección, de forma tal que el resultado de la operatoria es la suma ponderada (por áreas) de las contribuciones de cada conectividad nodal.

A fin de ejemplificar la mecánica de la metodología de suavizado, se presenta un ejemplo en \mathbb{R}^2 aplicado al cálculo del campo de tensiones suavizadas en un determinado nodo p , sobre la base de conectividades triangulares de tres nodos y funciones de interpolación lineal. El incremento de tensiones $\Delta \hat{\sigma}_{n+1}^p$ correspondientes al nodo p se calcula como:

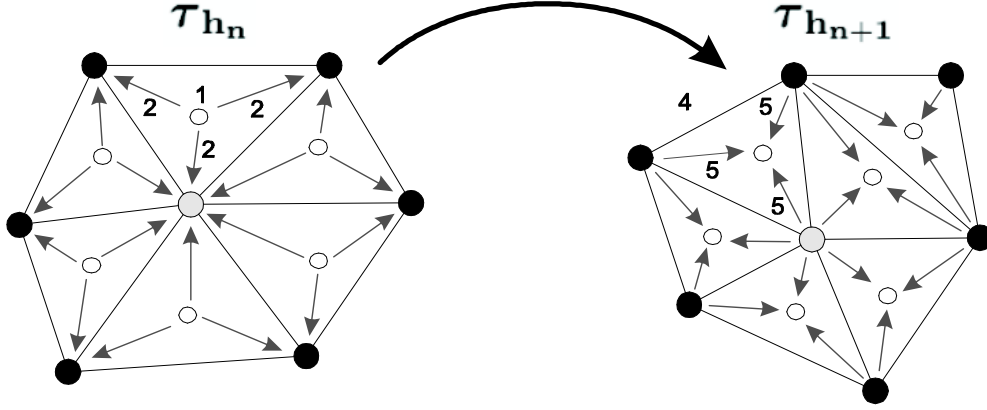


Figura 2.13: Esquema del proceso de transferencia y transporte de información entre conectividades nodales no coincidentes

$$\Delta \hat{\sigma}_{n+1}^p = \sum_{nc=1}^{ncn} \mathbf{T}_{nc}^{-1} \cdot \mathbf{S}_{nc} \quad (2.34)$$

Cabe destacar que la sumatoria se extiende sobre todas las conectividades que involucran a dicho nodo (patch asociado al nodo $p \rightarrow ncn$). De ésta forma, cada elemento o conectividad que integra el patch, aporta de forma ponderada (de acuerdo al área) su contribución al valor total de las tensiones. Cada uno de los componentes de la ecuación 2.34 se definen como:

- Incremento de tensiones $\Delta \hat{\sigma}_{n+1}^p$ situadas en los nodos (resultado de la proyección sobre la última conectividad de referencia):

$$\Delta \hat{\sigma}_{n+1}^p = \begin{bmatrix} \Delta \hat{\sigma}_x \\ \Delta \hat{\sigma}_y \\ \Delta \hat{\sigma}_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

- Matriz de normalización \mathbf{T}_{nc}^{-1} perteneciente a la conectividad nodal nc :

$$\mathbf{T}_{nc}^{-1} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} N_1 N_1 d\Omega & 0 & 0 \\ 0 & \int_{\Omega} N_2 N_2 d\Omega & 0 \\ 0 & 0 & \int_{\Omega} N_3 N_3 d\Omega \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.36)$$

- Matriz de proyección o ponderación \mathbf{S}_{nc} :

$$\mathbf{S}_{nc} = \int_{\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_{zz} \\ \Delta\sigma_{zz} \\ \Delta\sigma_{zz} \end{bmatrix} \right\} dV \quad (2.37)$$

donde se puede apreciar que el vector $\Delta\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1} - \sigma_n$ contiene los valores de las tensiones en los puntos de gauss y es al que se le aplica el proceso de proyección. Por su parte, como se ha mencionado oportunamente, N_1 , N_2 y N_3 son las funciones de forma de cada uno de los nodos que forman parte de la conectividad nc evaluadas en los respectivos puntos de gauss de dicha conectividad.

Observaciones

- El proceso de suavizado hacia los nodos descrito es incremental $\Delta\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1} - \sigma_n$. Es decir que sólo se ve afectado por dicho proceso el valor de las variables que resultan del cálculo de un determinado incremento.
- La incrementalidad del proceso de proyección minimiza la difusión numérica propia del suavizado, ya que no se introduce en su cálculo el valor absoluto o acumulado de las variables.
- El valor acumulado de las variables del problema se obtiene a nivel nodal (luego de actualizar su valor en el tiempo n con el que resulta del incremento). Esta propiedad facilita el transporte de las partículas y de su información asociada de una configuración a otra de forma trivial.

2.4.5. Actualización de los valores nodales

Debido a que la proyección que se lleva a cabo es incremental, el valor acumulado de una determinada variable en los nodos se obtiene luego de llevar a cabo la suma del valor resultante del incremento a nivel nodal. Dicha operación se define como:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{n+1} = \hat{\mathbf{Q}}_n + \underbrace{\mathbf{T}_n^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{N}_{Qn} \cdot \Delta\mathbf{Q}_{n+1} dV}_{\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{n+1}} \quad (2.38)$$

$$\Delta\hat{\mathbf{Q}}_{n+1} \quad (2.39)$$

$$\hat{\sigma}_{n+1} = \hat{\sigma}_n + \underbrace{\mathbf{T}_n^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{N}_{\sigma n} \cdot \Delta\sigma_{n+1} dV}_{\Delta\hat{\sigma}_{n+1}} \quad (2.40)$$

$$\Delta\hat{\sigma}_{n+1} \quad (2.41)$$

$$\hat{\varepsilon}_{\mathbf{n}+1} = \hat{\varepsilon}_{\mathbf{n}} + \underbrace{\mathbf{T}_n^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{N}_{Qn} \cdot \Delta \varepsilon_{n+1} dV}_{\Delta \hat{\varepsilon}_{\mathbf{n}+1}} \quad (2.42)$$

$$(2.43)$$

donde $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{n}}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{n}}$ y $\hat{\varepsilon}_{\mathbf{n}}^p$ son el campo de variables internas, de tensiones y de deformaciones plásticas situadas en los nodos al inicio del incremento, $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{n}+1}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{n}+1}$ y $\hat{\varepsilon}_{\mathbf{n}+1}^p$ son las mismas variables situadas en los nodos al final del incremento (con el incremento nodal incluido) y $\Delta \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{n}+1}$, $\Delta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{n}+1}$ y $\Delta \hat{\varepsilon}_{\mathbf{n}+1}^p$ son los valores incrementales que resultan del proceso de suavizado o proyección de las variables antes definidas.

2.4.6. Proyección de la información nodal hacia los puntos de gauss (interpolación)

Una vez que las partículas del dominio ya se encuentran en su nueva configuración, luego de haber llevado a cabo el transporte de las mismas y de su información asociada (proceso lagrangeano de convección de las partículas) y de que fuera generada una nueva conectividad nodal basada en su nueva configuración $\tau_{\mathbf{h}_{n+1}}$, la información que contienen debe ser proyectada sobre los puntos de gauss de la nueva configuración. Dicho proceso se lleva a cabo por medio de una interpolación estándar de la información de los nodos en los nuevos puntos de gauss, utilizando para ello las funciones de forma de las conectividades actualizadas. De manera general, la interpolación para el campo \mathbf{Q} se concreta por medio de una función $\mathbb{I}_{\mathbf{h}_{n+1}}(N_{np}, \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{np}}, \tau_{\mathbf{n}+1})$, que toma la siguiente forma:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{n}}^{\text{nc}} = \sum_{np=1}^{npn} N_{np} \cdot \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{np}} \quad (2.44)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}}^{\text{nc}} = \sum_{np=1}^{npn} N_{np} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{np}} \quad (2.45)$$

$$\varepsilon_{\mathbf{n}}^{\text{nc}} = \sum_{np=1}^{npn} N_{np} \cdot \hat{\varepsilon}_{\mathbf{np}} \quad (2.46)$$

donde $\mathbf{Q}_{\mathbf{n}}^{\text{nc}}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}}^{\text{nc}}$ y $\varepsilon_{\mathbf{n}}^{\text{nc}}$ son las variables internas, las tensiones y las deformaciones plásticas del problema en la configuración actualizada, o sea que están situadas en los puntos de gauss de la conectividad nodal $nc \in \tau_{\mathbf{h}_{n+1}}$, donde $\tau_{\mathbf{h}_{n+1}}$ es la conexión nodal o malla de la nueva configuración. Por su parte, N_{np} son las funciones de forma de cada uno de los nodos que integran a la conectividad nodal nc . Finalmente $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{np}}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{np}}$ y $\hat{\varepsilon}_{\mathbf{np}}^p$ son el valor acumulado de las variables internas, de las tensiones y de las deformaciones plásticas del problema a nivel nodal.

Cabe destacar que cuando se considera la posición inicial de una nueva configuración (previo al cálculo del incremento o a la actualización de su posición resultante), se tiene en cuenta que la misma se encuentra en el instante inicial n , tal como se observa en las últimas expresiones definidas.

Observaciones

- *La principal ventaja del método propuesto estriba en que: el número de partículas que describe al dominio permanece constante durante todo el proceso y el transporte de información se hace de forma asociada al transporte de las partículas (el espacio de la discretización es nodalmente contante $\dim(\nu^{h_n}) = \dim(\nu^{h_{n+1}})$).*
- *Como consecuencia de la invariancia de las partículas y de la estrategia utilizada, se logran evitar las discontinuidades que se producen en los procesos de transferencia al proyectar la información de una conectividad a la otra. Las mismas, surgen cuando se proyecta el campo asociado a una variable entre conectividades cuyos nodos no coinciden exactamente en número y en ubicación espacial [76], ver la figura 2.14a).*
- *De esto último se observa que el proceso de transporte de información descrito para el PFEM, implica una proyección hacia los nodos y una proyección posterior hacia los nuevos puntos de gauss (suavizado + interpolación), lo cual minimiza el número de subprocesos involucrados y evita las discontinuidades del campo transferido, ver la figura 2.14b)..*
- *La única discrepancia atribuible al proceso radica en el hecho de que las proyecciones nombradas no son exáctamente coincidentes si las conectividades tampoco lo son, es decir al expresar el dominio mediante diferentes topologías, $\tau_{h_{n+1}} \neq \tau_{h_n}$. Esta característica se pone en evidencia al notar que las funciones $\mathbb{S}_{h_n}(\tau_n)$ y $\mathbb{I}_{h_{n+1}}(\tau_{n+1})$ están, por lo general, asociadas a diferentes conectividades nodales. Sin embargo, dicha discrepancia topológica no produce discontinuidades en los campos transferidos, ya que al situar la información en los nodos durante los posibles cambios topológicos, se garantiza la estabilidad y la continuidad de la información a lo largo del proceso, ver la figura 2.14b).*

En la figura 2.14 se puede observar, de forma esquemática, el proceso de transferencia de información llevado a cabo por el método estándar [84][76] y por la metodología propuesta por el PFEM [70]. Resulta importante advertir la discontinuidad o salto que se produce en el valor de las variables transferidas por el método estándar como consecuencia de que las discretizaciones del dominio, en los tiempos n y $n + 1$, no son coincidentes $\nu^{h_n} \neq \nu^{h_{n+1}}$. De la misma forma, y debido a que las partículas que discretizan el dominio en el método PFEM son invariantes durante todo el proceso $\nu^{h_n} = \nu^{h_{n+1}}$, se observa que las variables transferidas presentan un comportamiento continuo y suave, sin saltos ficticios producidos por efectos numéricos.

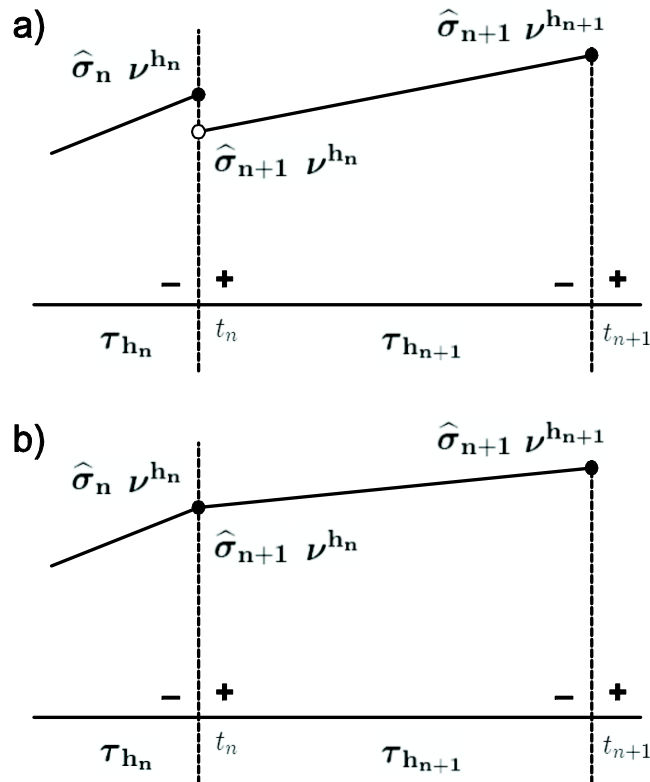


Figura 2.14: Esquema de la transferencia de información entre configuraciones con conectividades nodales no coincidentes, a) método clásico b) método PFEM

2.5. Recapitulación

A lo largo del presente capítulo se realizó un repaso de las principales formulaciones y algoritmos involucrados en el método PFEM, con excepción de los desarrollos que pertenecen a la metodología de contacto ACIM y a la formulación constitutiva de flujo. Debido a la alta importancia relativa de dichos temas con respecto a los demás contenidos de la monografía, un desarrollo más profundo y detallado de los mismos se lleva a cabo en los capítulos específicos destinados a tal efecto. En consecuencia, los principales aspectos y conclusiones del capítulo que merecen ser destacados, son los siguientes:

- La metodología PFEM, en su forma general, implica en su formulación un problema de tipo hiperbólico en el que se incluyen además los fenómenos de interacción entre cuerpos. En consecuencia, el problema se debe resolver tanto en el dominio espacial como en el temporal.
- Tanto la metodología utilizada para obtener la versión discreta del problema en su forma débil, como la estrategia seguida para lograr la linealización del problema no lineal, de acuerdo al método de Newton-Raphson, siguen los cánones normales y son los comúnmente utilizados en la metodología FEM general.
- Los algoritmos de integración temporal utilizados en la implementación del método son estándar y pertenecen a la muy difundida familia de los métodos de Newmark.

- La discretización espacial se hace por medio de un número finito de partículas que se relacionan físicamente entre sí por medio de conexiones nodales construidas a partir de las metodologías de diagramas de Voronoï y triangulaciones de Delaunay. Ambos métodos, que son ampliamente utilizados en la actualidad, son explotados en el contexto de la metodología PFEM para regenerar incrementalmente las conexiones nodales luego de la aparición de grandes desplazamientos de las partículas.
- Los contornos de los cuerpos, que como consecuencia del método de triangulación utilizado se tornan difusos, exigen para su correcta definición, la adopción de la metodología de alpha-shape. Esta, a su vez involucra la utilización del parámetro α , cuyo valor está íntimamente relacionado con el tipo de problema modelado. Sin embargo, por lo general el valor utilizado con mayor frecuencia, y a partir del cual se obtienen resultados con mayor significado físico es $\alpha \approx 1,2$.
- La reconexión frecuente de las partículas, luego de la actualización espacial de sus coordenadas, lleva implícito el transporte de toda la información relativa al problema. Para esto, en el entorno PFEM, se aplica una estrategia de transferencia local incremental a todas las operaciones de proyección entre conectividades de una determinada configuración espacial. El método de suavizado incremental minimiza la difusión numérica de las variables transportadas, la acota a zonas locales con altos gradientes y permite una mayor consistencia de la información entre diferentes conectividades, evitando discontinuidades en los campos de las variables transferidas y reduciendo el error generado por este tipo de procesos.

Apéndice I. Métodos de Integración Temporal - Algoritmos

A. Métodos de integración temporal

A.1. Introducción

Como es sabido, los problemas encuadrados dentro de la dinámica estructural, presentan una formulación matemática que conduce a EDP's de tipo hiperbólico, ver [44]. Una forma ampliamente utilizada para iniciar la descripción del problema de evolución, que es válida para el caso lineal, es la expresión general semidiscreta de la ecuación de movimiento, que fue anteriormente definida (ec. 2.19) como una de las formas de expresar al problema mecánico general en los apartados 2.2.3 y 2.2.4:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{U}(t)=\mathbf{F}(t) \quad (2.47)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa, \mathbf{C} es la matriz de amortiguamiento viscoso, \mathbf{K} es la matriz de rigidez del sistema que resulta de la aplicación de un determinado modelo constitutivo lineal y $\mathbf{F}(t)$ es el vector de fuerzas aplicadas, mientras que $\ddot{\mathbf{U}}(t)$, $\dot{\mathbf{U}}(t)$ y $\mathbf{U}(t)$ son los vectores aceleración, velocidad y desplazamiento del conjunto de partículas del medio en función del tiempo.

Como se observa en la ec. 2.47, el problema exige ser resuelto de forma simultánea en los dominios espacial y temporal, para lo cual se debe recurrir a la utilización de metodologías específicas.

El objetivo del trabajo, no es desarrollar nuevos algoritmos de integración en el tiempo ni llevar a cabo un análisis exhaustivo de los ya existentes. Sino que para resolver el tipo de problemas propuestos, se ha optado por adoptar e implementar métodos de integración temporal clásicos, suficientemente probados y conocidos. En consecuencia, a continuación se mencionan brevemente algunas de las líneas de investigación y análisis de los algoritmos y metodologías de integración en el tiempo. Luego se presentan las principales características, formulaciones y algoritmos de las dos metodologías utilizadas en la implementación de la metodología PFEM, el Método de Newmark y el Método de Bossak.

Las estrategias utilizadas para el análisis de los algoritmos de integración temporal se ocupan del desarrollo de metodologías que garanticen la conservación del momento lineal y de la energía, además de que posean la robustez y la estabilidad necesarias para que sean capaces de resolver una amplia gama de problemas dinámicos. Para ello el estudio del problema presenta varias vertientes, la más tradicional parte de la condición de

conservación del momento lineal y de la energía, ver las referencias [95][57][38][56], mientras tanto, otros grupos [42][1] centran también su atención en la alta estabilidad y disipación numérica de los algoritmos. Finalmente, otra rama enfoca al problema mediante el desarrollo de integradores variacionales basados en el principio variacional de Hamilton, para luego aplicados a problemas con estructura conservativa y/o disipativa, ver las referencias [50][81][60].

B. Método de Newmark

La familia de métodos de Newmark [66], incluye un conjunto de integradores temporales destinados a resolver la ecuación de movimiento, ec. 2.47. Se basan en definir unas aproximaciones de las variables primarias del problema $\mathbf{U}(t)$ y $\dot{\mathbf{U}}(t)$ a través de fórmulas construidas por medio de diferencias finitas, luego en reescribir la ecuación de movimiento en función de esas aproximaciones y finalmente en obtener un formato recursivo del problema inicial $\mathbb{T}_{t_{n+1}}(\ddot{\mathbf{U}}(t_{n+1}), \dot{\mathbf{U}}(t_{n+1}), \mathbf{U}(t_{n+1})) = \mathbb{T}_{t_n}(\ddot{\mathbf{U}}(t_n), \dot{\mathbf{U}}(t_n), \mathbf{U}(t_n))$. Una forma de escribir al citado conjunto de ecuaciones es:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{U}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \right] \quad (2.49)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + \Delta t \left[(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \right] \quad (2.50)$$

donde los parámetros β y γ son puramente algorítmicos y rigen el comportamiento del método en cuanto a la estabilidad y la precisión de la solución encontrada. Además, los diversos valores adoptados por los parámetros algorítmicos definen la denominada familia de métodos de Newmark. En conclusión, el conjunto de ecuaciones 2.48 permite encontrar los valores de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en el tiempo actual en base al valor de los mismos en el instante de tiempo anterior.

El término correspondiente a la matriz de amortiguamiento viscoso \mathbf{C} , que se halla presente en las ecuaciones 2.47 y 2.48a, y que físicamente representa la existencia de un elemento amortiguador externo que actúa sobre la estructura, suele eliminarse ya que dicha condición física muy raramente se encuentra presente en el tipo de problemas que aquí se plantean. Más bien, las únicas fuerzas disipativas externas presentes pertenecen a las fuerzas de fricción que resultan de los fenómenos de interacción.

El análisis de estabilidad del método de Newmark indica que las condiciones de estabilidad, en función de sus parámetros algorítmicos, son las siguientes:

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{incondicionalmente estable} \quad (2.51)$$

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{condicionalmente estable} \quad (2.52)$$

$$\beta < \frac{\gamma}{2} \quad (2.53)$$

lo que se resume en que para $\beta = \frac{1}{4}$ y $\gamma = \frac{1}{2}$ el método es implícito, incondicionalmente estable, con una precisión de 2^{do} orden y equivalente a la clásica regla del trapecio de integración numérica [44]. De manera complementaria, para tales valores de los parámetros algorítmicos, el método de Newmark conserva la energía [56] en el caso lineal, mientras que para valores diferentes ($\gamma > \frac{1}{2}$, $\beta \neq \frac{\gamma}{2}$), aparecen términos adicionales en la ecuación de balance de energía⁸. Dichos términos producen una disipación artificial de energía de origen numérico, que se denomina comúnmente amortiguamiento algorítmico y que, en ciertas circunstancias, puede ser necesario para eliminar las componentes de altas frecuencias en el análisis temporal [44].

Un análisis cuantitativo y comparativo detallado de los diversos métodos de integración temporal pertenecientes al formato Newmark puede hallarse en la referencia [1], mientras que un estudio en profundidad de la aplicación de varias de estas metodologías a problemas no lineales, enfocados desde el punto de vista de la *disipación numérica controlable*, se hace en la referencia [57].

En cuanto al método de Newmark, es destacable su buen desempeño para lograr la resolución de una gran cantidad de problemas de evolución en el tiempo. Sin embargo, bajo ciertas situaciones de fuerte interacción entre cuerpos que se desarrollan durante intervalos de tiempo reducidos (impactos), la aparición de componentes de alta frecuencia (considerados como espúreos para el tipo de fenomenologías y de problemas de dinámica estructural tratados), tiende a desestabilizar al algoritmo de integración temporal, y por ende, a la respuesta mecánica del problema.

B.1. Algoritmo de Newmark

Obedeciendo a la estructura adoptada por el PFEM, resulta conveniente reescribir las ecuaciones de actualización bajo la forma de velocidades y aceleraciones en función de los desplazamientos, que son finalmente las incógnitas del problema. Para ello, se anulan los desplazamientos luego de llevar a cabo las sustituciones convenientes. De ello resulta:

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{U}}_n \quad (2.54)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\dot{\mathbf{U}}_n - \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{U}}_n \quad (2.55)$$

Con el fin de simplificar las expresiones precedentes, se definen las siguientes relaciones:

$$a_0 = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \quad a_1 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \quad a_2 = \frac{1}{\beta\Delta t} \quad (2.56)$$

$$a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1 \quad a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1 \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta} - 2\right) \quad (2.57)$$

luego de lo cual, se pueden reescribir las ecuaciones originales utilizando las nuevas expresiones. De esto último se tiene:

⁸La ecuación de conservación de la energía surge de multiplicar ambos miembros de la ecuación de movimiento 2.47 por el vector velocidad $\dot{\mathbf{U}}^T$ [56].

$$\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}+1} = a_0(\mathbf{U}_{\mathbf{n}+1} - \mathbf{U}_{\mathbf{n}}) - a_2\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} - a_3\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} \quad (2.58)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}+1} = a_1(\mathbf{U}_{\mathbf{n}+1} - \mathbf{U}_{\mathbf{n}}) - a_4\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} - a_5\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} \quad (2.59)$$

y la ecuación de movimiento que resulta de sustituir las velocidades y las aceleraciones obtenidas es:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathbf{n}+1} = \mathbf{M} \left[a_0(\mathbf{U}_{\mathbf{n}+1} - \mathbf{U}_{\mathbf{n}}) - a_2\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} - a_3\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} \right] + \\ + \mathbf{C} \left[a_1(\mathbf{U}_{\mathbf{n}+1} - \mathbf{U}_{\mathbf{n}}) - a_4\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} - a_5\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} \right] + \mathbf{K}_{\mathbf{n}+1} \mathbf{U}_{\mathbf{n}+1} \end{aligned} \quad (2.60)$$

finalmente, y luego de agrupar términos, la ecuación de movimiento que se debe resolver es:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathbf{n}+1} = (\mathbf{K}_{\mathbf{n}+1} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C})\mathbf{U}_{\mathbf{n}+1} + \mathbf{M}(a_0\mathbf{U}_{\mathbf{n}} + a_2\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} + a_3\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}}) + \\ + \mathbf{C}(a_1\mathbf{U}_{\mathbf{n}} + a_4\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} + a_5\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}}) \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde se observa la influencia del problema dinámico en los términos de las fuerzas internas (términos del lado izquierdo de la ecuación) y en el vector de fuerzas externas (términos del lado derecho de la ecuación). Cabe destacar que la ecuación 2.61 incluye el efecto del amortiguamiento viscoso contenido en los términos asociados a la matriz \mathbf{C} . Sin embargo, tal como se dijo anteriormente, la inclusión de dichos términos sólo hace al carácter general de la expresión, ya que luego son eliminados por su irrelevancia física en la clase de procesos modelados.

Debido a que de forma general en el PFEM, la integración temporal se efectúa en problemas no lineales, el algoritmo dinámico se implementa dentro de un esquema incremental iterativo; en particular bajo la utilización del método para la resolución de problemas no lineales de Newton-Raphson (NR). Por tal motivo, y a fin de calcular los operadores tangentes asociados a la implementación del método de Newmark se define al vector de residuos como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{n}+1} = \mathbf{F}_{\mathbf{n}+1} + \mathbf{M}(a_0\mathbf{U}_{\mathbf{n}} + a_2\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} + a_3\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}}) + \\ + \mathbf{C}(a_1\mathbf{U}_{\mathbf{n}} + a_4\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} + a_5\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}}) - (\mathbf{K}_{\mathbf{n}+1} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C})\mathbf{U}_{\mathbf{n}+1} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Por su parte, la linealización del vector de fuerzas residuales para una determinada iteración i se expresa como:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n}+1}^i \simeq \mathbf{R}_{\mathbf{n}+1}^{i-1} + \left[\frac{\partial \mathbf{R}_{\mathbf{n}+1}}{\partial \mathbf{U}_{\mathbf{n}+1}} \right]^{i-1} \Delta \mathbf{U}_{\mathbf{n}+1}^i = \mathbf{0} \quad (2.63)$$

donde $\Delta \mathbf{U}_{\mathbf{n}+1}^{i+1}$ es el vector de desplazamientos incrementales a calcular. La ecuación a resolver en un determinado incremento e iteración se expresa como:

$$[\mathbf{K}_{n+1}^T]^{i-1} \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i = \mathbf{R}_{n+1}^{i-1} \quad (2.64)$$

donde $\mathbf{K}_{n+1}^T = -\frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}}{\partial \mathbf{U}_{n+1}}$ se define como la matriz tangente del sistema. Por su parte, el vector de fuerzas residuales se puede reescribir como:

$$\mathbf{R}_{n+1}^{i-1} \simeq \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{M} \left[a_0(\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) - a_2 \dot{\mathbf{U}}_n - a_3 \ddot{\mathbf{U}}_n \right] - \quad (2.65)$$

$$- \mathbf{C} \left[a_1(\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) - a_4 \dot{\mathbf{U}}_n - a_5 \ddot{\mathbf{U}}_n \right] - \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{U}_{n+1} \quad (2.66)$$

La matriz tangente que surge de la metodología seguida es, en consecuencia, $[\mathbf{K}_{n+1}^T] = \mathbf{K}_{n+1} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$, y problema incremental iterativo a resolver es:

$$\left[\mathbf{K}_{n+1}^{i-1} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} \right] \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i = \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i-1} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i-1} - \mathbf{K}_{n+1}^i \mathbf{U}_{n+1}^{i-1} \quad (2.67)$$

Como síntesis de lo expuesto, el algoritmo que contiene los pasos a seguir para la resolución del problema dinámico por medio del método de Newmark, es el que se detalla en el cuadro 2.1.

1) Inicialización de variables, cálculo de vectores constantes, $t = t_0$, $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$

2) Lazo de iteraciones de NR, si $t < T \Rightarrow$ nuevo incremento y proceso iterativo

3) Inicio de una nueva iteración: $i = 1$, predicción de $\Delta \mathbf{U}_{n+1}^i$, predictores posibles:

$$a) \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{i=1} := \mathbf{0}$$

$$b) \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{i=1} := \Delta \mathbf{U}_{n+1}$$

$$c) \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{i=1} := \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_n \longrightarrow \mathbf{U}_{n+1}^{i=1} = \mathbf{0}$$

$$d) \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{i=1} := \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_n \longrightarrow \mathbf{U}_{n+1}^{i=1} = \mathbf{U}_n^{i=1}$$

4) Actualización de los desplaz. y corrección de las velocidades y aceleraciones

$$\mathbf{U}_{n+1}^i := \mathbf{U}_n + \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i, \quad \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i := a_1 \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i - a_4 \dot{\mathbf{U}}_n - a_5 \ddot{\mathbf{U}}_n$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^i := a_0 \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i - a_2 \dot{\mathbf{U}}_n - a_3 \ddot{\mathbf{U}}_n$$

5) Cálculo del vector de fuerzas residuales

$$\mathbf{R}_{n+1}^{i-1} \approx \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i-1} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{i-1} - \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{U}_{n+1}^{i-1}$$

6) Si $\text{error} \leq \text{tol. definida} \Rightarrow$ convergencia, actualización $t = t + \Delta t$, retorno a pto. 2)

7) Si no hay convergencia, se resuelve el sistema de ecuaciones definido por la matriz:

$$[\mathbf{K}_{n+1}^T] = \mathbf{K}_{n+1} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C} \text{ para calcular } \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i = \mathbf{R}_{n+1}^{i-1} \left\{ [\mathbf{K}_{n+1}^T]^{i-1} \right\}^{-1}$$

8) Actualización de: $\mathbf{U}_{n+1}^i := \mathbf{U}_{n+1}^{i-1} + \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i$, iter. $i = i + 1$, volver a pto. 5)

Cuadro 2.1: Algoritmo para la resolución del problema dinámico por el método de Newmark

C. Método de Bossak

El método de Bossak, perteneciente la variedad de los métodos α , es una variante del método de Newmark al que se le agrega el parámetro adicional α_B (alfa de Bossak), ver [100]. Dicho método comparte las características principales del método α de Hilber-Hughes-Taylor, ya que para el mismo valor de su parámetro algorítmico $\alpha_B = \alpha$, ambos presentan las mismas propiedades de disipación [44]. Siguiendo la misma estructura que para el método de Newmark, la ecuación discreta de movimiento y las ecuaciones de aproximación y actualización de los desplazamientos y de las velocidades son:

$$\mathbf{F}_{n+1} = (1 - \alpha_B)\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} + \alpha_B\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} \quad (2.68)$$

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t\dot{\mathbf{U}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{U}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \right] \quad (2.69)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + \Delta t \left[(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \right] \quad (2.70)$$

donde α_B es un parámetro algorítmico, de forma que cuando $\alpha_B = 0$, el método de Bossak coincide con el método de Newmark. Las condiciones paramétricas que hacen que el método de Bossak tenga las propiedades de: estabilidad incondicional, precisión de 2^{do} orden y máxima disipación de componentes de alta frecuencia son:

$$\alpha_B \leq 0 \quad (2.71)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_B \quad (2.72)$$

$$\beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha_B)^2 \quad (2.73)$$

Un análisis comparativo de los métodos alfa mencionados se encuentra en la referencia [1]. Con respecto a la aplicación del método de Bossak, se ha probado de forma práctica que su utilización ayuda a estabilizar algunas de las dificultades numéricas observadas al aplicar el método de Newmark. En particular a las referentes a la pérdida de estabilidad asociada a la presencia de componentes de alta frecuencia, produciendo el efecto típico de un filtro pasa-bajos.

Al igual que en el caso anterior, tanto la formulación como la algoritmia asociadas al método de Bossak, y su respectiva inclusión en el entorno del PFEM, se desarrolla en el Apéndice I del presente capítulo.

Observación

- El valor de los parámetros del método Bossak, que son heredados del método de Newmark, coinciden con los anteriormente definidos y son los que aseguran una precisión de 2^{do} orden y una estabilidad incondicional en un esquema implícito. En particular, el parámetro de Bossak considerado como óptimo es $\alpha_B \simeq -1/3$, ver [44].

C.1. Algoritmo de Bossak

Siguiendo el mismo proceso que en el método de Newmark, el algoritmo de Bossak se obtiene al reemplazar las expresiones 2.54 pertenecientes a las velocidades y las aceleraciones en función de los desplazamientos en las ecuaciones 2.68. De ello resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathbf{n}+1} = (1 - \alpha_B)\mathbf{M} \left[a_0(\mathbf{U}_{\mathbf{n}+1} - \mathbf{U}_{\mathbf{n}}) - a_2\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} - a_3\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} \right] + \alpha_B\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} + \\ + \mathbf{C} \left[a_1(\mathbf{U}_{\mathbf{n}+1} - \mathbf{U}_{\mathbf{n}}) - a_4\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} - a_5\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} \right] + \mathbf{K}_{\mathbf{n}+1} \mathbf{U}_{\mathbf{n}+1} \quad (2.74) \end{aligned}$$

donde las constantes $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ se definen en las ecuaciones 2.56. La ecuación de movimiento a resolver se obtiene luego de operar y agrupar términos de manera conveniente, de lo cual resulta:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{\mathbf{n}+1} + (1 - \alpha_B)a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}] \mathbf{U}_{\mathbf{n}+1} = \mathbf{F}_{\mathbf{n}+1} + \mathbf{C} \left[a_1(\mathbf{U}_{\mathbf{n}+1} - \mathbf{U}_{\mathbf{n}}) - a_4\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} - a_5\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} \right] + \\ + (1 - \alpha_B)\mathbf{M} \left[a_0(\mathbf{U}_{\mathbf{n}+1} - \mathbf{U}_{\mathbf{n}}) - a_2\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} - a_3\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} \right] - \alpha_B\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} \quad (2.75) \end{aligned}$$

El vector de fuerzas residuales a utilizar en el esquema incremental iterativo de Newton-Raphson, para la resolución del problema no lineal, es:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n}+1}^{i-1} \simeq \mathbf{F}_{\mathbf{n}+1} - (1 - \alpha_B)\mathbf{M}\mathbf{U}_{\mathbf{n}+1} - \alpha_B\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}+1} - \mathbf{K}_{\mathbf{n}+1}\mathbf{U}_{\mathbf{n}+1} \quad (2.76)$$

y la matriz tangente que se obtiene siguiendo la misma metodología que en el apartado anterior es:

$$[\mathbf{K}_{\mathbf{n}+1}^T]^{i-1} = \left[\frac{\partial \mathbf{R}_{\mathbf{n}+1}}{\partial \mathbf{U}_{\mathbf{n}+1}} \right]^{i-1} = \mathbf{K}_{\mathbf{n}+1}^{i-1} + (1 - \alpha_B)a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C} \quad (2.77)$$

En definitiva, problema incremental iterativo que se debe resolver es:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{K}_{\mathbf{n}+1}^{i-1} + (1 - \alpha_B)a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C} \right] \Delta \mathbf{U}_{\mathbf{n}+1}^i = \\ \mathbf{F}_{\mathbf{n}+1} - \alpha_B\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} - (1 - \alpha_B)\mathbf{M}\overset{\cdot\cdot}{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}+1}^{i-1} - \mathbf{C}\overset{\cdot}{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}+1}^{i-1} - \mathbf{K}_{\mathbf{n}+1}^i \mathbf{U}_{\mathbf{n}+1}^{i-1} \quad (2.78) \end{aligned}$$

El algoritmo que sintetiza la formulación e implementación del método de Bossak se detalla en el cuadro 2.2.

1) Inicialización de variables, cálculo de vectores constantes:

$$t = t_0, \alpha_B \leq 0, \gamma = \frac{1}{2} - \alpha_B, \beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha_B)^2$$

2) Lazo de iteraciones de NR, si $t < T \Rightarrow$ nuevo incremento y proceso iterativo

3) Inicio de una nueva iteración: $i = 1$, predicción de $\Delta \mathbf{U}_{n+1}^i$, predictores posibles:

$$a) \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{i=1} := \mathbf{0}$$

$$b) \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{i=1} := \Delta \mathbf{U}_{n+1}$$

$$c) \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{i=1} := \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_n \longrightarrow \mathbf{U}_{n+1}^{i=1} = \mathbf{0}$$

$$d) \Delta \mathbf{U}_{n+1}^{i=1} := \Delta t \dot{\mathbf{U}}_n \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}_n \longrightarrow \mathbf{U}_{n+1}^{i=1} = \mathbf{U}_n^{i=1}$$

4) Actualización de los desplaz. y corrección de las velocidades y aceleraciones

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{n+1}^i &:= \mathbf{U}_n + \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i, \quad \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i := a_1 \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i - a_4 \dot{\mathbf{U}}_n - a_5 \ddot{\mathbf{U}}_n \\ \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^i &:= a_0 \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i - a_2 \dot{\mathbf{U}}_n - a_3 \ddot{\mathbf{U}}_n \end{aligned}$$

5) Cálculo del vector de fuerzas residuales

$$\mathbf{R}_{n+1}^i \approx \mathbf{F}_{n+1} - (1 - \alpha_B)\mathbf{M}\mathbf{U}_{n+1}^i - \alpha_B\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_n - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^i - \mathbf{K}_{n+1}^i \mathbf{U}_{n+1}^i$$

6) Si error \leq tol. definida \Rightarrow convergencia, actualización $t = t + \Delta t$, retorno a pto. 2)

7) Si no hay convergencia, se resuelve el sistema de ecuaciones definido por la matriz:

$$[\mathbf{K}_{n+1}^T] = \mathbf{K}_{n+1} + (1 - \alpha_B)a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C} \text{ para calcular } \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i = \mathbf{R}_{n+1}^{i-1} \left\{ [\mathbf{K}_{n+1}^T]^{i-1} \right\}^{-1}$$

8) Actualización de: $\mathbf{U}_{n+1}^i := \mathbf{U}_{n+1}^{i-1} + \Delta \mathbf{U}_{n+1}^i$, iter. $i = i + 1$, volver a pto. 5)

Cuadro 2.2: Algoritmo para la resolución del problema dinámico por el método de Bossak

C.2. Matrices de Masa y de Amortiguamiento

La matriz de masa asociada a una determinada conectividad nodal se define como: $\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N} \mathbf{N}^T d\Omega$, o de forma indicial como: $M_{ij} = \int_{\Omega} \rho N_i N_j d\Omega$, donde N es la función de forma de cada nodo y los índices $i, j = 1 \dots n$ recorren el total de nodos de la conectividad. En caso de utilizar una conectividad nodal de tres nodos (elemento triangular) en 2D con funciones de forma lineal, y efectuar la integración en el dominio Ω , resulta que la matriz de masa es: $\mathbf{M} = \frac{\rho A w}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, donde A es el área encerrada por los nodos de la conectividad y w es un parámetro propio de la cuadratura empleada, ver [44] y [9]. Cabe destacar que cada elemento de la matriz contiene los dos grados de libertad correspondientes a cada una de las dimensiones espaciales predefinidas.

Existen formas alternativas de las matrices de masa, en las que se realiza una condensación diagonal de las mismas (lumped mass matrix). Esto se obtiene por medio de varias metodologías posibles, algunas de las cuales se detallan en la referencia [44]. Una técnica frecuentemente utilizada, y aplicada en el entorno PFEM, es la suma de filas, lo cual conserva la masa total contenida en la conectividad m_{pq}^e y concentra dicha masa en los nodos que la constituyen. La formulación asociada a tal definición se detalla a continuación.

$$m_{pq}^e = \begin{cases} \delta_{ij} \int_{\Omega^e} \rho N_a d\Omega & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases} \quad (2.79)$$

La matriz de amortiguamiento \mathbf{C} , que como se indicó anteriormente no es utilizada en la formulación original del PFEM, se suele definir frecuentemente por medio del denominado amortiguamiento de Rayleigh, donde se asume que $\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$, es decir que se trata de una combinación lineal de las matrices de masa y de rigidez del sistema. Los parámetros a y b son arbitrarios y su correspondiente definición depende del comportamiento buscado en el amortiguamiento estructural, ver las referencias [44] y [9].

Capítulo 3

Problema de Contacto e Interacción

3.1. Introducción

El fenómeno de contacto o interacción entre cuerpos se encuentra presente en una innumerable cantidad de problemas de interés tecnológico, especialmente en aquellos relacionados con los procesos industriales como son los de conformado de piezas metálicas (forja, metalurgia de polvos, extrusión, etc.), el mecanizado de partes de diferentes tipos de materiales (corte, torneado, fresado, etc.), los procesos basados en tribología y fricción, etc. El mejor conocimiento y optimización de tales procesos requiere de la simulación numérica, y ésta por su parte, de una mayor adaptación de los modelos numéricos y algoritmos a los cada vez más exigentes y precisos requerimientos de la industria.

El fenómeno de interacción entre cuerpos involucra dos componentes: una normal y otra tangencial. La componente normal impone la condición de impenetrabilidad entre cuerpos, mientras que la componente tangencial sintetiza el fenómeno de fricción, que se opone a cualquier movimiento de deslizamiento tangencial a la superficie de contacto o a todo tipo de fuerza que lo induzca. La hipótesis adoptada en el presente apartado para la interpretación física del fenómeno de contacto coincide con la universalmente aceptada *hipótesis de rugosidad*, que a diferencia de la *hipótesis de adhesión*, obedece a la evidencia experimental al no depender del área de contacto [87].

El problema de contacto, de apariencia simple, presenta a la hora de su modelado y simulación numérica, complicaciones a nivel algorítmico y computacional que hacen de él un tema abierto que ofrece un campo de investigación permanente [105][102][86]. Se trata de un fenómeno intrínsecamente no lineal¹, en el que la transición de una situación de no contacto a otra de contacto se produce de forma abrupta, y de esta misma forma, se inducen cambios en las condiciones de contorno imperantes en un determinado sistema, tanto dentro como fuera del estado de equilibrio. Esta irregularidad del fenómeno surge como consecuencia de la imposición de la *condición de impenetrabilidad*, mediante la cual no se permite la interferencia o penetración de un cuerpo en otro, atendiendo así tanto al resultado empírico como a uno de los supuestos fundamentales de la teoría de los medios continuos. Estas características del contacto hacen que los campos de desplazamientos y de velocidades normales a una determinada interfaz no evolucionen con regularidad

¹El contacto introduce un comportamiento no lineal aún en problemas que son originalmente lineales, como es el caso del contacto estático entre un cuerpo deformable (elástico y lineal) y un obstáculo rígido, ambos con geometrías regulares y con desplazamientos pequeños.

o suavidad en el tiempo, tanto a lo largo de un fenómeno de impacto o durante el establecimiento y posterior progreso del contacto. De forma análoga, los desplazamientos y velocidades tangenciales asociados a fenómenos friccionales, tienden a ser discontinuos en los contornos donde se producen comportamientos de adherencia y deslizamiento tangencial (stick-slip) [9]. Sin embargo, los fenómenos de fricción, que se encuentran presentes en todos los problemas de contacto, pueden ser muchas veces despreciados (siempre que el proceso descrito lo permita) como consecuencia de su baja influencia en el resultado final y de las ventajas de cálculo que dicha simplificación aporta [105].

El capítulo se inicia con los apartados 3.2 y 3.3, en donde se hace una presentación formal del problema de contacto y se lleva a cabo un repaso de las principales metodologías utilizadas para resolverlo. Luego, en el apartado 3.4 se desarrolla y formula en detalle la metodología ACIM, la cual motiva el presente capítulo y representa uno de los aportes fundamentales del trabajo. En el punto 3.5 se efectúa la validación de la metodología ACIM mediante la resolución de un conjunto de tests y de problemas de referencia sobre contacto que contemplan diversos tipos y situaciones de contacto que plantean un amplio espectro de objetos de análisis y estudio.

3.2. Descripción física del problema

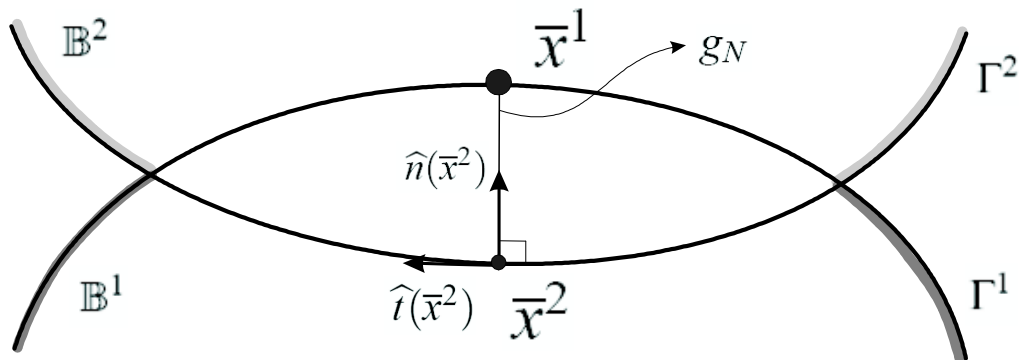


Figura 3.1: Esquema del contacto entre dos cuerpos. Proyección ortogonal desde un punto de un cuerpo al punto más cercano del otro

La manera estándar en que se plantea la resolución de un problema de contacto es mediante la medición del grado de penetración que existe entre un par de cuerpos que interactúan.

Un posible punto de partida podría establecerse en la situación que se esquematiza en la figura 3.1, donde se muestra la penetración de una región del cuerpo \mathbb{B}^1 dentro del cuerpo \mathbb{B}^2 . El punto $\mathbf{x}^1 \in \Gamma^1$ se encuentra a una distancia indicada con el nombre de g_N o gap en el interior de \mathbb{B}^2 , que es equivalente a la proyección normal del segmento que une los puntos $\mathbf{x}^1 \in \Gamma^1$ y $\bar{\mathbf{x}}^2 \in \Gamma^2$, donde $\bar{\mathbf{x}}^2$ es el punto que minimiza dicha distancia.

El vector unitario normal $\hat{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}^2)$ utilizado para efectuar la proyección ortogonal está asociado al punto $\bar{\mathbf{x}}^2 \in \Gamma^2$ y resulta ser normal al contorno Γ^2 en dicho punto. Este vector está relacionado con el cuerpo \mathbb{B}^2 porque ha sido considerado implícitamente como cuerpo maestro (master), típicamente rígido o de mayor rigidez en el contexto del contacto

unilateral², mientras que el cuerpo invasor \mathbb{B}^1 juega el papel de cuerpo esclavo (slave), habitualmente deformable o de menor rigidez y objeto de la imposición de la condición de impenetrabilidad³.

La función distancia normal con signo o gap se define como:

$$g_N(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^1 - \bar{\mathbf{x}}^2) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}^2) \geq 0 \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{X})$, siendo φ_t la función que describe el movimiento de $\mathbf{X} \in \mathbb{B}$ en el instante de tiempo actual t y $\hat{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}^2)$ el versor normal que apunta hacia el exterior de \mathbb{B}^2 . La interpenetración es advertida cuando $g_N(\mathbf{x}) < 0$, por lo cual la situación límite de tangencia entre los contornos de ambos cuerpos en un determinado punto de contacto, es efectiva cuando precisamente $g_N(\mathbf{x}) = 0$, existiendo una determinada separación cuando la función $g_N(\mathbf{x}) > 0$. El cálculo de la mínima distancia presenta dificultades en su correcta definición bajo ciertas situaciones de no suavidad del contorno del cuerpo o ante situaciones geométricas de no convexidad local [101], estos aspectos serán analizados y ampliados con mayor detalle en apartados subsiguientes.

En el caso de la fricción modelada con la clásica ley de Coulomb, se deben diferenciar dos situaciones: la de adhesión (stick) y la de deslizamiento tangencial (slip), sin dejar de lado el hecho de que en ambos casos el contacto normal se encuentra establecido. Cuando hay adherencia se exige que el desplazamiento o la velocidad relativos tangentes sean nulos hasta que la fuerza tangencial alcanza cierto límite, una vez alcanzado dicho límite, los contornos en contacto comienzan a deslizar uno sobre el otro.

La condición de adherencia puede ser concebida de forma similar a la de contacto normal, y por lo tanto es posible definir un gap en la dirección tangente que debe permanecer nulo. De ello resulta:

$$g_T(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^1 - \bar{\mathbf{x}}^2) \cdot \hat{\mathbf{t}}(\bar{\mathbf{x}}^2) = 0 \quad (3.2)$$

donde $g_T(\mathbf{x})$ describe el desplazamiento tangencial relativo en una dirección tangente al punto de contacto, $\hat{\mathbf{t}}(\bar{\mathbf{x}}^2)$ hace referencia al vector unitario tangente al contorno en el punto $\bar{\mathbf{x}}^2$, que fue hallado anteriormente al establecer el punto de mínima distancia al punto de contacto \mathbf{x} . Sin embargo, desde el punto de vista de las fuerzas tangenciales, el límite que diferencia el comportamiento de adherencia del de deslizamiento se define como:

$$\mathbf{P}_T = -\mu |P_N| \text{sign}(g_T) \quad (3.3)$$

donde \mathbf{P}_T es la fuerza tangencial, μ es el coeficiente de deslizamiento o de fricción que depende del par de materiales en contacto, P_N es la presión de contacto normal, g_T es

²En el estudio numérico del contacto existen dos enfoques, que dependen del grado de complejidad del análisis:

- Contacto unilateral o a un paso: el cuerpo esclavo no puede penetrar al maestro, pero este sí puede hacer lo propio con el cuerpo esclavo. Las fuerzas de contacto son obtenidas al analizar sólo los nodos de este último.

- Contacto bilateral o a dos pasos: a ninguno de los dos cuerpos le es permitido penetrar en el otro. Las fuerzas de contacto son calculadas al analizar la condición de impenetrabilidad desde ambos lados.

³Esta forma de describir a los cuerpos participantes en el contacto (master - slave), y al problema en sí mismo, se denomina contacto unilateral, mientras que la hipótesis de considerar dos cuerpos deformables con idéntica prioridad en la imposición de la condición de contacto se denomina contacto bilateral.

el desplazamiento relativo o deslizamiento tangencial y $sign(\cdot)$ es la función signo. Las hipótesis asumidas posteriormente y las diferentes estrategias adoptadas para llevar adelante la resolución del problema condicionarán la mayor o menor complejidad en la evaluación de la ec. 3.3. Cabe destacar que la ley de Coulomb de la ecuación 3.3 se suele regularizar mediante alguna función que evite el salto que se genera en \mathbf{P}_T . Dicho salto, surge como consecuencia de la existencia de pequeñas perturbaciones en la dirección de los desplazamientos relativos tangenciales cuando los mismos se encuentran alrededor de una situación de adherencia.

Introducción de las restricciones de fricción

En general, el fenómeno de fricción depende funcionalmente de variables como el movimiento tangencial relativo entre los contornos en contacto, la fuerza necesaria para imponer la condición de impenetrabilidad, las características físico-químicas de los contornos interactuantes, etc. Se manifiesta como una fuerza disipativa, que rompe la condición de conservación de la energía mecánica en el sistema y tiene, como característica fundamental, que se orienta con sentido opuesto al del movimiento. El modelo de fricción más utilizado y comprobado empíricamente para describir el comportamiento entre dos superficies sólidas es el Coulomb. Matemáticamente, este modelo puede ser representado por medio de un conjunto de restricciones que son una reinterpretación de las condiciones de Kuhn-Tucker provenientes del contexto general de la programación matemática, y en particular de la teoría de la plasticidad, tal como se enuncia en [28] y [94]. De forma resumida, tales restricciones se expresan como:

$$\phi^i := \|\mathbf{P}_T^i\| - \mu |P_N^i| \leq 0 \quad (3.4)$$

$$\mathbf{v}_T^i - \zeta^i \frac{\partial \phi^i}{\partial \mathbf{P}_T^i} = 0 \quad (3.5)$$

$$\zeta^i \geq 0 \quad (3.6)$$

$$\phi^i \cdot \zeta^i = 0 \quad (3.7)$$

donde la primera condición establece la ley de fricción de Coulomb, que en el caso de que μ (coeficiente de fricción) sea dependiente de la velocidad y/o de la presión, etc., admite la aplicación una ley más general de fricción. La tracción tangencial se define como: $\mathbf{P}_T := -\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} - P_N \hat{\mathbf{n}}$. La segunda y la tercera condición introducen una restricción sobre la tracción tangencial para que la misma sea opuesta a la dirección del deslizamiento, donde $\frac{\partial \phi^i}{\partial \mathbf{P}_T^i} = \frac{\mathbf{P}_T^i}{\|\mathbf{P}_T^i\|}$ define la regla de flujo y ζ^i al parámetro de consistencia. La cuarta y última condición, que es de tipo complementario al igual que en el caso de la componente normal del contacto, expresa que no se produce deslizamiento si no se ha alcanzado el valor máximo establecido en la 1^{ra} condición (ley de Coulomb). La interpretación física de esta condición es que para valores de la tracción menores al límite, no hay deslizamiento entre los contornos en contacto, mientras que sí lo hay para valores que lo igualen o superen.

Este modelo de fricción, puede representarse gráficamente (figura 3.2a) por medio del denominado cono de Coulomb, que admite una interpretación análoga a la función de fluencia de un modelo de plasticidad, ec. 3.4. En este caso, en un espacio definido por las tracciones tangenciales en las direcciones $\hat{\mathbf{T}}_1$ y $\hat{\mathbf{T}}_2$ (caso 3D) y $\hat{\mathbf{N}}$, se representa una

superficie de forma cónica que separa dos regiones. La zona interior al cono a lo largo del eje P_N es la que, al igual que en la plasticidad clásica, define la zona elástica, en la que no existe deslizamiento entre los contornos en contacto. La región exterior al cono indica los estados inadmisibles (carentes de interpretación física), mientras que todos los estados posibles que se sitúan sobre la superficie cónica definen el comportamiento plástico (disipativo) o de deslizamiento entre los contornos. La magnitud de las tracciones tangenciales resultantes depende del valor absoluto de la tracción normal, siendo el coeficiente de fricción μ el que determina la relación entre la magnitud de ambas tracciones (pendiente de la recta que determina al cono en la fig. 3.2b). Por su parte, la regla de flujo definida como $\frac{\partial \phi^i}{\partial \mathbf{P}_T^i}$, indica la dirección de los vectores de flujo.

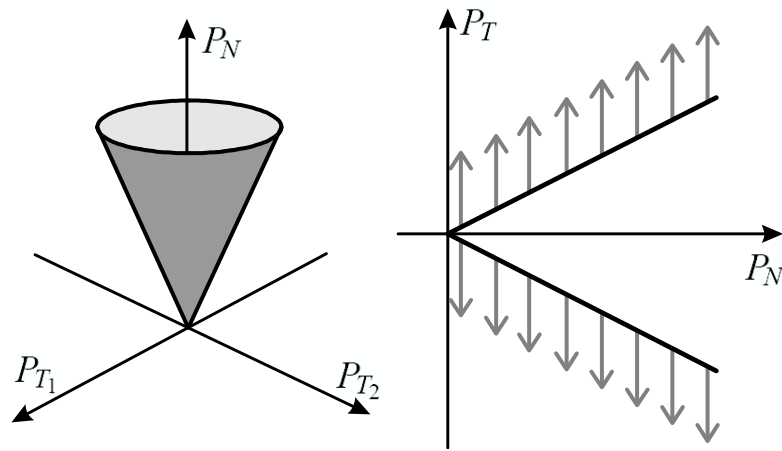


Figura 3.2: Cono de Coulomb perteneciente al modelo de fricción. a) Representación en un espacio de tracciones tangenciales y normales (3D). b) Proyección del cono en un espacio de 2D con sus vectores de flujo no asociados

Observaciones

- La función ϕ es interpretada como una función de fluencia típica de la plasticidad, mientras que \mathbf{v}_T hace referencia a la deformación tangencial que se produce como consecuencia del fenómeno de fricción.
- La regla de flujo planteada en la ec. 3.4 debe ser no asociada [94], ya que si fuera asociada, el vector de flujo aportaría una componente normal a las tracciones tangenciales (dilatancia), ver la figura 3.2b, lo cual terminaría alterando la tracción normal resultante de la condición activa de contacto [101][16].

3.3. Imposición de las restricciones de contacto

3.3.1. Generalidades

La condición de impenetrabilidad requerida para resolver el problema de contacto se caracteriza, como se dijo oportunamente, por expresarse matemáticamente por medio de la desigualdad $g_N(\mathbf{x}) \geq 0$. Esto implica que para poder imponer dicha condición, sea

necesario conocer exactamente dónde se encuentra activa, lo que obliga a determinar la ubicación y la extensión del contorno asociado a la condición de contacto en cada instante de tiempo. Se debe tener en cuenta que las fluctuaciones en la forma y extensión del contorno de contacto dependen, entre otras cosas, del tipo de proceso y materiales implicados en el modelado.

Tomando el resultado obtenido en el apartado 2.2.3 del capítulo 2, y bajo la condición de que las condiciones de contacto activas sobre un determinado contorno son conocidas y ciertas, el problema mecánico a resolver se reduce a encontrar los desplazamientos admisibles que satisfagan al funcional compuesto definido como:

$$G^i(\varphi^i, \boldsymbol{\eta}^i) + G_C^i(\varphi^i, \boldsymbol{\eta}^i) = 0 \quad (3.8)$$

donde $G^i(\varphi^i, \boldsymbol{\eta}^i)$ y $G_C^i(\varphi^i, \boldsymbol{\eta}^i)$ son los funcionales asociados al problema mecánico general y al problema de contacto respectivamente. Estos, a su vez se definen como:

$$G^i(\varphi^i, \boldsymbol{\eta}^i) = \int_{\mathbb{B}^i} \mathbf{P}^i \cdot \text{Grad}[\boldsymbol{\eta}^i] dV - \int_{\mathbb{B}^i} \rho \mathbf{B}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i dV - \int_{\mathbb{B}^i} \rho \dot{\mathbf{A}}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i dV - \int_{\Gamma^i} \overline{\mathbf{T}}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i d\Gamma \quad (3.9)$$

para el problema donde se consideran dos cuerpos separados y

$$G_C^i(\varphi^i, \boldsymbol{\eta}^i) = - \int_{\Gamma_C^i} \boldsymbol{\eta}^i \cdot \mathbf{P}_C^i \cdot \widehat{\mathbf{N}}^i d\Gamma \quad (3.10)$$

para el problema que implica el contacto entre dichos cuerpos. Adicionalmente, la condición de impenetrabilidad entre los cuerpos se define como:

$$g_N^i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (3.11)$$

$$P_N^i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (3.12)$$

$$P_N^i(\mathbf{x}) \cdot g_N^i(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.13)$$

Por lo tanto el análisis y cálculo del fenómeno de contacto se refiere básicamente a la estrategia utilizada para imponer las condiciones de incompresibilidad caracterizadas por las ecuaciones 3.11. La imposición de dichas condiciones puede efectuarse mediante un método que elimine las restricciones via el cálculo exacto de las incógnitas (fuerzas de contacto sobre el contorno sometido a la interacción) o por medio de un método que estime el valor de dichas incógnitas.

La primera opción se encuentra comprendida dentro de los denominados métodos no regularizados y corresponde específicamente al método de los *multiplicadores de Lagrange*. En este método, que debido a su relevancia conceptual será desarrollado en el siguiente apartado como aplicación concreta de los métodos no regularizados, se cumplen de forma exacta las restricciones por medio del cálculo explícito de las incógnitas que las satisfacen. Por otro lado, la segunda alternativa a la que se alude se refiere al grupo de los métodos regularizados. En estos no se intenta eliminar las restricciones de forma explícita, sino que las mismas se calculan a partir de otras variables primarias del problema (las tracciones asociadas al contacto son calculadas a partir de su variable de trabajo conjugada espacial:

la distancia normal). Existen varias metodologías agrupadas dentro de los métodos regularizados, pero por cobrar un mayor protagonismo en el posterior desarrollo del método ACIM, se hace aquí un especial hincapié en el llamado *método de penalización*, que será presentado en detalle en los siguientes apartados.

Como característica general, los métodos de regularización buscan la relajación de la restricción de la que son objeto, permitiendo pequeñas violaciones de dicha condición, lo que en el caso del contacto se traduce en permitir cierta penetración de los cuerpos involucrados. Obviamente, la formulación está ideada para tender hacia la minimización de dicho error, basándose en el concepto heurístico de que: a mayores penetraciones se requieren mayores fuerzas normales para forzar la separación de los cuerpos, y por ende, para corregir dentro de ciertos límites el no cumplimiento de la restricción.

3.3.2. Métodos no regularizados - Multiplicadores de Lagrange

La forma elegida para presentar tanto los métodos regularizados como los no regularizados, es por medio del estudio de un caso específico. Se define el siguiente problema de contacto entre dos cuerpos elásticos, donde la solución del problema es encontrar las trayectorias φ que minimizan un funcional de energía potencial $P(\varphi)$ bajo determinadas restricciones.

$$\underset{\varphi^1, \varphi^2}{MIN} P^1(\varphi^1) + P^2(\varphi^2) \text{ en } \Omega \quad (3.14)$$

$$g_N(\varphi^1(\mathbf{X})) \geq 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \Gamma^1 \quad (3.15)$$

$$\varphi^1 = \bar{\varphi}^1 \text{ en } \Gamma_\varphi^1 \quad (3.16)$$

$$\varphi^2 = \bar{\varphi}^2 \text{ en } \Gamma_\varphi^2 \quad (3.17)$$

donde Ω es el dominio unificado de ambos cuerpos, Γ_φ^i es el contorno donde se imponen los desplazamientos y g_N es la función gap definida con anterioridad. Considerando que $P = P^1 + P^2$ el problema puede reescribirse como:

$$\underset{\varphi}{MIN} P(\varphi) \quad (3.18)$$

$$g_N(\varphi(\mathbf{X})) \geq 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \Gamma \quad (3.19)$$

donde se asume que $\Gamma = \Gamma^1$ (contacto unilateral).

A partir de la definición formal de los multiplicadores de Lagrange, se considera que $P(\mathbf{X}_\Gamma)$ es un campo escalar cuyos argumentos son los n puntos del contorno Γ , de forma tal que: $\mathbf{X}_\Gamma = \{X_1, \dots, X_n\}$ tiene un extremo relativo cuando está sometido a m condiciones con $m < n$, entonces existen m escalares tales que $\nabla P = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla(P(X_i))$ en cada punto extremo [5].

En función de lo dicho, el lagrangeano asociado al problema enunciado toma la siguiente forma:

$$\mathcal{L}(\varphi, \lambda_N) = P(\varphi) + \int_{\Gamma} \lambda_N g_N(\varphi) d\Gamma \quad (3.20)$$

donde $\lambda \in \mathbb{Q}$, siendo $\mathbb{Q} = \{\lambda \in \mathbf{L}^2(\Gamma) \mid \lambda \geq 0\}$ el espacio de los multiplicadores de Lagrange, para los cuales la solución es un punto de ensilladura de \mathcal{L} , donde se verifican las siguientes condiciones:

$$D_{\boldsymbol{\eta}}[\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi}, \lambda_N)] = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \quad (3.21)$$

$$\lambda_N g_N = 0 \quad (3.22)$$

$$\lambda_N \leq 0 \quad (3.23)$$

$$g_N \geq 0 \quad (3.24)$$

en las que el operador $D_{\boldsymbol{\eta}}[\mathcal{L}]$ indica la derivada de Gateaux del lagrangeano respecto de los desplazamientos en la dirección $\boldsymbol{\eta} \in \nu$. La primera expresión indica la condición de punto crítico donde todas las derivadas direccionales son nulas, y las demás expresiones son las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) del problema de optimización 3.14. La expansión del problema 3.21 resulta en:

$$D_{\boldsymbol{\eta}}[P(\boldsymbol{\varphi})] + \int_{\Gamma} \lambda_N D_{\boldsymbol{\eta}}[g_N(\boldsymbol{\varphi})] d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \nu \quad (3.25)$$

$$\int_{\Gamma} \delta \lambda_N g_N(\boldsymbol{\varphi}) d\Gamma = 0 \quad (3.26)$$

donde la ecuación 3.25 es la forma explícita de la ec. 3.21 sobre la ec. 3.20, mientras que la segunda expresión indica que $\lambda_N \neq 0$ sólo si la restricción se encuentra activa, y en consecuencia $g_N = 0$. En resumen, el objetivo es encontrar las $(\boldsymbol{\varphi}, \lambda_N) \in \nu \times \mathbb{Q}$ que satisfagan las condiciones del problema.

Observaciones

- Los multiplicadores de lagrange λ_N , que como es de esperarse dependen del punto \mathbf{X} al cual se encuentran ligados al par $\lambda_N(\mathbf{X}) - g_N(\mathbf{X})$, deben ser interpretados como el valor exacto de las tracciones normales que garantizan la imposición de la restricción de contacto: $g_N \geq 0$ en dicho punto del contorno. A partir de lo cual se deduce, sobre la base de la ecuación 3.10, la validez de la siguiente equivalencia:

$$G_C^{mo-reg}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Gamma_C} \lambda_N D_{\boldsymbol{\eta}}[g_N(\boldsymbol{\varphi})] d\Gamma \quad (3.27)$$

- donde los desplazamientos admisibles $\boldsymbol{\eta} = \delta\boldsymbol{\varphi}$ se interpretan como variaciones sobre el campo de los desplazamientos que solucionan el problema y la variación $D_{\boldsymbol{\eta}}[g_N(\boldsymbol{\varphi})]$ es la derivada direccional de g_N en la dirección de los desplazamientos virtuales supuestos $\boldsymbol{\eta}$.
- Los multiplicadores de lagrange sólo tienen un valor no nulo en aquellos puntos del contorno Γ en los que la condición de contacto se encuentra activa.

- Los multiplicadores de lagrange amplían el número de incógnitas del problema en tanto que la condición que expresa la restricción se encuentre activa.
- El problema expresado en 3.25, puede ser ampliado para incluir los efectos de la fricción considerando la descomposición de las tracciones de contacto $\mathbf{P} = P_N \cdot \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{P}_T$, a partir de lo cual el nuevo problema es el siguiente:

$$D_{\boldsymbol{\eta}}[P(\boldsymbol{\varphi})] + \int_{\Gamma} \lambda_N D_{\boldsymbol{\eta}}[g_N(\boldsymbol{\varphi})] d\Gamma + \int_{\Gamma} \lambda_T D_{\boldsymbol{\eta}}[g_T(\boldsymbol{\varphi})] d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \nu \quad (3.28)$$

$$\int_{\Gamma} \delta \lambda_N g_N(\boldsymbol{\varphi}) d\Gamma = 0 \quad (3.29)$$

- donde se deben encontrar las $(\varphi, \lambda_N) \in \nu \times Q$ que satisfagan las condiciones del problema y las λ_T que cumplan las siguientes condiciones:

$$\phi^i := |\boldsymbol{\lambda}_T| - \mu |\boldsymbol{\lambda}_N| \leq 0 \quad (3.30)$$

$$\mathbf{v}_T^i - \zeta \frac{\partial \phi^i}{\partial \boldsymbol{\lambda}_T} = -\zeta \text{sign}(\boldsymbol{\lambda}_T) \hat{\mathbf{T}}^i = 0 \quad (3.31)$$

$$\zeta \geq 0 \quad (3.32)$$

$$\phi^i \zeta = 0 \quad (3.33)$$

en donde los multiplicadores de lagrange representan el valor exacto de las fuerzas normales y tangenciales que garantizan la imposición de las condiciones de contacto y de fricción.

3.3.3. Métodos regularizados - Penalización

Para exponer la idea central con la que fueron concebidos los métodos regularizados se recurre a enunciar el mismo problema al que se hacía referencia en el apartado 3.3.2, en particular a su forma expresada en 3.18. La resolución del mismo se plantea mediante la variante más intuitiva y utilizada de las metodologías de regularización: el método de penalización.

Tomando como punto de partida el siguiente problema general:

$$\text{MIN}_{\boldsymbol{\varphi}} P(\boldsymbol{\varphi}) \quad (3.34)$$

$$g_N(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})) \geq 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \Gamma_C \quad (3.35)$$

que representa un problema genérico de optimización de una función potencial u objetivo $P(\boldsymbol{\varphi})$ sujeta a la restricción $g_N(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})) \geq 0$. La versión regularizada del mismo problema se puede escribir como:

$$\text{MIN}_{\boldsymbol{\varphi}} P(\boldsymbol{\varphi}) + \int_{\Gamma_C} \Xi [g_N(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}))] d\Gamma \quad (3.36)$$

donde a la función objetivo P se le suma una función Ξ que penaliza la violación de la restricción en el conjunto de puntos $\forall \mathbf{X} \in \Gamma_C$. En caso de obtener la penalización exacta en todos los puntos involucrados, la solución alcanzada por el potencial extendido, ecuaciones 3.18 y 3.27, satisface estrictamente el problema 3.18. Por otra parte, la solución del problema 3.36 debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$D_{\boldsymbol{\eta}}[P(\boldsymbol{\varphi})] + \int_{\Gamma_C} \frac{\partial \Xi(g_N)}{\partial g_N} D_{\boldsymbol{\eta}}[g_N(\boldsymbol{\varphi})] d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \nu \quad (3.37)$$

donde $\boldsymbol{\eta}$ son de nuevo los desplazamientos admisibles definidos con anterioridad y ν coincide con la definición dada en 2.7. Adicionalmente debe considerarse la condición de que $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}) = 0$ para los puntos $\mathbf{X} \in \Gamma_u$.

La interpretación del resultado aportado por esta metodología al resolver la ecuación 3.37, se manifiesta al expresar de forma general:

$$P_N(g_N) = \frac{\partial \Xi(g_N)}{\partial g_N} \quad (3.38)$$

donde $P_N(g_N)$, de acuerdo a la ecuación 3.10, deja de ser una incógnita del problema y pasa a ser calculado de forma aproximada por una función regularizada de las distancias normales entre los puntos en contacto. En consecuencia, siguiendo el mismo razonamiento que en el caso de los multiplicadores de lagrange, la ecuación 3.10 se puede expresar, para el caso del método de penalización como:

$$G_C^{reg}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Gamma_C} P_N D_{\boldsymbol{\eta}}[g_N(\boldsymbol{\varphi})] d\Gamma \quad (3.39)$$

Observaciones

- El método de penalización puede ser considerado como una aproximación al método de los multiplicadores de lagrange.
- Tanto el método de los multiplicadores de lagrange como el de penalización son métodos mixtos en el sentido de que en principio son desconocidos tanto las fuerzas como los desplazamientos en el contorno de contacto [101][44].
- De manera análoga a lo expuesto en el apartado 3.3.2, es posible incorporar los efectos de la fricción en la formulación regularizada. Para ello, siguiendo los conceptos de [28] y [94], se comienza definiendo la tracción tangencial como:

$$\mathbf{P}_T = -K_T \left[\mathbf{v}_T - \mathbf{v}_T^d \right] \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (3.40)$$

donde v_T es la velocidad relativa tangente entre los contornos en contacto y v_T^d es la componente de dicha velocidad asociada al deslizamiento.

$$\phi^i := \|\mathbf{P}_T\| - \mu |P_N| \leq 0 \quad (3.41)$$

$$\mathbf{v}_T^d - \zeta \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{P}_T} = 0 \quad (3.42)$$

$$\zeta \geq 0 \quad (3.43)$$

$$\phi \cdot \zeta = 0 \quad (3.44)$$

en consecuencia, en esta metodología se diferencian dos estados posibles: un estado predictor de características elásticas que se calcula sobre la base de la ecuación 3.40 y un estado corrector plástico donde se calcula el valor del parámetro ζ en función de la tracción tangencial elástica, la tracción normal debida al contacto y el criterio de deslizamiento o flujo utilizado, ec. 3.41. El parámetro de regularización $K_T \geq 0$ tiene una interpretación similar a la del caso del contacto normal, con lo que puede considerarse en general como un conjunto de parámetros de regularización $s(X)$ dependientes del punto analizado. La contribución del término de contacto en el funcional del problema 3.34, con los efectos de la fricción incluidos, se puede expresar como:

$$G_C^{reg}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\Gamma_C} (P_N D_{\boldsymbol{\eta}}[g_N(\boldsymbol{\varphi})] + P_T D_{\boldsymbol{\eta}}[\mathbf{v}_T(\boldsymbol{\varphi})]) d\Gamma \quad (3.45)$$

- Cuando $K_T \rightarrow \infty$ se recupera el comportamiento rígido plástico del planteo general, ec. 3.4, y del caso no regularizado, ec. 3.30. Por lo tanto, en el caso no regularizado, todas las deformaciones que se producen son inelásticas, mientras que en el regularizado se admite una cierta cantidad de deformaciones elásticas, que dependen de forma inversamente proporcional a la magnitud de K_T .
- En la formulación del método de penalización puede incluirse adicionalmente un parámetro de penalización $q(X)$ dependiente de cada punto $\mathbf{X} \in \Gamma_C$, de forma que la función de penalización adquiere la siguiente forma: $\Xi [g_N(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}), \mathbf{q}(\mathbf{X}))]$.

Método de penalización clásico

Teniendo en cuenta todos los componentes anteriormente presentados, se puede expresar una forma estándar y general del método de penalización aplicado al contacto normal, donde se calculan las tracciones normales en función del parámetro k de penalización y de la distancia normal con signo o gap g_N , ver el cuadro 3.1, donde se definen: la función $\langle x \rangle$ denominada paréntesis de Macaulay, la función $H(x)$ de Heaviside⁴ y se tiene en cuenta que $H(-g_N) \langle -g_N \rangle = \langle -g_N \rangle$.

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

⁴La participación de la función de Heaviside (derivada de la función de Macaulay) en la formulación del método de penalización para el cálculo de las tracciones de contacto introduce un salto o escalón en los campos de desplazamientos y velocidades que rompen la linealidad original del problema [9].

$$\begin{aligned}\Xi(g_N; k) &= \frac{k}{2} \langle -g_N \rangle^2 \\ \frac{\partial \Xi}{\partial g_N} &= \frac{k}{2} 2 \langle -g_N \rangle H(-g_N)(-1) = -k \langle -g_N \rangle \\ P_N(g_N, k) &= \frac{\partial \Xi}{\partial g_N} = -k \langle -g_N \rangle\end{aligned}$$

Cuadro 3.1: Método de penalización estándar - Cálculo de las tracciones normales de contacto

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

Observaciones

- *El incremento en el valor del parámetro de penalización hace que la magnitud de la tracción aumente para una penetración constante. Si $k \rightarrow \infty$, entonces $P_N \rightarrow \lambda_N$ y $g_N \rightarrow 0$, alcanzándose en el límite, la imposición exacta de la condición de impenetrabilidad.*
- *Existe sin embargo una limitación práctica en el valor teóricamente infinito del parámetro de penalización. Este viene dado por los problemas numéricos derivados del mal condicionamiento de la matriz de rigidez global del sistema.*
- *Esta definición de la P_N permite la libertad en la elección de una función gap conveniente según el método específico que se utilice.*

3.3.4. Discretización del problema de contacto

En el presente apartado se muestra de manera general la forma discreta que adopta el término de contacto en el problema de contacto sin fricción 3.34. Se hace referencia únicamente al caso de los métodos regularizados, ya que como se dijo en apartados previos, la metodología propuesta en este trabajo pertenece a dicho grupo de métodos.

La ecuación 3.39 puede ser discretizada considerando: que el espacio funcional de los desplazamientos admisibles ν es aproximado por medio de un subespacio de dimensión finita $\nu^h \subset \nu$, de forma que cuanto menor sea h mayor es el espacio donde se encuentra la solución y, por ende, más precisa es la misma (en PFEM un menor h implica un mayor número de partículas empleadas para describir el comportamiento del continuo). Como consecuencia, ν^h permite una aproximación de \mathbb{B} en \mathbb{B}^h y de Γ en Γ^h , todos descritos en la configuración de referencia. Como no es posible disponer de toda la información en cada punto \mathbf{X} del dominio, sino que deben ser calculados de forma aproximada a partir de la información conocida en los \mathbf{X}^h , se define para su aproximación la siguiente función de interpolación [44] [9]:

$$\mathbf{x}^h(\mathbf{X}, t) = \sum_{i=1}^p \mathbf{x}_i(t) N_i(\mathbf{X}^h) \quad (3.48)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^h(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X}^h + \sum_{i=1}^p \mathbf{u}_i(t) N_i(\mathbf{X}^h) \quad (3.49)$$

donde p es el número de nodos o partículas de la discretización y N_i son las funciones de forma pertenecientes al tipo de elementos considerados [9]. Suponiendo además que los desplazamientos virtuales $\boldsymbol{\eta}$ son interpolados mediante una expresión análoga a la de la ecuación 3.48 (método de Galerkin), se tiene:

$$D_{\boldsymbol{\eta}^h} [g_N(\boldsymbol{\varphi}^h)] = \nabla_{\boldsymbol{\varphi}} [g_N(N(\mathbf{X}) \cdot \boldsymbol{\varphi})] \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \quad (3.50)$$

donde $\boldsymbol{\eta}^h = N(\mathbf{X}) \cdot \boldsymbol{\varphi}$ y $\delta \boldsymbol{\eta}^h = N(\mathbf{X}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}$

El problema variacional discreto a resolver es encontrar los $\boldsymbol{\varphi}^h$ para cualquier $\boldsymbol{\eta}^h$ de forma que se cumpla (haciendo nuevamente referencia al problema 3.34):

$$G(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h) + G_C(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h) = 0 \quad (3.51)$$

Teniendo en cuenta las anteriores definiciones, la forma débil discreta adoptada por el término de contacto del problema 3.51, para el caso regularizado, se puede expresar como:

$$G_C^{reg,h}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h) = \int_{\Gamma_C} P_N [g_N(\boldsymbol{\varphi}^h(\mathbf{X}))] D_{\boldsymbol{\eta}} [g_N(\boldsymbol{\varphi}^h(\mathbf{X}))] \cdot \boldsymbol{\eta}^h d\Gamma \quad (3.52)$$

$$G_C^{reg,h} = \left(\int_{\Gamma_C} P_N \nabla_{\boldsymbol{\varphi}} (g_N) d\Gamma \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}^h \quad (3.53)$$

Observaciones

- *En los métodos regularizados como en el de penalización, sólo es necesario efectuar la discretización de las variables de desplazamientos (variables primarias del problema) para obtener la versión discreta del problema. Dichas variables de desplazamientos se encuentran enmascaradas en la definición de la función gap adoptada.*
- *En el caso de los métodos no regularizados como el de los multiplicadores de lagrange, para llegar a la forma discreta del problema es necesario discretizar las variables de desplazamientos, sus variaciones y los multiplicadores de lagrange.*

3.4. El Método de la Interfaz de Anticipación del Contacto (ACIM)

3.4.1. Introducción

La metodología ACIM [70], se presenta a continuación con el objetivo de proponer una estrategia alternativa para encarar la resolución del clásico problema de contacto.

Este nuevo enfoque, hace un especial hincapié en la generalización de las zonas de contacto mediante la utilización de una *interfaz de contacto* que conecta las regiones más cercanas de los contornos de diferentes cuerpos. La existencia de la citada interfaz permite llevar a cabo el seguimiento de la evolución de los contornos conectados a lo largo de un determinado incremento de tiempo. Por otra parte, la misma interfaz es utilizada por la metodología ACIM como herramienta para imponer las condiciones de contacto y de fricción. Para hacer efectivo esto último, el ACIM emplea una formulación que se basa en la metodología de regularización clásica, y en particular a una variante del método de penalización descrito anteriormente en el apartado 3.3.3.

En primer lugar, en los apartados subsiguientes, se explica brevemente la estrategia utilizada para llevar a cabo la creación de la interfaz de contacto, luego se describen sus principales características y propiedades, seguidamente se desarrolla e ilustra en detalle la formulación asociada a la metodología que tiene como fin el cálculo de las fuerzas debidas al contacto y más tarde se enuncian los algoritmos correspondientes a su implementación. Posteriormente, se lleva a cabo la validación del método por medio de la resolución de casos y problemas de referencia, finalmente se cierra el capítulo con una discusión crítica acerca de las ventajas, limitaciones y recomendaciones advertidas a lo largo de la formulación, desarrollo, implementación y validación de la metodología. De manera complementaria, en los Apéndices I, II y III asociados al presente capítulo, se profundiza en lo que respecta al desarrollo del método utilizado para la generación de la interfaz de contacto, a la estrategia utilizada para encarar y resolver ciertos casos particulares de contacto y al cálculo de los operadores matemáticos relativos a las diferentes formulaciones desarrolladas.

3.4.2. Creación de la interfaz de contacto

Las metodologías y algoritmos de contacto se dividen en general, en dos fases que se llevan a cabo de forma secuencial:

1. *Búsqueda espacial de los objetos que tienen posibilidades de entrar en contacto (búsqueda de las zonas de contacto)*
2. *Determinación de pares de objetos o cuerpos que se encuentran en contacto (imposición de la condición de contacto)*

La estrategia seguida por la metodología ACIM para llevar a cabo la búsqueda de las zonas de contacto se desarrolla en el presente apartado, mientras que la imposición de la condición de contacto efectivo se describe en los apartados subsiguientes.

Para poder aplicar cualquiera de las metodologías de contacto existentes, es necesario conocer en qué regiones de los contornos de los cuerpos involucrados existen posibilidades de que el fenómeno de contacto se produzca. Por lo tanto, en todos los casos es preciso realizar una búsqueda global del contacto y definir, siguiendo algún criterio geométrico, un conjunto de relaciones entre contornos. El criterio geométrico más utilizado es el de la mínima distancia, el cual es dependiente de la topología local del contorno de cada cuerpo. La complejidad inherente de los algoritmos de búsqueda se ve incrementada en aquellos casos donde:

- Se presentan cuerpos con geometrías de espesor reducido o nulo (membranas, láminas, etc.) donde el contacto puede producirse en cualquiera de sus caras.

- Cuando se permite la existencia de autocontacto (entre diferentes partes de un mismo cuerpo).
- En los casos en los que la definición de la mínima distancia es ambigua.
- Cuando se trata de problemas con grandes desplazamientos y/o deformaciones, [104][68].

Siempre que se habla de algoritmos de búsqueda, su grado de dificultad se asocia directamente con el costo computacional traducido inmediatamente en tiempo de cálculo, el cual se ve multiplicado en tantas veces como sea necesario efectuar la búsqueda a lo largo de la simulación. En consecuencia, en la bibliografía dedicada al tema, se habla por lo general de costos computacionales que son de orden $O(N \log N)$, donde N representa el número total de nodos sobre los que se realiza la búsqueda. Para profundizar más acerca de este tema, en la referencia [101] puede encontrarse un breve recorrido cronológico y descripción de los métodos de búsqueda de contacto más destacados.

La *interfaz de contacto* se define como un conjunto de elementos construidos entre los contornos de los cuerpos que pueden potencialmente entrar en contacto. Los elementos resultan ser triángulos de tres nodos (2D), los cuales tienen la característica de tener dos de sus nodos en un contorno y el otro nodo en el otro contorno, ver la figura 3.3. La interfaz de contacto relaciona, en consecuencia, zonas de los contornos de cada par de cuerpos analizados.

El método ACIM se basa en el hecho de que existe una interfaz de contacto entre los cuerpos en potencial contacto. La correcta construcción de la interfaz contiene implícitamente la solución del problema de búsqueda del contacto, y es la vía por la cual se impone más tarde la condición de contacto. La interfaz de contacto está formada por las zonas de los contornos de cada par de cuerpos donde el contacto puede llegar a establecerse, dicha zona se define como *zona de contacto potencial*. Por otra parte, la zona de contacto potencial correctamente definida y delimitada, incluye las zonas de los contornos donde la condición de contacto estará activa, si ésta efectivamente se produjera. Dicha zona se denomina *zona de contacto activo*. Debe aclararse que el número de elementos que definen esas zonas está fuertemente condicionado al tipo de topologías existentes (geometría de los cuerpos involucrados).

Los métodos habitualmente utilizados para la búsqueda de las zonas de contacto presentan, bajo determinadas situaciones geométricas, problemas de falta de unicidad e indeterminación de la mínima distancia entre contornos. Algunas de esas situaciones, como así también la solución ofrecida por el método ACIM, se muestra esquemáticamente en la figura 3.4. El objetivo y la principal ventaja del presente método, son el extender la visibilidad del fenómeno de interacción potencial entre cuerpos a zonas más amplias de los contornos. Como consecuencia de ello, el concepto de mínima distancia entre puntos específicos de cada par de contornos se amplía al de *zonas de mínima distancia*. Dichas zonas quedan delimitadas por medio de la interfaz de contacto que caracteriza a la metodología ACIM.

Por otra parte, en la figura 3.5, se puede observar la existencia de una interfaz que relaciona a dos cuerpos (uno negro y otro gris) con geometrías completamente generales. Dicha interfaz (gris claro) se extiende a lo largo de diferentes zonas de los cuerpos que

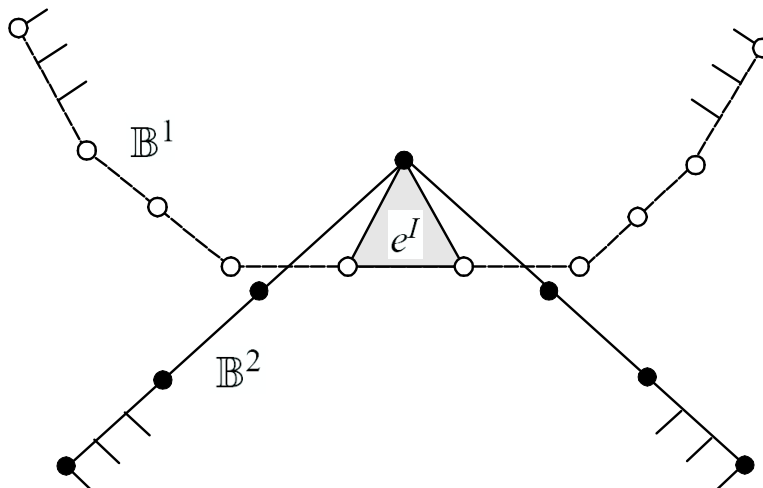


Figura 3.3: Esquema de uno de los elementos de interfaz de contacto construido entre los contornos de dos cuerpos

comparten entre sí la única condición de cercanía. Puede advertirse además, en cada una de las zonas cóncavas del cuerpo más oscuro (internas y externas), la existencia de una interfaz (transparente) que relaciona dicho cuerpo consigo mismo (interfaz de autocontacto). Cabe destacar que ambas interfaces se generan de forma independiente y a priori no interactúan entre sí, sino que cada una de ellas se utiliza para resolver el problema de contacto de los contornos que relacionan, y la solución final del problema resulta de la suma de cada uno de los efectos independientes. En consecuencia, las conectividades que definen cada interfaz no son necesariamente conformes (sin solapes) entre sí, ya que son generadas independientemente para cada par de cuerpos⁵.

Determinación de las conectividades de la interfaz de contacto

La creación de la interfaz se obtiene a partir de los puntos que definen los contornos de los cuerpos. Tanto los contornos como la condición de interior y exterior de cada cuerpo deben ser respetados y mantenidos al crear la interfaz, ya que de esto depende la correcta solución del problema original. El método basado en diagramas de Voronoï - triangulaciones de Delaunay, que fue desarrollado en el apartado 2.3 del capítulo 2, es capaz de crear el envoltorio convexo de conectividades asociado a un conjunto determinado de puntos (convex hull). Sin embargo, como se explicó oportunamente, dicho método no logra en su forma original, conservar estrictamente un determinado contorno. Esta afirmación puede ser fácilmente verificada si se considera el hecho de que el cumplimiento arbitrario de una condición geométrica, como lo es la conservación irrestricta de un contorno, altera la búsqueda de la situación óptima llevada a cabo por el método de Delaunay puro, ya que no permite el cumplimiento de algunas de sus propiedades intrínsecas, ver el apartado 2.3 del capítulo 2 y la referencia [67].

La forma utilizada para efectuar la construcción de la interfaz de contacto exterior a

⁵En el caso de la auto-interacción, el par de cuerpos en cuestión se reduce al análisis del cuerpo consigo mismo.

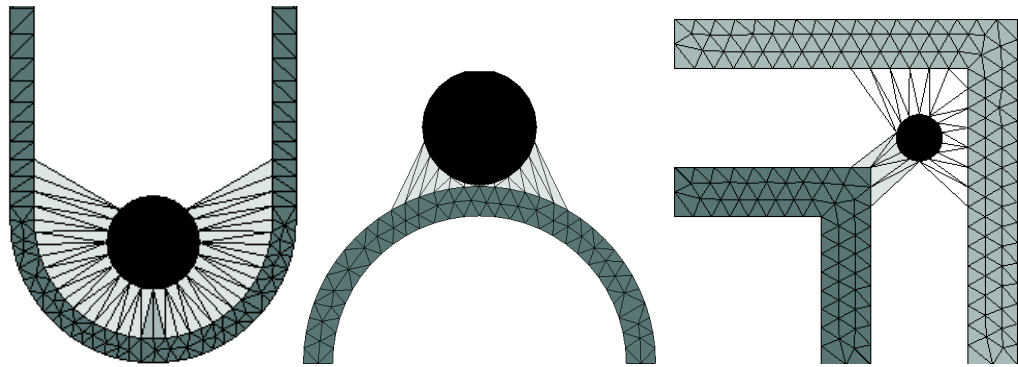


Figura 3.4: Situaciones geométricas que pueden generar ambigüedad en la búsqueda estándar del contacto y solución ofrecida por la interfaz de contacto del método ACIM a las mismas

los cuerpos, tomando como punto de partida sus contornos y respetándolos, es mediante el *método de Delaunay con restricciones* (CDT) [22]. Dicha metodología, que se desarrolla someramente en el Apéndice I de este capítulo, se siguen básicamente los siguientes pasos:

1. Calcular la triangulación de Delaunay estándar entre los puntos de los contornos (conectividades que definen el convex-hull).
2. Imponer las restricciones que surgen del cumplimiento de los contornos de los cuerpos (segmentos que los definen), ver el Apéndice I.

Para llevar adelante el primero de los pasos es necesario hacer uso de alguno de los algoritmos masivamente difundidos para implementar el método de los diagramas de Voronoï - triangulaciones de Delaunay. Para ello es indispensable cumplir con la condición de no colinealidad entre tres puntos que se conectan entre sí, o lo que es lo mismo, que dichos puntos se encuentren sobre el contorno de una circunferencia vacía (que no contenga otros puntos en su interior) de Delaunay [67][37]. Sin embargo, la observación y el análisis de una típica situación de contacto efectivo entre los contornos de dos cuerpos, implica la tangencia de los mismos en el/los puntos en contacto. Lo cual, llevado a una condición discreta de puntos pertenecientes a ambos contornos, a los que hay que conectar exteriormente, puede presentar casos donde las distancias entre nodos $\delta_n \rightarrow 0$, lo cual implica en el límite la colinealidad, ver la figura 3.6 (geometría original $\Gamma^1 \in \mathbb{B}^1$ y $\Gamma^2 \in \mathbb{B}^2$).

Para evitar esta restricción geométrica de partida en la generación de la interfaz, se procede inicialmente a realizar una transformación geométrica basada en una pequeña reducción del contorno del par de cuerpos analizados. Dicha reducción se efectúa moviendo a cada nodo del contorno en su dirección normal asociada y en sentido contrario a dicha normal, es decir hacia el interior del cuerpo, ver la figura 3.6. La transformación de reducción, que equivale a la típica operación de offset del CAD, puede expresarse como: $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P} - f \cdot \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{P})$, donde \mathbf{P} y $\hat{\mathbf{P}}$ son las coordenadas geométricas del punto en su posición original y reducida respectivamente, $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{P})$ es un vector unitario normal asociado al nodo \mathbf{P} y f es un factor de intensidad que regula la distancia que se mueve el nodo como consecuencia de la transformación en la dirección normal. El valor utilizado para definir el

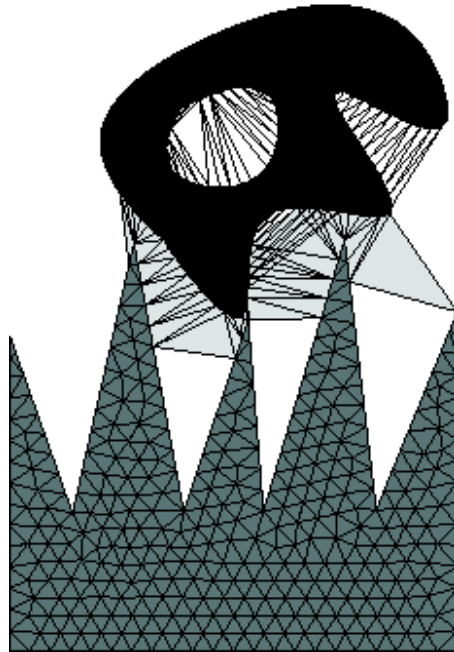


Figura 3.5: Detalle de las interfaces de contacto generadas a partir de dos cuerpos con geometrías irregulares con la inclusión adicional del autocontacto

factor f , debe garantizar la correcta creación de un espacio mínimo para la generación de la interfaz. Dicho valor se suele considerar como un porcentaje (10-50 %) del tamaño de los elementos en el contorno.

Observaciones

- *El efecto de la transformación geométrica de reducción sólo tiene implicancias relativas a la generación de la conectividad de la interfaz de contacto, por lo que para la resolución del problema de contacto se utiliza la posición real de los nodos del contorno. Esto quiere decir que el problema de contacto a resolver es único y sólo está asociado a los contornos de los cuerpos que interaccionan.*
- *La utilización del CDT en la generación de la interfaz de contacto permite relacionar mediante conectividades los nodos de diferentes contornos respetando en todo momento estrictamente la topología existente, limitando la acción del algoritmo de Delaunay puro, que podría terminar generando un convex-hull o conectando regiones no deseadas de los contornos (ver el Apéndice I).*

3.4.3. Características de la interfaz de contacto

Una vez considerada la creación de la interfaz de contacto tal como se explicó en el apartado anterior, en el presente se procede a analizar y explotar sus características y propiedades para buscar una solución conveniente al problema originalmente planteado en 3.1. Como punto de partida se considera la situación en la que se tienen dos cuerpos

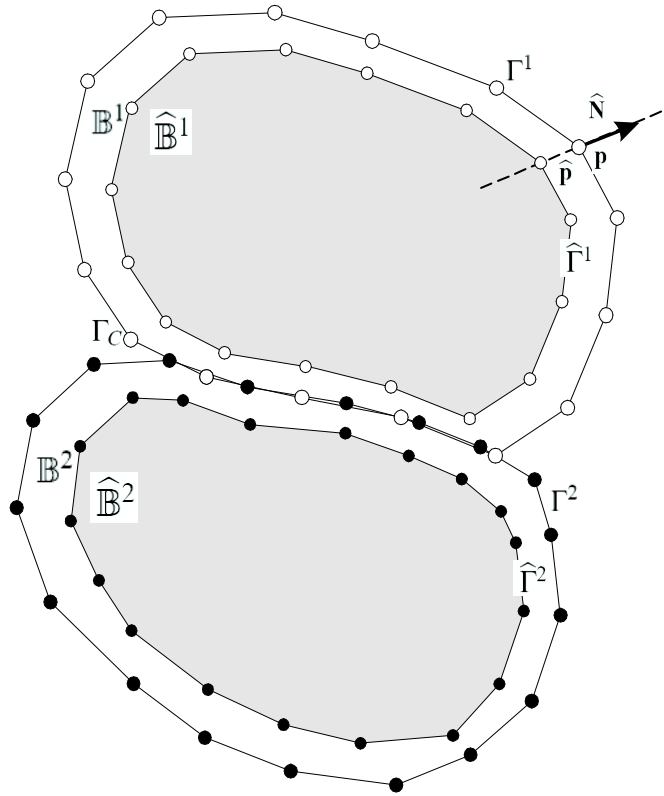


Figura 3.6: Esquema de una típica situación de contacto, geometría original y transformación geométrica de reducción

\mathbb{B}^1 y \mathbb{B}^2 , los que se encuentran a una distancia cercana y en inminente contacto, y a los que se les ha generado una interfaz de contacto \mathbb{B}^I , ver la figura 3.7a-b.

En la metodología ACIM, la interfaz de contacto tiene como objetivo relacionar y acoplar cuerpos diferentes que se encuentran interactuando de forma activa o potencial. La naturaleza de su construcción (circunferencias vacías en la triangulación de Delaunay y CDT), permite afirmar que no existen nodos en el interior de la interfaz. En consecuencia, los contornos se encuentran unidos por la interfaz mediante conectividades simples. El concepto de conectividad simple hace alusión a que a priori cada elemento de la interfaz conecta partículas de los dos cuerpos⁶, tal como se puede apreciar en la interfaz \mathbb{B}^I de la figura 3.7a-b.

3.4.4. El elemento de interfaz

En cada una de las conectividades simples o elementos de la interfaz se deben distinguir las partículas de uno y otro cuerpo, lo cual es una tarea trivial, ya que cada partícula o nodo tiene asociadas todas sus características y propiedades. En la figura 3.8 se puede observar en mayor detalle al elemento $e^I \in \mathbb{B}^I$, cuyo nodo superior $\mathbf{X}_p^1 \in \mathbb{B}^1$, mientras que los nodos $\mathbf{X}_{q_1}^2$ y $\mathbf{X}_{q_2}^2 \in \mathbb{B}^2$, tal como lo indican sus superíndices. El elemento e^I posee

⁶El concepto puede ser ampliado luego al caso de conectar exteriormente partículas de un mismo cuerpo a fin de encontrar la auto-interacción o autocontacto.

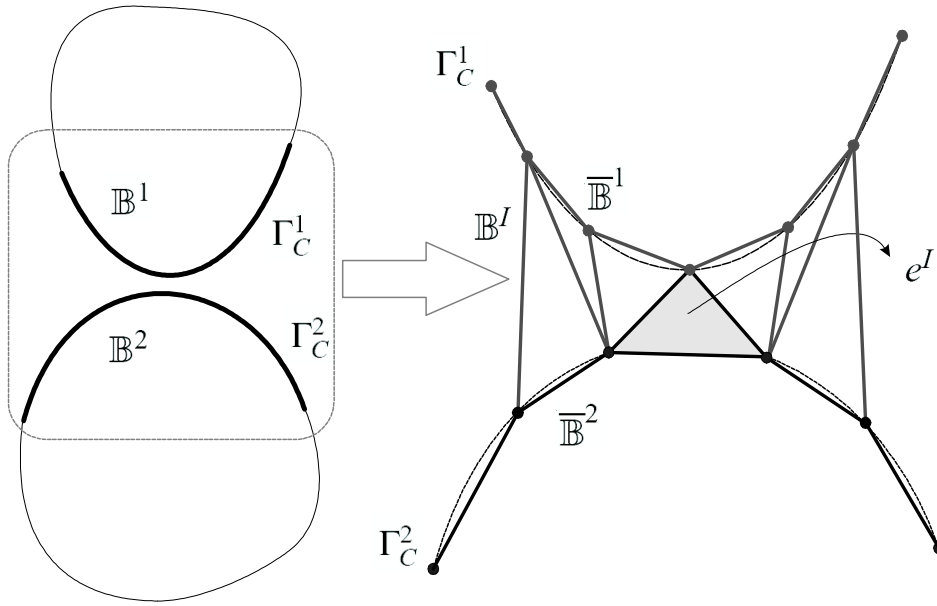


Figura 3.7: Par de cuerpos en situación de contacto inminente. a) modelo continuo, b) modelo discreto de los contornos de contacto de ambos cuerpos e interfaz de contacto

además, de forma asociada, unos vectores unitarios tangente y normal, $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{X})$ y $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{X})$, que son únicos para ese elemento de forma que $\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{X})$ apunta al exterior del cuerpo y $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{X})$ es tal que el producto $\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{T}}$ apunta hacia el exterior del plano del papel.

Observación

- Los vectores unitarios se calculan en la configuración \mathbb{B}_n y permanecen constantes a lo largo del incremento.

Los elementos de la interfaz, debido a su concepción, ofrecen inherentemente la posibilidad de calcular deformaciones y tensiones en su interior como resultado del movimiento de sus nodos (mediante la utilización de una pseudo-ecuación constitutiva conveniente). Por lo tanto, la forma utilizada en la metodología ACIM para cuantificar y controlar la distancia entre nodos pertenecientes al contorno de cuerpos diferentes es por medio del cálculo de una medida especial de deformaciones, según lo que se explica en los apartados 3.4.5 y siguientes.

3.4.5. Deformación normal

Para imponer la condición de impenetrabilidad entre los cuerpos unidos por la interfaz de contacto, se define en cada uno de los elementos que forman dicha interfaz, la denominada deformación normal ε_N . La misma mide la distancia relativa inicial existente entre los cuerpos relacionados por la interfaz y su evolución a lo largo de un determinado incremento de tiempo Δt . La medida de la deformación normal del elemento se calcula a través de dos términos: la *deformación normal inicial* y la *deformación normal incremental* (dichos términos están íntimamente relacionados con los conceptos más clásicos de gap inicial e incremental).

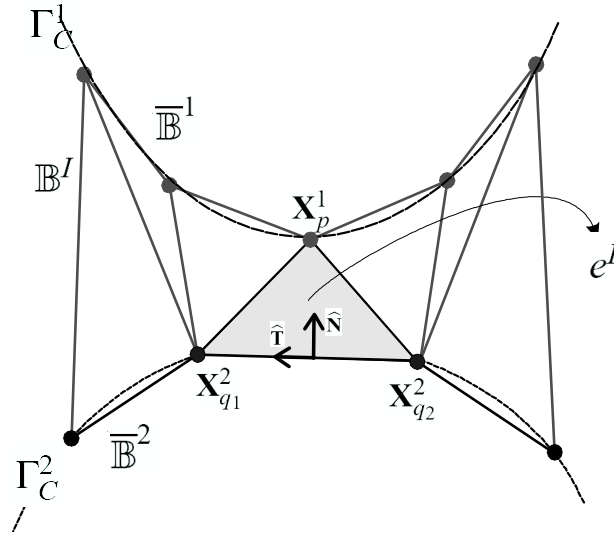


Figura 3.8: Elemento representativo de la interfaz de contacto y sus componentes asociados

Deformación normal inicial

A fin de determinar y medir las situaciones iniciales de interpenetración como la observada en la figura 3.9, se define la medida de la deformación normal inicial ε_N^0 de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\varepsilon_N^0 := \frac{(\mathbf{X}_p^1 - \mathbf{X}_{q1}^2) \cdot \hat{\mathbf{N}} - g_{ref}}{h_c} \quad (3.54)$$

donde $\bar{\mathbf{X}}_p^1, \bar{\mathbf{X}}_{q1}^2$ corresponden a las posiciones reales de los nodos p y q_1 al inicio del incremento, g_{ref} es la distancia que se desea mantener entre cuerpos (usualmente $g_{ref} = 0$) y h_c es la distancia característica del elemento y corresponde a la distancia entre q_1, q_2 ; $h_c = |\mathbf{X}_{q1} - \mathbf{X}_{q2}|$.

Observaciones

- De la ecuación 3.54 se concluye que ε_N^0 es un número escalar, que en caso de existir una violación de la condición de contacto: $\varepsilon_N^0 < 0$, se considera que existe interpenetración entre los cuerpos. Si $\varepsilon_N^0 = 0$, los contornos de ambos cuerpos se encuentran en perfecta tangencia en esa zona de contacto, con lo que la restricción se cumple, mientras que si $\varepsilon_N^0 > 0$ los cuerpos se encuentran alejados, con lo que no hay contacto activo en esa zona de contacto potencial.
- Todos los desarrollos del presente capítulo se hacen bajo la hipótesis de que $\varepsilon_N^0 \neq 0$, es decir que los tres nodos que conforman a un elemento de interfaz no se encuentran sobre la misma línea o análogamente, que la distancia surgida de la proyección normal entre las posiciones de los nodos de uno y de otro contornos no es nula. Una extensión al caso en que $\varepsilon_N^0 = 0$, en el que se define el denominado elemento virtual, se desarrolla en el Apéndice II.

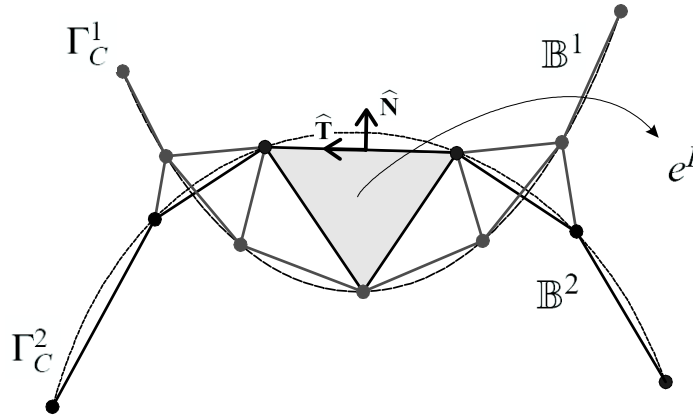


Figura 3.9: Situación de interpenetración inicial entre un par de cuerpos y consecuente estado de la interfaz de contacto

- ε_N^0 , al igual que toda deformación se define de forma adimensional, esto se obtiene aquí relativizando al numerador de la ec. 3.54 con respecto a la distancia $h_c > 0$, que por construcción nunca puede ser nula. La deformación ε_N^0 se halla definida en función de variables relativas a la configuración de referencia y al tiempo t , pero dado que permanece invariable durante el incremento de tiempo, $\varepsilon_N^0 = \varepsilon_N^0(X)$.
- Se puede demostrar la existencia de un paralelismo entre la formulación clásica (presentada en los apartados precedentes) de la distancia normal signada o gap (inicial) y la deformación normal inicial definida en este apartado si se tiene en cuenta la siguiente equivalencia:

$$g_N^0 \simeq \varepsilon_N^0 h_c = g - g_{ref} \quad (3.55)$$

Deformación normal incremental

Con el objeto de controlar y medir la evolución de los desplazamientos de los contornos del par de cuerpos analizados durante el incremento de tiempo⁷ Δt , es necesario definir la denominada medida de la deformación normal incremental $\Delta\varepsilon_N$, que adquiere la siguiente forma:

$$\Delta\varepsilon_N := \hat{N} \cdot \Delta\varepsilon^e \cdot \hat{N} \quad (3.56)$$

donde $\Delta\varepsilon^e = \nabla^S(\Delta\mathbf{u}^e(\mathbf{x}))$ y $\nabla^S(\cdot) = \frac{1}{2}[(\cdot) \otimes \nabla + \nabla \otimes (\cdot)]$ es el operador gradiente simétrico, \otimes es el producto tensorial, $\Delta\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ es el vector de desplazamientos incrementales asociados al elemento e , de forma que: $\mathbf{x}(\mathbf{X}^e, t + \Delta t) = \mathbf{X}^e + \Delta\mathbf{u}(\mathbf{X}^e, t + \Delta t)$, donde \mathbf{X}^e hace referencia a los puntos representados por los nodos del elemento e . Considerando que sobre los elementos de interfaz se utilizan una funciones de interpolación $N_i(\mathbf{X})$, se define el incremento de desplazamientos del elemento e como:

$$\Delta\mathbf{u}^e(\mathbf{X}^e, t + \Delta t) = \sum_{r=1}^{nod^e} N_r(\mathbf{X}^e) \Delta\mathbf{u}_r(\mathbf{X}^e, t + \Delta t) \quad (3.57)$$

⁷Para advertir el tipo de situación aludida en este apartado, se debe considerar el caso esquematizado en la figura 3.8, en la que por ejemplo, el cuerpo \mathbb{B}^1 se desliza hacia abajo tendiendo al contacto del cuerpo \mathbb{B}^2 que se halla inmóvil.

donde nod^e es el número de nodos del elemento e . Luego de lo cual se tiene que:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{u}^e \otimes \nabla + \nabla \otimes \Delta \mathbf{u}^e) \quad (3.58)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{nod^e} \left(\frac{\partial N_r}{\partial X_j} \Delta u_{ri} + \frac{\partial N_r}{\partial X_i} \Delta u_{rj} \right) \quad (3.59)$$

Es importante advertir que $\Delta \varepsilon_N$, al igual que ε_N^0 , es un número escalar adimensional, pero que en este caso indica el grado de deformación normal sufrida por el elemento de interfaz e durante el incremento de tiempo a raíz del desplazamiento de sus nodos. Para medir tal deformación se ha recurrido a llevar a cabo la proyección normal, ecuación 3.56, del tensor de deformaciones $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e$, que se define como el clásico tensor de deformaciones infinitesimales [69].

Observaciones

- De forma análoga a la deformación normal inicial es posible encontrar una similitud entre una función gap incremental y la deformación incremental previamente definida, de forma que:

$$\Delta g_N \simeq \Delta \varepsilon_N h_c \quad (3.60)$$

- La deformación normal incremental Δg_N adquiere valores negativos en caso de que la altura proyectada normal o distancia normal inicial del elemento e decrezca durante el incremento, es decir que los nodos \mathbf{X}_p^1 y \mathbf{X}_{q1}^2 se aproximen tendiendo a violar la condición de contacto. Si dicha altura se mantiene constante, $\Delta g_N = 0$, y si aumenta, $\Delta g_N > 0$.

Deformación normal total

Una vez presentadas las componentes inicial e incremental de la deformación normal, se define a continuación la medida de la deformación normal total asociada a un elemento $e \in \mathbb{B}^I$ ocurrida durante un incremento de tiempo Δt :

$$\tilde{\varepsilon}_N^e(\mathbf{X}^e, t + \Delta t) := \varepsilon_N^0(\mathbf{X}^e, t + \Delta t) + \Delta \varepsilon_N(\mathbf{X}^e, t + \Delta t) \quad (3.61)$$

donde $\tilde{\varepsilon}_N^e$ es un número escalar adimensional que indica la magnitud de dicha deformación normal.

Observaciones

- La deformación normal total es un indicador cuantitativo de la distancia entre los contornos de los cuerpos.
- Como en los casos anteriores, se puede demostrar la equivalencia existente entre la deformación normal total y la función normal signada o gap estándar por medio de la siguiente relación:

$$g_N := g_N^0 + \Delta g_N \simeq \tilde{\varepsilon}_N = h_c(\varepsilon_N^0 + \Delta \varepsilon_N) \quad (3.62)$$

- En conclusión, la condición de contacto es forzada si se cumple la siguiente expresión:

$$\tilde{\varepsilon}_N^e \geq 0 \iff g_N^e \geq 0 \quad \forall e \in \mathbb{B}^I \quad (3.63)$$

para lo cual es necesario encontrar un \mathbf{u} tal que $\tilde{\varepsilon}_N^e \geq 0$.

- El tensor de deformaciones normales del elemento ε_N^e (tensor de segundo orden) se obtiene al multiplicar la deformación normal total del elemento con el producto tensorial diádico del vector unitario normal asociado al elemento:

$$\varepsilon_N^e(\mathbf{X}^e, t + \Delta t) = \tilde{\varepsilon}_N^e (\hat{\mathbf{N}} \otimes \hat{\mathbf{N}}) \quad (3.64)$$

3.4.6. Tensión de contacto

La existencia de unas deformaciones normales tendientes a controlar y a medir la fenomenología de contacto entre cuerpos, lleva al inmediato cálculo de unas tensiones normales por medio de la utilización de un parámetro constitutivo conveniente. Para ello se define a $\mathbb{E}(K_N, \tilde{\varepsilon}_N^e)$ como una función con la siguiente apariencia:

$$\mathbb{E} = K_N H(-\tilde{\varepsilon}_N^e) \quad (3.65)$$

donde K_N es un parámetro de rigidez asociado a la dirección normal, que en su versión más sencilla es constante pero que a su vez admite la posibilidad de que sea variable, y $H(\cdot)$ es la función de Heaviside o derivada de los paréntesis de Macaulay, definidos anteriormente en el apartado 3.3.3. La función, \mathbb{E} sólo adquiere valores positivos, que son no nulos cuando $\tilde{\varepsilon}_N^e < 0$, o lo que es lo mismo, cuando existe una violación de la condición de contacto y hay interpenetración entre los cuerpos, ver el apartado 3.4.5. Por otro lado, $\mathbb{E} = 0$ cuando $\tilde{\varepsilon}_N^e \geq 0$. La pseudo-tensión normal $\tilde{\sigma}_N^e$ se calcula como lo indica la ecuación 3.66 y presenta un comportamiento como el que se puede observar en la figura 3.10.

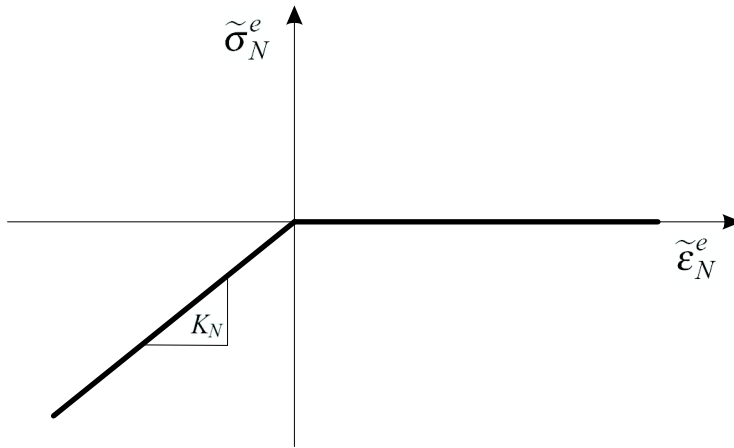


Figura 3.10: Comportamiento de la función $\mathbb{E}(K_N, \tilde{\varepsilon}_N^e)$ y sus consecuencias sobre $\tilde{\sigma}_N^e$

$$\tilde{\sigma}_N^e = \mathbb{E} \tilde{\varepsilon}_N^e \quad (3.66)$$

El tensor de tensiones normales resultante es:

$$\sigma_N^e(\mathbf{X}^e, t + \Delta t) = \tilde{\sigma}_N^e(\hat{\mathbf{N}} \otimes \hat{\mathbf{N}}) \quad (3.67)$$

Observaciones

- La función $\mathbb{E}(K_N, \tilde{\varepsilon}_N^e)$, que relaciona la pseudo-tensión $\tilde{\sigma}_N^e$ con la medida de la deformación normal $\tilde{\varepsilon}_N^e$, posee unidades de fuerza por unidad de superficie, por lo que se admite que se trata de un pseudo módulo elástico que actúa en la dirección normal del elemento de interfaz.
- La magnitud del parámetro K_N influye de forma proporcional a la rigidez normal del elemento de interfaz. Por lo tanto, para valores mayores de K_N se obtienen unas pseudo-tensiones normales mayores para un mismo valor de $\tilde{\varepsilon}_N^e$. El parámetro K_N asume el rol de constante de penalización de los métodos regularizados.
- Cabe destacar que $\mathbb{E}(K_N, \tilde{\varepsilon}_N^e)$ es una función no lineal, que en su interior posee la típica condición de discontinuidad o salto presentada al inicio del capítulo y que está asociada al cambio de condición activo - no activo del contacto normal. Y que dicha condición se vuelve activa cuando $\tilde{\varepsilon}_N^e < 0$, ver el apartado 3.4.5 y la figura 3.10. Por otra parte, se puede advertir que la función \mathbb{E} admite potencialmente la incorporación de una función no lineal pero continua en lugar de la constante K_N a fin de regularizar la discontinuidad asociada al cambio de estado no contacto-contacto [101].

3.4.7. Fuerzas de contacto

Las fuerzas destinadas a imponer la condición de contacto se calculan a partir de la integración de las tensiones normales anteriormente deducidas sobre el dominio delimitado por la interfaz de contacto \mathbb{B}^I . Sin embargo, es esencial tener en cuenta y comprender los siguientes aspectos de la metodología:

- Tanto las deformaciones como las tensiones normales en las que se ha hecho desembocar al problema de contacto provienen del análisis en el interior de los elementos de la interfaz.
- El origen de tales deformaciones es el movimiento de los nodos de la interfaz, que son los mismos que conforman el contorno del par de cuerpos en contacto. Es decir que el alejamiento o acercamiento de dichos nodos activa o desactiva la condición de contacto según lo expuesto en el apartado 3.4.5.

En conclusión, es válido afirmar que el problema que inicialmente afectaba al contorno de contacto Γ_C de los cuerpos \mathbb{B}^1 y \mathbb{B}^2 ha sido llevado al interior de la interfaz de contacto \mathbb{B}^I como un problema equivalente. En consecuencia, a fin de determinar las fuerzas de contacto que se concentran en los nodos, y dado que el problema debe ser reinterpretado y visto desde el interior de la interfaz de contacto, el cálculo de estas fuerzas se define con un formato de fuerzas internas nodales equivalentes que se definen como:

$$\mathbf{F}_{N,p} = - \int_{\mathbb{B}^I} \sigma_N \cdot \text{Grad} [\eta_p] dV \quad \forall p \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (3.68)$$

donde σ_N son las tensiones normales deducidas anteriormente en el apartado 3.4.6 y η_p son los desplazamientos virtuales, ambos asociados al nodo $p \in \Gamma^I$ (aquí se consideran de forma general las tensiones normales de todos los elementos de interfaz que conectan al nodo p). Luego, teniendo en cuenta el método de Galerkin, y reemplazando los desplazamientos virtuales por las funciones de forma estándar, las fuerzas nodales equivalentes que resultan en la interfaz son [70]:

$$\mathbf{F}_{N,p}^e = - \int_{\mathbb{B}^I} \sigma_N \cdot \nabla N_p dV \quad \forall p \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (3.69)$$

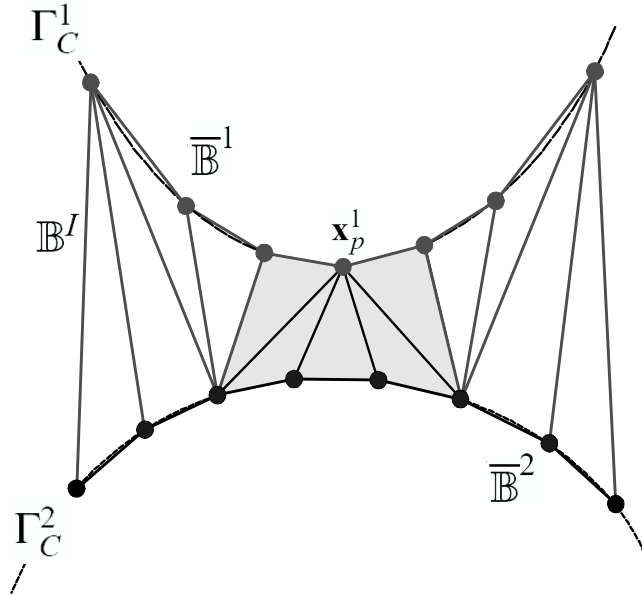


Figura 3.11: Patch de elementos e^p pertenecientes a la interfaz de contacto asociados al nodo $p \in \Gamma^1$

La fuerza total originada por el problema de contacto en un nodo $p \in \Gamma^1$ viene dada, tal como lo muestra la figura 3.11, por la resultante de los aportes elementales de las fuerzas $\mathbf{F}_{N,p}^e$ (ec. 3.69) provenientes del patch de elementos asociados al nodo p definido como: e^p . Esto implica que para la imposición de la condición de contacto se ponen en juego un sistema de fuerzas originadas por la evaluación de las deformaciones en un conjunto de elementos de la interfaz, y que estos extienden su zona de influencia a un radio que es dependiente del grado de discretización del contorno y del alcance buscado por la interfaz durante su generación.

En el contexto del método no regularizado de los multiplicadores de lagrange, la medida de la deformación normal desarrollada por la metodología ACIM $\tilde{\varepsilon}_N^0$, puede ser utilizada para imponer de forma exacta la condición de contacto normal, de forma que se cumpla:

$$G_{C_N}^{ACIM, no-reg}(\varphi^h, \eta^h) = \int_{\Gamma_C} \lambda_N^h D_\eta [h_c(\varepsilon_N^0 + \Delta \varepsilon_N)] d\Gamma \quad (3.70)$$

de donde, luego de calcular la derivada direccional de las deformaciones normales: $D_{\boldsymbol{\eta}}[h_c(\varepsilon_N^0 + \Delta\varepsilon_N)] = h_c \left[\widehat{\mathbf{N}} \cdot (\varepsilon_N^0 + \nabla^s \boldsymbol{\eta}^h) \cdot \widehat{\mathbf{N}} \right]$, se tiene:

$$G_{C_N}^{ACIM, no-reg}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h) = \frac{h_c}{2} \int_{\Gamma_C} \lambda_N^h (\varepsilon_N^0 + \nabla^s \boldsymbol{\eta}^h \cdot \boldsymbol{\eta}^h) d\Gamma \quad (3.71)$$

Haciendo referencia a la variedad de métodos de penalización existentes y tomando como base su forma clásica descrita anteriormente, el método ACIM se sitúa formalmente dentro de este contexto bajo la consideración de los componentes que aparecen en el cuadro 3.2. Donde se ha enunciado un funcional $\Xi(\tilde{\varepsilon}_N^e; K_N)$, que luego de ser derivado, bajo la simplificación basada en que la función delta de Dirac se considera nula y al notar que $\langle -\tilde{\varepsilon}_N^e \rangle = H(-\tilde{\varepsilon}_N^e) \langle -\tilde{\varepsilon}_N^e \rangle$, se obtiene como resultado una expresión análoga a la del cuadro 3.1.

Luego de haber establecido y demostrado que por sus características y analogía la presente formulación del método ACIM puede considerarse como un método de regularización, se observa que la contribución del término de contacto normal en el funcional del problema general 3.51, adquiere la siguiente forma:

$$G_{C_N}^{ACIM, reg}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h) = \frac{h_c}{2} \int_{\Gamma_C} \tilde{\sigma}_N^e(\mathbb{E}, \tilde{\varepsilon}_N^e) (\varepsilon_N^0 + \nabla^s \boldsymbol{\eta}^h \cdot \boldsymbol{\eta}^h) d\Gamma \quad (3.72)$$

que surge de la adaptación de la ec. 3.52 a la presente formulación.

En el límite de $K_N \in \mathbb{E} \rightarrow \infty$, resulta que $\tilde{\sigma}_N^e \rightarrow \lambda_N^h$, lo cual es consistente con los métodos de regularización.

Observaciones

- Cabe destacar que dentro del contexto del ACIM y del PFEM: $\Gamma^I = \Gamma_C = \Gamma_C^1 \cup \Gamma_C^2$.
- Todos los nodos p a los que se refiere la ecuación 3.69 pertenecen a los contornos de los cuerpos \mathbb{B}^1 y \mathbb{B}^2 , y al mismo tiempo, son todos los nodos que conforman la interfaz de contacto \mathbb{B}^1 .
- Las fuerzas nodales de contacto en el/los contornos bajo interacción se calculan por medio de un proceso de condensación nodal estática que traduce en fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas internas calculadas dentro del dominio de la interfaz de contacto [70].

3.4.8. Contacto tangencial - Efectos de la fricción: modelo de Coulomb

Introducción

Debido a la amplia utilización del modelo de fricción seca o de Coulomb para efectuar la simulación de diversos fenómenos y procesos, se presenta a continuación la formulación de una versión del mismo bajo una estrategia de regularización (penalización) aplicada al método ACIM.

$$\begin{aligned}
\Xi^{ACIM}(\tilde{\varepsilon}_N^e; K_N) &= \frac{\mathbb{B}}{2} \langle -\tilde{\varepsilon}_N^e \rangle^2 = \frac{K_N}{2} H(-\tilde{\varepsilon}_N^e) \langle -\tilde{\varepsilon}_N^e \rangle^2 \\
\frac{\partial \Xi^{ACIM}}{\partial \tilde{\varepsilon}_N^e} &= \frac{k_N}{2} \left[2H(-\tilde{\varepsilon}_N^e) \langle -\tilde{\varepsilon}_N^e \rangle (-1) + \delta(-\tilde{\varepsilon}_N^e) \langle -\tilde{\varepsilon}_N^e \rangle^2 \right] \\
&= -K_N H(-\tilde{\varepsilon}_N^e) \langle -\tilde{\varepsilon}_N^e \rangle = -K_N \langle -\tilde{\varepsilon}_N^e \rangle \\
P_N(\tilde{\varepsilon}_N^e, K_N) &= \frac{\partial \Xi^{ACIM}}{\partial g_N} = -K_N \langle -\tilde{\varepsilon}_N^e \rangle
\end{aligned}$$

Cuadro 3.2: Método ACIM perteneciente a los de penalización estándar - Cálculo de las tracciones normales

Deformación tangencial

En primer lugar, y a fin de obtener el valor de las tensiones tangenciales, se utiliza nuevamente el concepto de la deformación del elemento de interfaz. La misma permite obtener una cuantificación del desplazamiento relativo tangente entre los contornos en contacto. Para ello, se define sobre la base de la figura 3.8 en un elemento $e \in \mathbb{B}^I$, una medida de las deformaciones tangenciales incrementales con la siguiente forma:

$$\Delta \varepsilon_T := \hat{\mathbf{T}} \cdot \Delta \varepsilon^e \cdot \hat{\mathbf{N}} \quad (3.73)$$

donde, al igual que en el caso del contacto normal se tiene:

$$\Delta \varepsilon^e = \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{u}^e \otimes \nabla + \nabla \otimes \Delta \mathbf{u}^e) \quad (3.74)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{nod e} \left(\frac{\partial N_r}{\partial X_j} \Delta u_{ri} + \frac{\partial N_r}{\partial X_i} \Delta u_{rj} \right) \quad (3.75)$$

En este caso, $\Delta \varepsilon_T$ se interpreta como el incremento de deformaciones tangenciales del elemento e . Debido a que, a diferencia del caso de la deformación normal, se cuenta aquí con una única componente de la deformación tangencial, por lo que se define $\tilde{\varepsilon}_T^e := \Delta \varepsilon_T$.

Observaciones

- Las deformaciones tangenciales incrementales $\tilde{\varepsilon}_T^e$ son adimensionales, tal como en el caso del contacto normal y obedeciendo a su definición de deformación.
- Como se puede observar en la ecuación 3.73, la componente tangencial es, por las características del fenómeno físico que modela, naturalmente no simétrica.
- El tensor de deformaciones tangenciales (de segundo orden) asociado al elemento e se obtiene a partir de la medida de las deformaciones tangenciales incrementales de forma que:

$$\varepsilon^e(\mathbf{X}^e, t + \Delta t) = \tilde{\varepsilon}_T^e (\hat{\mathbf{T}} \otimes \hat{\mathbf{N}}) \quad (3.76)$$

Tensión tangencial

Siguiendo los mismos pasos que para el caso del contacto normal, a partir de unas deformaciones tangenciales se obtienen unas tensiones tangenciales regularizadas de penalización. En consecuencia, las restricciones asociadas a la fricción, que fueron presentadas de forma general en el apartado 3.3.3, son ajustadas en particular a la presente metodología de acuerdo con las siguientes consideraciones:

1. Las tensiones tangenciales incrementales de prueba en el elemento e , $\tilde{\sigma}_T^{e,trial}$, se definen como:

$$\tilde{\sigma}_T^{e,trial} = K_T \tilde{\varepsilon}_T^e \quad (3.77)$$

donde K_T es un parámetro de regularización o penalización de características similares al anteriormente definido para el caso normal y $\tilde{\varepsilon}_T^e$ es la deformación tangencial, según lo definido en el apartado precedente.

2. El criterio o límite de deslizamiento ϕ^e , al igual que la regla de flujo y demás restricciones para un determinado elemento $e \in \mathbb{B}^I$, son:

$$\phi^e := |\tilde{\sigma}_T^e| - \mu |\tilde{\sigma}_N^e| \leq 0 \quad (3.78)$$

$$\tilde{\varepsilon}_T^e - \zeta^e \frac{\partial \phi^e}{\partial \tilde{\sigma}_T^e} = 0 \quad (3.79)$$

$$\zeta^e \geq 0 \quad (3.80)$$

$$\phi^e \cdot \zeta^e = 0 \quad (3.81)$$

donde $\tilde{\sigma}_N^e$ es la tensión normal definida anteriormente, μ es el clásico coeficiente de fricción y ζ^e es la magnitud del deslizamiento entre los contornos en contacto.

3. De los puntos 1. y 2. resulta que:

- a) Caso de adherencia o stick (zona interior al cono de Coulomb, fig. 3.2):

$$\text{si } \tilde{\sigma}_T^{e,trial} < \mu |\tilde{\sigma}_N^e| \implies \tilde{\sigma}_T^e = \tilde{\sigma}_T^{e,trial}$$

- b) Caso de deslizamiento o slip (sobre la superficie del cono de Coulomb, fig. 3.2):

$$\text{si } \tilde{\sigma}_T^{e,trial} \geq \mu |\tilde{\sigma}_N^e| \implies \tilde{\sigma}_T^e = \mu \text{sign}(\tilde{\varepsilon}_T^e) |\tilde{\sigma}_N^e|$$

Resulta importante advertir que la tensión normal $\tilde{\sigma}_N^e$ cumple aquí dos funciones: la primera es la de adecuar el límite de deslizamiento ϕ^e a la magnitud de tensiones normales existentes en la zona analizada (ver el apartado 3.3 y la figura 3.2), mientras que la segunda es la de activar o desactivar los puntos del contorno donde hay o no una situación de interacción o contacto, ya que si este no se encuentra establecido, es físicamente imposible que aparezcan fenómenos de fricción en dicha zona del contorno.

En la figura 3.12 se puede observar esquemáticamente el comportamiento que ofrece la fricción seca o ley de Coulomb en el entorno del método ACIM sobre las tensiones y deformaciones tangenciales. Cabe destacar que la magnitud del parámetro de regularización K_T determina un comportamiento más o menos regularizado del modelo, por lo que para valores crecientes del parámetro se tiende al valor exacto de la restricción definida en la ec. 3.41 del apartado 3.3.3, llegando en el límite de $K_T \rightarrow \infty$, al caso no regularizado (línea punteada en la fig. 3.12).

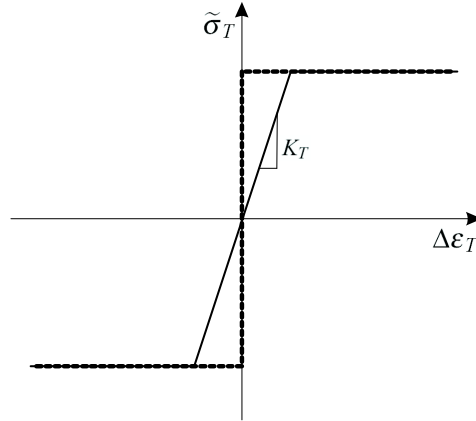


Figura 3.12: Relación $\tilde{\sigma}_T - \Delta \varepsilon_T$ perteneciente a la ley de Coulomb - Casos regularizado y no regularizado

Por su parte, el tensor de tensiones tangenciales que se obtiene de forma análoga al caso normal, se expresa como:

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \tilde{\sigma}_T^e (\hat{\mathbf{T}} \otimes \hat{\mathbf{N}}) \quad (3.82)$$

Fuerzas tangenciales

La contribución a la expresión de trabajos virtuales debido a la componente de fricción y asociada a un nodo p , $\mathbf{F}_{T,p}^I$ se escribe como:

$$\mathbf{F}_{T,p}^I = - \int_{\mathbb{B}^I} \sigma_T \cdot \text{Grad} [\boldsymbol{\eta}_p] dV \quad \forall p \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (3.83)$$

donde $\boldsymbol{\eta}_p$ representa el desplazamiento virtual del nodo p . Por otra parte, la última expresión se puede escribir en términos de la función de forma correspondiente como:

$$\mathbf{F}_{T,p}^I = - \int_{\mathbb{B}^I} \nabla N_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_T dV \quad \forall p \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (3.84)$$

Observaciones

- La equivalencia entre g_T y $\tilde{\varepsilon}_T^e$, queda establecida nuevamente por⁸:

$$g_T \simeq 2\tilde{\varepsilon}_T^e h_c \quad (3.85)$$

- El término debido al contacto tangencial no regularizado (fricción) en el funcional definido en el problema 3.51, se reduce a la siguiente expresión general:

$$G_{C_T}^{ACIM,no-reg}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h) = \int_{\Gamma_C} \lambda_T^h D_{\boldsymbol{\eta}}[2h_c \tilde{\varepsilon}_T^e] d\Gamma \quad (3.86)$$

donde λ_T^h es el multiplicador de lagrange correspondiente al problema de fricción en el punto de análisis.

- El término que resulta de la forma regularizada del problema discutido en el presente apartado, es:

$$G_{C_T}^{ACIM,reg}(\boldsymbol{\varphi}^h, \boldsymbol{\eta}^h) = h_c \int_{\Gamma_C} \tilde{\sigma}_T^e(K_T, \tilde{\varepsilon}_T^e, \tilde{\sigma}_N^e) (\nabla^s \boldsymbol{\eta}^h \cdot \boldsymbol{\eta}^h) d\Gamma \quad (3.87)$$

que es obtenida luego de recordar que $\tilde{\varepsilon}_T^e = \Delta \varepsilon_T$ y calcular la derivada direccional de las deformaciones tangenciales: $D_{\boldsymbol{\eta}}[h_c \Delta \varepsilon_T] = h_c \left[\hat{\mathbf{N}} \cdot (\nabla^s \boldsymbol{\eta}^h) \cdot \hat{\mathbf{T}} \right]$.

- Las fuerzas nodales de contacto tangencial en el/los contornos bajo interacción se calculan, al igual que las de contacto normal, mediante un proceso de condensación que traduce en fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas internas calculadas dentro del dominio de la interfaz de contacto.

3.4.9. Contacto tangencial - Efectos de la fricción: modelo de Norton-Hoff**Introducción**

En ciertos procesos donde el contacto se produce entre determinados materiales, como por ejemplo los polvos a bajas densidades y las superficies pulidas (acero, plástico, etc.), o entre superficies sólidas lubricadas por una película de alguna sustancia tribológica, resulta conveniente modelizar el fenómeno de fricción por medio de un modelo de fricción dinámica o de Reynolds. En esta clase de modelos se establece una dependencia directa entre las fuerzas de fricción y la velocidad relativa de los cuerpos involucrados [98][18][19]. El modelo de fricción del tipo de Norton-Hoff cumple con la dependencia funcional antes nombrada y se expresa de forma general como:

$$\mathbf{P}_T = -\mu \operatorname{sign}(\mathbf{v}_T^{rel}) \left| \mathbf{v}_T^{rel} \right|^\alpha \langle P_N \rangle \quad (3.88)$$

donde μ es el coeficiente de fricción dinámica, \mathbf{v}_T^{rel} es la velocidad relativa en la dirección tangente de los contornos de los cuerpos en contacto, α es un parámetro que permite controlar la no linealidad de la velocidad y $\langle P_N \rangle$ es la presión asociada al contacto normal.

⁸Se expresa aquí como función del desplazamiento tangencial, pero esta misma definición puede ser extendida de forma trivial, al caso de la velocidad de deslizamiento tangencial utilizada en el modelo de Norton-Hoff.

El parámetro μ es siempre positivo y comprende de forma unificada la suma de fenómenos relacionados con la fricción (rugosidad de los materiales, temperatura de operación, etc.). Dicho parámetro puede hacerse dependiente de estas u otras variables consideradas como relevantes en el proceso bajo estudio y representar, por medio de su evolución, los cambios que se producen durante el mismo [82][83][99]. La determinación del coeficiente μ debe provenir de estudios experimentales compatibles con el tipo de proceso y materiales a modelizar.

Por lo general, con el objetivo de que las fuerzas de fricción resultantes ante el aumento de la velocidad relativa tangente se encuentren limitadas y tiendan a un valor final constante de equilibrio, tal como lo indican los estudios empíricos, se debe considerar una relación funcional entre μ y v_T^{rel} . En la figura 3.13 se indica cualitativamente el tipo de ley que debe gobernar la dicha relación.

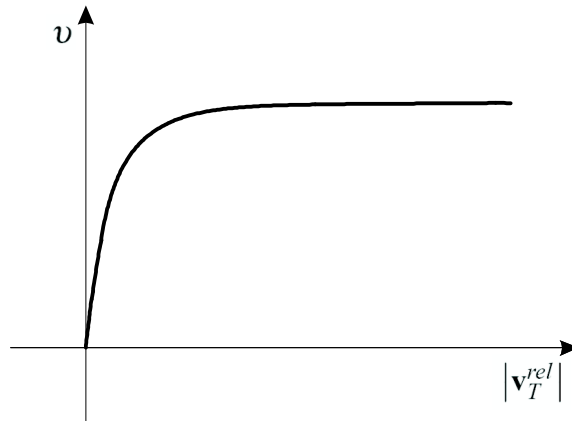


Figura 3.13: Relación existente entre la velocidad relativa tangente y el coeficiente de fricción para el modelo de Norton-Hoff

Por otra parte, en el caso particular de aquellos procesos donde se hallan presentes materiales cuyas propiedades superficiales sufren una marcada evolución, como son los procesos que involucran compactación o prensado de polvos, el parámetro μ debe también evolucionar de acuerdo a alguna propiedad del material que sea sensible a tales cambios. En dichos procesos, a medida que el material se va compactando, el rozamiento disminuye a causa de una reducción en la rugosidad superficial del material [12]. La densidad de un material en polvo, y su evolución creciente durante un típico proceso de compactación, puede ser interpretada como un reflejo de las propiedades de la superficie de contacto ofrecida por el material. Por lo tanto, en este caso se plantea adicionalmente una relación funcional entre μ y η ⁹ tal como la mostrada cualitativamente en la figura 3.14.

Si se considera que ambos efectos sobre el coeficiente μ actúan a la vez, entonces puede definirse la siguiente relación:

$$\mu(v_T^{rel}, \eta) = v \left(|v_T^{rel}| \right) \kappa(\eta) \quad (3.89)$$

⁹Se define: $\eta = \frac{\rho_t}{\rho_0}$, donde η es la densidad relativa, ρ_t es la densidad del material en el tiempo t y ρ_0 es la densidad inicial del material.

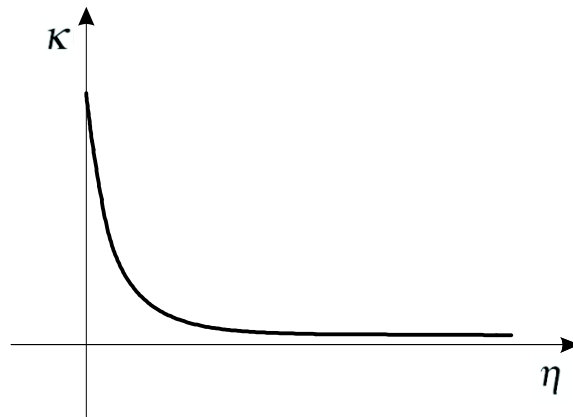


Figura 3.14: Relación existente entre la densidad relativa y el coeficiente de fricción para el modelo de Norton-Hoff

Por medio de esta composición de funciones puede obtenerse una forma regularizada de la ley de Coulomb (en este caso se encuentra formulada en velocidades relativas en lugar de hacerlo en desplazamientos relativos) para valores constantes o con leves variaciones de la densidad, ver la figura 3.15. Esta situación es la que se presenta habitualmente en un determinado incremento de tiempo durante el cálculo, dado que la variación incremental de la densidad en una determinada zona del material puede admitirse como relativamente baja, y en consecuencia se tiene un valor promedio cuasi constante de $\bar{\kappa}(\eta) |_t \approx k_{\eta,t} \rightarrow \mu |_t \approx k_{\eta,t} v(|\mathbf{v}_T^{rel}|)$, donde $k_{\eta,t}$ es el valor medio y considerado como constante de κ en el tiempo t .

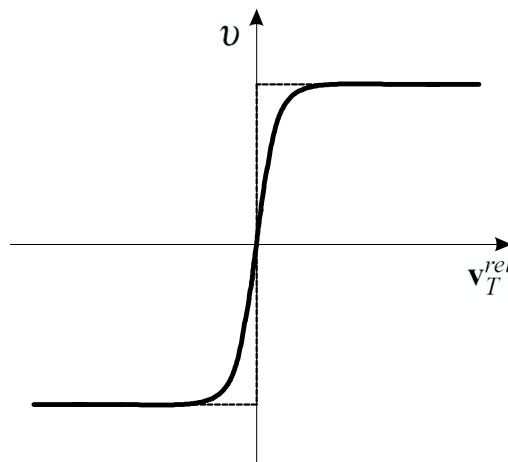


Figura 3.15: Esquema de la ley de Coulomb (considerando la velocidad relativa tangente) en líneas punteadas y regularización por medio del modelo de Norton-Hoff en línea continua

Observación

- Una de las principales ventajas numéricas de este modelo es que, en su forma lineal

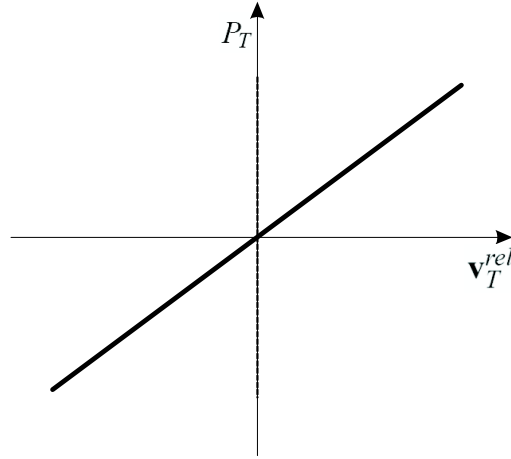


Figura 3.16: Esquema de la dependencia entre la tracción tangencial y la velocidad de deslizamiento para la fricción viscosa de Norton-Hoff

$\alpha = 1$, las tracciones tangenciales no presentan discontinuidad en el entorno de velocidades de deslizamiento cero, ver la figura 3.16.

Velocidad de deformación y velocidad tangencial

De forma análoga al caso del desplazamiento relativo tangente, para obtener la velocidad relativa tangente se recurre al término $\tilde{\varepsilon}_T^e = \Delta \varepsilon_T = \hat{\mathbf{T}} \cdot \Delta \varepsilon^e \cdot \hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{N}} \cdot \Delta \varepsilon^e \cdot \hat{\mathbf{T}}$, introducido en el apartado 3.4.8, y luego se calcula como¹⁰:

$$v_T^e = \frac{2h_c \tilde{\varepsilon}_T^e}{\Delta t} \quad (3.90)$$

En consecuencia, de acuerdo a lo dicho, se definen a $\Delta u_T^e = h_c \gamma_T^e$ como el desplazamiento tangencial relativo entre los nodos \mathbf{X}_p^1 y $\mathbf{X}_{q_1}^2 \in e^I$ y a $v_T^e = \frac{\Delta u_T^e}{\Delta t}$ como la velocidad tangencial relativa entre los mismos nodos o entre los contornos de los cuerpos \mathbb{B}^1 y \mathbb{B}^2 en el entorno del nodo \mathbf{X}_p^1 , donde h_c representa la altura del elemento definida anteriormente.

Tensión tangencial

Buscando una forma equivalente a la expresión clásica del modelo de Norton-Hoff, se define la tensión tangencial asociada a la velocidad relativa tangente $\tilde{\sigma}_T^*$ como:

$$\tilde{\sigma}_T^* = -\mu v_T^e |\tilde{\sigma}_N^e| \quad (3.91)$$

¹⁰La identidad $\Delta \varepsilon_T = \hat{\mathbf{T}} \cdot \Delta \varepsilon^e \cdot \hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{N}} \cdot \Delta \varepsilon^e \cdot \hat{\mathbf{T}}$ se cumple por provenir de un operador simétrico. A partir de la misma, se define al ángulo formado inicialmente por los segmentos $\overline{\mathbf{X}_{p_N}^2 \mathbf{X}_{q_2}^2}$ y $\overline{\mathbf{X}_{p_N}^2 \mathbf{X}_p^1}$ como $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, y se establece luego que: $\Delta \theta = \theta - \theta_0 = -2\tilde{\varepsilon}_T^e$, ver la figura 3.17. Dicha expresión indica físicamente, el semidecremento (con signo negativo) del ángulo que forman los segmentos antes nombrados como resultado de la deformación del elemento e^I [69], adicionalmente se define a $\gamma_T^e = 2\tilde{\varepsilon}_T^e$ como el incremento del ángulo θ .

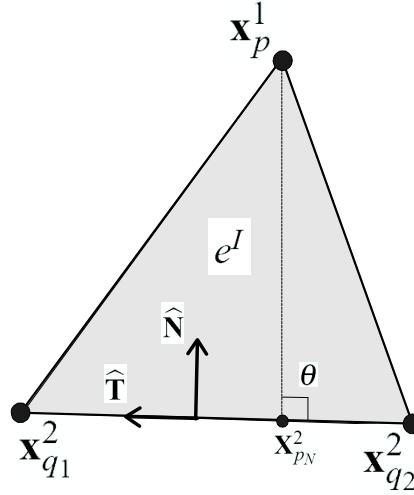


Figura 3.17: Esquema de un elemento perteneciente a la interfaz de contacto. Proyección normal \mathbf{X}_{pN}^2 del nodo \mathbf{X}_p^1 sobre el segmento base $\mathbf{X}_{q1}^2 \mathbf{X}_{q2}^2$

donde μ es el coeficiente de fricción, v_T es la velocidad relativa tangente antes definida y $\tilde{\sigma}_N$ es la tensión normal resultante de la imposición de la condición de contacto normal definida en el apartado 3.4.6. Siguiendo el mismo tratamiento aplicado a la tensión tangente del apartado 3.4.8, ec. 3.82 se obtiene el tensor de tensiones tangenciales asociados a la velocidad relativa tangente de la forma:

$$\sigma_T^* = \tilde{\sigma}_T^* (\hat{\mathbf{T}} \otimes \hat{\mathbf{N}}) \quad (3.92)$$

Fuerzas tangenciales

La integración de las tensiones tangenciales resultantes del modelo de fricción viscosa de Norton-Hoff $\mathbf{F}_{T,p}^{*I}$ en un determinado nodo $p \in e^I$ de la interfaz de contacto se expresa como:

$$\mathbf{F}_{T,p}^{*I} = \int_{\mathbb{B}^I} \sigma_T^* \cdot \text{Grad} [\boldsymbol{\eta}_p^I] dV \quad \forall p \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (3.93)$$

donde luego de reemplazar los desplazamientos virtuales $\boldsymbol{\eta}_p^I$ por las funciones de forma correspondientes (método de Galerkin), se obtienen las fuerzas nodales equivalentes resultantes en cada nodo de la interfaz:

$$\mathbf{F}_{T,p} = - \int_{\mathbb{B}^I} \nabla N_p \cdot \sigma_T^* dV \quad \forall p \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (3.94)$$

Observaciones

- El término que resulta de la forma regularizada del problema expuesta en el presente apartado (modelo de Norton-Hoff), es:

$$G_{C_T}^{ACIM,reg}(\varphi^h, \boldsymbol{\eta}^h) = \frac{2h_{\bar{p}-q_1}}{\Delta t} \int_{\Gamma_C} \tilde{\sigma}_T^e(\mu, \tilde{\varepsilon}_T^e, \tilde{\sigma}_N^e) (\nabla^s \boldsymbol{\eta}^h \cdot \boldsymbol{\eta}^h) d\Gamma \quad (3.95)$$

en donde la estructura resultante coincide esencialmente con lo antes obtenido en los casos de: contacto normal y contacto tangencial bajo la ley de Coulomb.

- Otra vez, las fuerzas nodales de contacto tangencial en el/los contornos bajo interacción, se calculan mediante un proceso de condensación estática que traduce en fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas internas calculadas dentro del dominio de la interfaz de contacto.
- El proceso de condensación estática inherente a la metodología ACIM no incrementa el número de grados de libertad determinado por el número de partículas del problema. Sin embargo sí aumenta el ancho de banda de la matriz de rigidez global, ya que relaciona grados de libertad que en el problema original se encuentran por lo general desacoplados.

3.4.10. Algoritmos asociados al método ACIM

La formulación del método ACIM se completa en este apartado al presentar las estrategias seguidas durante su implementación, donde a nivel algorítmico es posible aprovechar sus características y propiedades específicas. En primer lugar se presenta el algoritmo general de la metodología, el cual a su vez puede ser integrado fácilmente en la estructura típica y estándar de un código de elementos finitos. Para esto se considera el caso genérico en el que el algoritmo ACIM se encuentra embebido en un esquema más general destinado a resolver problemas no lineales mediante una estrategia iterativa, como es el clásico método de Newton-Raphson (NR).

En el cuadro 3.3 se tiene que, partiendo de las tensiones normales del incremento anterior (${}^n\sigma_N^p$), se inicia el algoritmo con la creación de la interfaz de contacto. Luego, sobre todos los elementos de interfaz, se lleva a cabo una interpolación de las tensiones normales (${}^n\sigma_N^p$) nodales a fin de obtener las propias a nivel elemental (${}^n\sigma_N^e$). Luego, dentro del lazo de iteraciones de Newton-Raphson, y para cada elemento de la interfaz e , se identifica el cuerpo al que pertenece cada una de las partículas que componen a esa conectividad y se construye su elemento virtual asociado (siguiendo para esto las premisas definidas en el Apéndice II). A continuación se calcula la deformación normal (inicial, incremental y total: ${}^{n+1}\varepsilon_N^0$, ${}^{n+1}\Delta\varepsilon_N$ y ${}^{n+1}\varepsilon_N$) y las correspondientes tensiones de contacto. Resulta importante advertir que las tensiones actuales totales ${}^{n+1}\sigma_N^e$ se calculan con el aporte de una componente del incremento actual ${}^{n+1}\Delta\sigma_N^e$ y de una componente proveniente de las tensiones normales del incremento anterior ${}^n\sigma_N^e$ (estas resultan de la interpolación realizada previamente).

Las fuerzas de contacto se calculan de acuerdo a lo explicado en el punto 3.4.7, con lo cual ya contienen una componente aportada por las tensiones de contacto del incremento

anterior. Por su parte, la contribución que hace el contacto en la matriz tangente se deduce en detalle en el Apéndice III. Una vez recorridos todos los elementos de la interfaz se repite el cálculo del contacto en cada iteración de NR hasta alcanzar la convergencia. Posteriormente, se lleva a cabo un proceso de suavizado local de las tensiones incrementales de contacto a fin de obtener su valor nodal. Dicho valor se transporta luego junto con la partícula durante la actualización de las posiciones nodales, para convertirse finalmente en la tensión de contacto inicial de esa partícula en el próximo incremento (${}^n\sigma_N^p$). El suavizado local de las tensiones se efectúa mediante la utilización de una matriz diagonal definida como: $M_p^e = \delta_{ij} \int_{B^I} N_i^e N_j^e dV$ para $[i, j = 1 \dots np^e]$, que posee un formato similar al de una matriz de masas concentrada o diagonalizada, y se utiliza como medio de ponderación nodal durante dicho proceso [70].

Para calcular la componente tangente del contacto se procede a incluir en el algoritmo del cuadro 3.3 el cálculo de las deformaciones, tensiones y fuerzas tangenciales, proceso que se efectúa siguiendo los mismos pasos que en el caso de la componente normal.

El método ACIM, en lo que respecta al cálculo de las deformaciones, tensiones, fuerzas y aportes a la matriz tangente, presenta una marcada similitud a lo que es la implementación de un modelo constitutivo general. Por lo tanto, para las diferentes variantes algorítmicas relativas a los cálculos de las componentes normales y tangenciales, el algoritmo general descrito en el cuadro 3.3 permanece siendo válido, mientras que las diferencias asociadas a cada estrategia en particular son presentadas a continuación en cuadros que resumen los cálculos de deformaciones, tensiones, fuerzas y contribuciones a la matriz tangente específicos de cada caso.

Algoritmo para el cálculo de la componente normal del contacto

En primer lugar se considera el cálculo de la componente normal del contacto, donde se plantea un formato algorítmico básico que luego repite su esquema general permitiendo la introducción de variantes destinadas al cálculo de la componente tangencial. En el cuadro 3.4 se puede observar el algoritmo relacionado con la formulación expuesta en los apartados 3.4.5, 3.4.7 y en el Apéndice II del presente capítulo. Resulta importante resaltar que la deformación normal inicial ${}^{n+1}\epsilon_N^0$ no depende de las iteraciones, al igual que los vectores unitarios tangente y normal. En el caso de estos últimos, la hipótesis adoptada aporta una simplificación importante en lo que respecta a la formulación, implementación y tasa de convergencia del modelo y se sustenta en el hecho de que la actualización incremental de dichos vectores se lleva a cabo con una frecuencia mínima necesaria (dependiente del tipo de problema que se está resolviendo), que garantiza la correcta evolución de los contornos e imposición de la condición de contacto.

La expresión ${}^{n+1}\nabla(N_i^e)_N$ se lee como: el gradiente en la dirección normal de la función de forma del nodo i perteneciente al elemento e de la interfaz de contacto evaluada en el tiempo $n + 1$.

Dados ${}^n\sigma_N^p$

-Lazo N° incrementos

-Creación de la interfaz de contacto

-Interpolación de las tensiones nodales iniciales

$${}^n\sigma_N^e = N_p^e {}^n\sigma_N^p \quad [p = 1 \dots np]$$

-Lazo interacciones NR

-Lazo elementos de la interfaz

-Identificación de los nodos y los cuerpos asociados

-Creación del elemento virtual

-Cálculo de las deformaciones normales

$${}^{n+1}\varepsilon_N^e = {}^{n+1}\varepsilon_N^0 + {}^{n+1}\Delta\varepsilon_N$$

-Cálculo de las tensiones normales

$${}^{n+1}\Delta\sigma_N^e = K_N {}^{n+1}\varepsilon_N^e$$

$${}^{n+1}\sigma_N^e = {}^n\sigma_N^e + {}^{n+1}\Delta\sigma_N^e$$

-Cálculo de las fuerzas de contacto

-Cálculo de las contribuciones a la matriz tangente

-Fin lazo de elementos de interfaz

-Fin lazo de iteraciones NR (previa verificación de convergencia)

-Suavizado de las tensiones normales

$${}^{n+1}\sigma_N^p = {}^n\sigma_N^p + [M_p^e]^{-1} \int_{B^I} N_p^e {}^{n+1}\Delta\sigma_N^e dV \quad [p = 1 \dots np]$$

-Fin lazo de incrementos

Cuadro 3.3: Método ACIM - Algoritmo general

-Para cada $e \in \mathbb{B}^I$	
-Cálculo de la deformación normal	
inicial	${}^{n+1}\varepsilon_N^0 = \frac{({}^n\mathbf{X}_p^1 - {}^n\mathbf{X}_{q1}^2) \cdot {}^n\hat{\mathbf{N}} - g_0}{h_c}$
incremental	${}^{n+1}\Delta\varepsilon_N = {}^n\hat{\mathbf{N}} \cdot ({}^{n+1}\Delta\varepsilon^e) \cdot {}^n\hat{\mathbf{N}}$
	${}^{n+1}\Delta\varepsilon^e = \frac{1}{2} ({}^{n+1}\Delta\mathbf{u}^e \otimes \nabla + \nabla \otimes {}^{n+1}\Delta\mathbf{u}^e)$
total	${}^{n+1}\tilde{\varepsilon}_N^e = {}^{n+1}\varepsilon_N^0 + {}^{n+1}\Delta\varepsilon_N$
-Cálculo de las tensiones normales	
	${}^{n+1}\tilde{\sigma}_N^e = {}^{n+1}\mathbb{E}^I {}^{n+1}\tilde{\varepsilon}_N^e$
	${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_N^e = {}^{n+1}\tilde{\sigma}_N^e ({}^n\hat{\mathbf{N}} \otimes {}^n\hat{\mathbf{N}})$
-Cálculo de las fuerzas de contacto normal	
	${}^{n+1}\mathbf{F}_{N,p} = - \int_{B^I} {}^{n+1}\nabla N_p^e \cdot {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}_N^e dV \quad \forall p \in e$
-Cálculo de la contribución de la fza. normal a la matriz tangente	
	${}^{n+1}\mathbb{K}_N = -K_N \int_{B^I} {}^{n+1}\nabla(N_i^e)_N {}^{n+1}\nabla(N_j^e)_N ({}^n\hat{\mathbf{N}} \otimes {}^n\hat{\mathbf{N}}) dV \quad [i, j = 1 \dots np^e]$

Cuadro 3.4: Método ACIM - Contacto normal

Algoritmo para el cálculo de la componente tangencial del contacto

Para el cálculo de la componente tangencial del contacto, en los cuadros 3.4 y 3.6, se exponen los algoritmos correspondientes a los modelos desarrollados en los apartados anteriores: el de Coulomb y el de Norton-Hoff.

Para el modelo de Norton-Hoff, cuya formulación se encuentra detallada en el apartado 3.6, se presenta un algoritmo donde el coeficiente de fricción es variable. Para el caso desarrollado, el coeficiente de fricción μ se considera dependiente de los parámetros: densidad del material y velocidad tangencial incremental. La selección de tales parámetros es especialmente válida para los problemas que involucran a materiales pulverulentos, etc., tal como se explicó en el apartado 3.4.9. Cabe destacar que para el cálculo de la velocidad tangencial incremental se sigue la misma metodología que fue utilizada en el cálculo de los desplazamientos tangenciales incrementales anteriormente descritos.

La calibración del coeficiente μ en función de la velocidad tangencial relativa y de la densidad se toman de la referencia [17], donde se utiliza la misma ley de fricción.

-Para cada $e \in \mathbb{B}^I$

-Cálculo de la deformación tangencial

$${}^{n+1}\tilde{\varepsilon}_T^e = \Delta \varepsilon_T^e = {}^n\hat{\mathbf{T}} \cdot ({}^{n+1}\Delta \varepsilon^e) \cdot {}^n\hat{\mathbf{N}}$$

-Cálculo del desplazamiento tangente incremental

$${}^{n+1}u_T^e = 2 {}^n h_c {}^{n+1}\tilde{\varepsilon}_T^e$$

-Cálculo de las tensiones tangenciales

$${}^{n+1}\tilde{\sigma}_T^{e,trial} = K_T {}^{n+1}\tilde{\varepsilon}_T^e$$

$${}^{n+1}\phi^{e,trial} = \left| {}^{n+1}\tilde{\sigma}_T^{e,trial} \right| - \mu \left| {}^{n+1}\tilde{\sigma}_N^e \right|$$

si ${}^{n+1}\phi^{e,trial} \leq 0$ (caso 1) entonces

$${}^{n+1}\tilde{\sigma}_T^e = {}^{n+1}\tilde{\sigma}_T^{e,trial}$$

si no (caso 2)

$${}^{n+1}\tilde{\sigma}_T^e = -\mu \operatorname{sign}({}^{n+1}u_T^e) \left| {}^{n+1}\tilde{\sigma}_N^e \right|$$

-Tensor de tensiones tangenciales

$${}^{n+1}\sigma_T^e = {}^{n+1}\tilde{\sigma}_T^e \left({}^n\hat{\mathbf{T}} \otimes {}^n\hat{\mathbf{N}} \right)$$

-Cálculo de las fuerzas de contacto tangencial

$${}^{n+1}\mathbf{F}_{T,p} = \int_{B^I} {}^{n+1}\nabla N_p^e \cdot {}^{n+1}\sigma_T^e dV \quad \forall p \in e$$

-Cálculo de la contribución de la fza. tangencial a la matriz tangente

$${}^{n+1}\mathbb{K}_{TCOU} = \int_{B^I} \left[(A - B) \left({}^n\hat{\mathbf{N}} \otimes {}^n\hat{\mathbf{T}} \right) + C \left({}^n\hat{\mathbf{T}} \otimes {}^n\hat{\mathbf{T}} \right) \right] dV$$

$$A = \frac{K_T}{2} \left| {}^{n+1}\tilde{\sigma}_N^e \right| \begin{matrix} {}^{n+1}\nabla(N_i^e)_N & {}^{n+1}\nabla(N_j^e)_T \\ {}^{n+1}\nabla(N_i^e)_T & {}^{n+1}\nabla(N_j^e)_N \end{matrix}$$

$$B = K_N \begin{matrix} {}^{n+1}\Delta \varepsilon_T & {}^{n+1}\nabla(N_i^e)_N & {}^{n+1}\nabla(N_j^e)_N \\ {}^{n+1}\nabla(N_i^e)_N & {}^{n+1}\nabla(N_j^e)_N & {}^{n+1}\nabla(N_j^e)_N \end{matrix}$$

$$C = \frac{K_T}{2} \left| {}^{n+1}\tilde{\sigma}_N^e \right| \begin{matrix} {}^{n+1}\nabla(N_i^e)_N & {}^{n+1}\nabla(N_j^e)_N \\ {}^{n+1}\nabla(N_i^e)_T & {}^{n+1}\nabla(N_j^e)_T \end{matrix}$$

Cuadro 3.5: Método ACIM - Contacto tangencial, modelo de Coulomb estándar

-Para cada $e \in \mathbb{B}^I$

-Cálculo de la deformación tangencial

$${}^{n+1}\tilde{\varepsilon}_T^e = \Delta \varepsilon_T^e = {}^n\hat{\mathbf{T}} \cdot ({}^{n+1}\Delta \varepsilon^e) \cdot {}^n\hat{\mathbf{N}}$$

-Cálculo del desplazamiento tangente incremental

$${}^{n+1}v_T^e = \frac{2^n h_c^{n+1} \tilde{\varepsilon}_T^e}{\Delta t}$$

-Cálculo de las tensiones tangenciales

$${}^{n+1}\tilde{\sigma}_T^e = -\mu (|{}^{n+1}v_T^e|) \operatorname{sign}({}^{n+1}v_T^e) |{}^{n+1}\tilde{\sigma}_N^e|$$

-Tensor de tensiones tangenciales

$${}^{n+1}\sigma_T^e = {}^{n+1}\tilde{\sigma}_T^e ({}^n\hat{\mathbf{T}} \otimes {}^n\hat{\mathbf{N}})$$

-Cálculo de las fuerzas de contacto tangencial

$${}^{n+1}\mathbf{F}_{T,p} = \int_{B^I} {}^{n+1}\nabla N_p^e \cdot {}^{n+1}\sigma_T^e dV \quad \forall p \in e$$

-Cálculo de la contribución de la fza. tangencial a la matriz tangente

$$\mathbb{K}_{T_{NH}} = \int_{\mathbb{B}^I} ({}^{n+1}\mu) \left\{ \frac{{}^n h_c {}^{n+1}\tilde{\sigma}_N}{\Delta t} \left[A^* ({}^n\hat{\mathbf{T}} \otimes {}^n\hat{\mathbf{T}}) + B^* ({}^n\hat{\mathbf{N}} \otimes {}^n\hat{\mathbf{T}}) \right] + C^* ({}^n\hat{\mathbf{N}} \otimes {}^n\hat{\mathbf{T}}) \right\} dV$$

$$A^* = {}^{n+1}\nabla(N_i^e)_N \quad {}^{n+1}\nabla(N_j^e)_N$$

$$B^* = {}^{n+1}\nabla(N_i^e)_N \quad {}^{n+1}\nabla(N_j^e)_T$$

$$C^* = K_N \quad ({}^{n+1}v_T) \quad {}^{n+1}\nabla(N_j^e)_N$$

Cuadro 3.6: Método ACIM - Contacto tangencial, modelo de Norton-Hoff

3.5. Problemas de validación

En el presente apartado se desarrollan una serie de problemas de contacto y de fricción destinados a poner a prueba el desempeño de la metodología propuesta. En algunas de las diferentes situaciones analizadas se cuenta con la solución analítica del problema, mientras que en otras se recurre a soluciones obtenidas a partir de la aplicación de otras metodologías e implementaciones [55][36]. El objetivo es validar los resultados obtenidos a través de la aplicación del método ACIM al compararlos con las soluciones de referencia. Para que finalmente, a partir de las conclusiones surgidas, se puedan establecer sus ventajas y limitaciones con respecto a las diferentes opciones disponibles en el ámbito de la solución numérica de problemas de contacto.

Los problemas de validación analizados son los siguientes:

1. Patch test de contacto o test de la parcela de contacto
2. Contacto de Hertz
3. Problema de contacto axisimétrico

3.5.1. Problema 1: Patch Test de Contacto

El patch test para el problema de contacto presenta algunas diferencias respecto del clásico patch test o test de la parcela para evaluar el desempeño del FEM aplicado a los medios continuos [27]. La importancia de este ensayo en el problema de contacto radica en el hecho de que a ambos lados de la superficie de contacto pueden existir discretizaciones con diferentes características, específicamente en los casos donde no existe coincidencia entre los nodos de contacto de ambos cuerpos. Como consecuencia de esto, un parámetro importante para medir la calidad de un método de contacto es valorar la capacidad de dicho método para transmitir una presión uniforme a través de la superficie de contacto [36].

El ensayo se basa en el contacto entre dos cuerpos elásticos rectangulares, uno superior (punch) y otro inferior (foundation). En la cara superior del cuerpo 1 (punch) se impone una presión de compresión uniforme $q = 40 \text{ kPa}$, mientras que en la cara inferior del cuerpo 2 (foundation) se aplica una restricción de desplazamientos en la dirección vertical con el punto central bajo una condición de empotramiento, ver la figura 3.18. Los valores correspondientes a las propiedades mecánicas de ambos cuerpos se especifican en la tabla 3.7. El problema involucra materiales cuyo comportamiento es elástico lineal y se resuelve bajo la hipótesis de deformación plana, sin considerar el peso propio de los cuerpos y despreciando los efectos inerciales (problema cuasiestático). Con el fin de analizar exclusivamente al contacto normal, los efectos de la fricción han sido excluidos del problema.

Para llevar a cabo el análisis se aplican dos estrategias de discretización, una en la que los nodos de ambos cuerpos son coincidentes y otra en la que no lo son. Para esta última se consideran a su vez tres niveles de discretización, en los cuales la dimensión horizontal de los cuerpos se representa por medio de un número diferente de nodos, ver el cuadro 3.8. Cabe destacar que en el caso donde se tienen nodos no coincidentes, el mayor grado de discretización es aplicado al cuerpo 2, mientras que el cuerpo superior mantiene un

Cuerpo	E [MPa]	ν
1	100	0.3
2	100	0.3

Cuadro 3.7: Patch test - Propiedades mecánicas

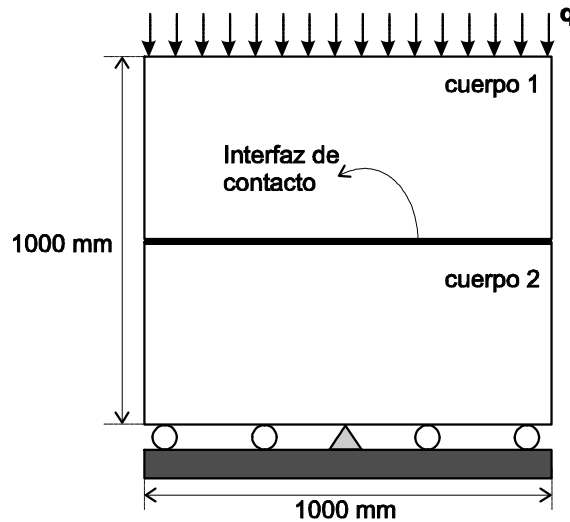


Figura 3.18: Esquema perteneciente a la geometría y las condiciones de contorno del patch test de contacto

número constante de 3 nodos, ver la figura 3.21. El objetivo de esta diferenciación es observar el comportamiento de la metodología ACIM ante mallas con nodos no coincidentes y con diferentes grados de discretización a ambos lados de la interfaz de contacto. En cuanto al valor de los parámetros característicos del método utilizados en todos los casos analizados, los mismos se encuentran listados en el cuadro 3.9, donde K_N es el parámetro de penalización asociado a la tensión normal, f es el factor de reducción geométrica, h es la distancia media entre los nodos de la zona de contacto. Por su parte, las normas utilizadas para considerar la convergencia del problema son las habitualmente usadas para llevar a cabo la medida del error. En este sentido, la norma de penetración de contacto se encuentra normalizada con respecto al parámetro h .

La solución exacta del problema indica que la presión de contacto medida en la zona de interacción coincide con la carga de presión impuesta q sobre el cuerpo 1. Los resultados

Nivel de Discretización	Nº de nodos	
	Nodos coincidentes	Nodos no Coincidentes
1	C1=C2=3	C1=3 - C2=5
2	C1=C2=5	C1=3 - C2=7
3	C1=C2=9	C1=3 - C2=9

Cuadro 3.8: Patch test - Número de nodos por caso y cuerpo

Parámetro	Valor
K_N	1.0E06 MPa
f	0.1
h (zona contacto)	variable según caso
N° incrementos	1
N° iteraciones	2
Norma fuerzas	1.0E-12
Norma desplazamientos	1.0E-11
Norma penetración contacto	1.0E-04

Cuadro 3.9: Patch test - Datos relativos a la simulación

obtenidos para los diferentes casos planteados se resumen en un conjunto de curvas que representan la presión de contacto en cada uno de los nodos contenidos en la superficie de contacto del cuerpo 2. La figura 3.19 muestra las presiones de contacto obtenidas mediante la aplicación de la metodología ACIM para la solución del patch test en los casos donde se consideraron nodos coincidentes. En dicha figura se observa que en todos los casos el valor de la presión de contacto concuerda exactamente con la presión impuesta q , lo cual indica que, ante diferentes grados de discretización con nodos coincidentes, el método es perfectamente capaz de transferir una presión constante a través de la interfaz de contacto.

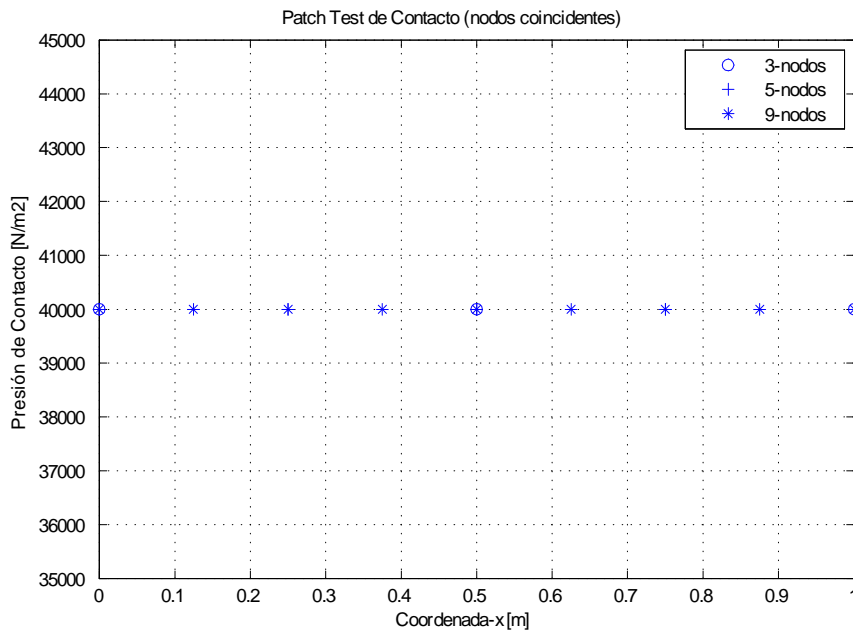


Figura 3.19: Presiones resultantes en el problema de patch test de contacto para los casos con discretizaciones con nodos coincidentes

Por otra parte, en la figura 3.20 se expone el resultado obtenido al utilizar discretiza-

ciones con nodos no coincidentes y manteniendo un número constante de 3 nodos en la cara inferior del cuerpo 1. En estas curvas se puede observar que, en el caso en el que se tienen 5 nodos en el contorno superior del cuerpo 2, la presión impuesta vuelve a ser transmitida exactamente al cuerpo objetivo. En consecuencia, se puede afirmar que el método ACIM es capaz de transmitir correctamente una carga compresiva a través de la interfaz de contacto, y cumplir de esta forma con el objetivo fundamental del patch test.

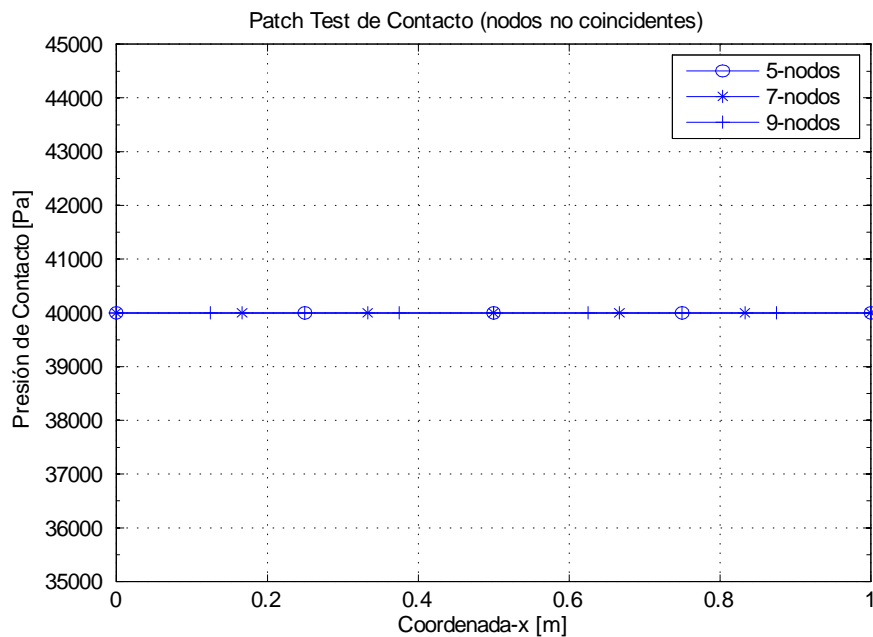


Figura 3.20: Presiones resultantes en el problema de patch test de contacto para los casos con discretizaciones con nodos no coincidentes

Para completar el análisis del problema resulta interesante observar la figura 3.21, en donde se ilustran desde un punto de vista práctico, algunos de los aspectos más relevantes del método ACIM. Se trata de: el efecto de reducción sobre la geometría de los cuerpos 1 y 2 a fin de construir la interfaz de contacto, la presencia de dicha interfaz dentro de los límites de la zona de contacto y el aspecto que presenta la interfaz en el caso más exigente, es decir cuando se tienen nodos no coincidentes con una marcada diferencia en los grados de discretización a ambos lados de la zona de contacto.

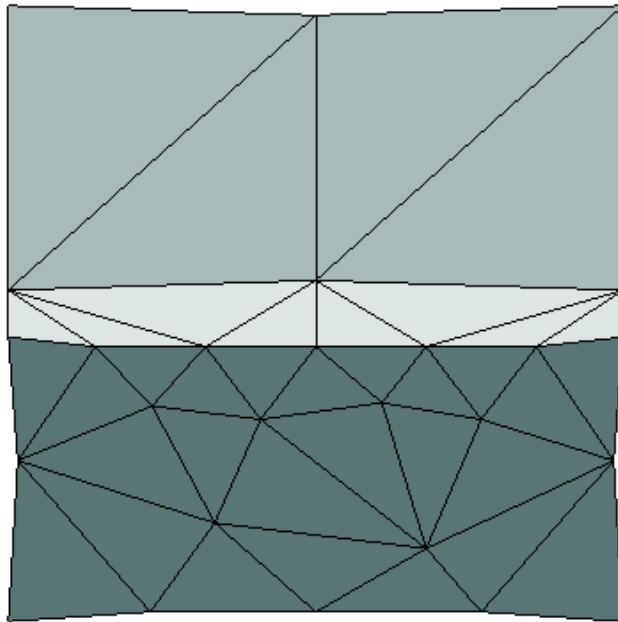


Figura 3.21: Detalle de la interfaz de contacto en el patch test de contacto entre los cuerpos 1 y 2

3.5.2. Problema 2: Contacto de Hertz

El presente problema, que involucra el contacto con y sin fricción de un cilindro (punch) con una base cuadrada (foundation), ambos elásticos lineales y en 2D, pertenece a la variedad de los denominados problemas contacto de Hertz [55], los cuales son frecuentemente utilizados para validar modelos y métodos de contacto. Los objetivos perseguidos por el test son:

- Analizar una situación de contacto donde la superficie de contacto evoluciona aumentando su extensión a lo largo del proceso
- Observar el desempeño del método de contacto ante una situación que comprende superficies de contacto curvas.
- Poner a prueba el método ante situaciones de contacto con cuerpos deformables a ambos lados de la región de contacto.
- Analizar y medir las situaciones de adherencia-deslizamiento (stick-slip) a lo largo de la zona de contacto ante la existencia de fricción.

La figura 3.22 muestra la geometría perteneciente al problema, en ella se observan además de las dimensiones geométricas de cada uno de los cuerpos involucrados sus correspondientes condiciones de contorno. Debido a la simetría del problema, la resolución del mismo se realiza sobre la mitad de la geometría ubicada en el lado derecho del eje de simetría vertical que se observa en la figura. La fuerza $F = 35 \text{ kN}$ se aplica puntualmente con dirección vertical y sentido descendente sobre el punto superior del cilindro por donde pasa el eje de simetría. La condición de contorno sobre la fundación es de empotramiento sobre toda su cara inferior, ver la figura 3.22. Las propiedades mecánicas de los cuerpos se especifican en el cuadro 3.11, y corresponden a un bloque de aluminio (fundation) y a un cilindro (punch) de acero. La resolución se lleva a cabo bajo la hipótesis de deformación plana, sin considerar los efectos de la gravedad y de las fuerzas inerciales. Cuando se incluyen los efectos de la fricción se adopta el modelo de Coulomb.

Los casos analizados incluyen dos situaciones, una en la que el coeficiente de fricción de Coulomb $\mu = 0$ y otra en la que $\mu = 0.1$. El caso sin fricción admite una solución analítica [40], deducida para el contacto entre dos cilindros elásticos a lo largo de una línea de contacto (2D). En el cuadro 3.10 se encuentran recopiladas las ecuaciones básicas asociadas a la formulación del problema de contacto de Hertz [40][55]. En ellas $P_{\text{máx}}$ es la presión máxima de contacto, F es la fuerza aplicada en la parte superior del cilindro, E^* es el módulo de elasticidad combinado, B es la longitud del cilindro (1 mm para el caso plano), R^* es el radio combinado, ξ son las coordenadas x normalizadas en función de la distancia a , que representa la extensión de la zona de contacto y es además, una de las incógnitas a resolver. Por su parte, E_1, E_2, ν_1 y ν_2 son las propiedades elásticas de los cuerpos especificadas en el cuadro 3.11. El radio combinado R^* se calcula suponiendo que el radio del cilindro inferior (fundación cuadrada) tiende a infinito, con lo cual su curvatura tiende a cero.

Utilizando los valores numéricos anteriormente definidos como parámetros del problema, el resultado analítico indica que $a = 6.21 \text{ mm}$ y $P_{\text{máx}} = 3585 \text{ kPa}$. La solución numérica se llevó a cabo utilizando la discretización de los cuerpos presentada en la figura 3.23. En cuanto al valor de los parámetros característicos del método utilizados en

$$P_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{FE^*}{2\pi BR^*}}$$

$$a = \sqrt{\frac{8FR^*}{\pi BE^*}}$$

$$\xi = \frac{x}{a}$$

$$P = P_{\text{máx}} \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$E^* = \frac{2E_1 E_2}{E_2(1-\nu_1^2) + E_1(1-\nu_2^2)}$$

$$R^* = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R^* = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \text{ (línea recta } \Rightarrow R_2 \rightarrow \infty)$$

Cuadro 3.10: Contacto de Hertz - Formulación analítica

Cuerpo	E [MPa]	ν
cilindro	210E03	0.3
fundación	70E03	0.3

Cuadro 3.11: Contacto de Hertz - Propiedades mecánicas

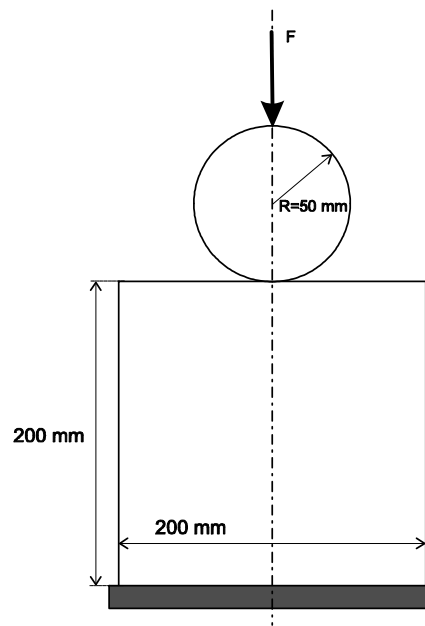


Figura 3.22: Esquema de la geometría perteneciente al problema de contacto de Hertz

este caso, los mismos se encuentran listados en el cuadro 3.12, donde K_N y K_T son los parámetros de penalización asociados a la tensión normal y tangencial respectivamente, f es el factor de reducción geométrica, h es la distancia media entre los nodos de la zona de contacto y el resto son las normas habitualmente utilizadas para llevar a cabo la medida del error y establecer un criterio de convergencia, en este sentido, la norma de penetración de contacto se encuentra normalizada con respecto al parámetro h .

En la figura 3.24 se pueden observar las curvas analítica y numérica correspondientes a las presiones de contacto en función de la longitud de arco a lo largo de la cual se extiende la zona de contacto. La mayor presión de contacto se sitúa sobre el eje de simetría, el que a su vez contiene la fuerza externa aplicada sobre el cilindro superior, luego la presión de contacto va descendiendo a medida que se avanza en la dirección x , llegando a ser

Parámetro	Valor
K_N	1.0E06 MPa
K_T	1.0E03 MPa
f	0.25
h (zona contacto)	0.5 mm
N° incrementos	10
N° iteraciones	5
Norma fuerzas	1.0E-13
Norma desplazamientos	1.0E-15
Norma penetración contacto	1.0E-02

Cuadro 3.12: Contacto de Hertz - Datos relativos a la simulación

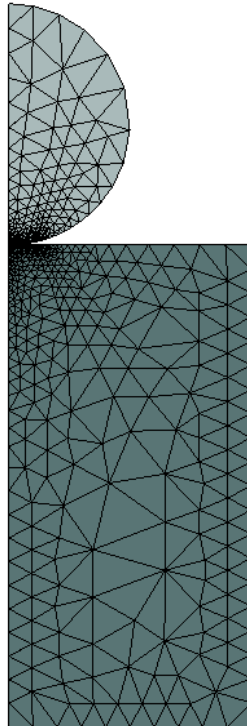


Figura 3.23: Detalle de la geometría discretizada perteneciente al problema de contacto de Hertz

nula a partir del punto donde los contornos de los cuerpos dejan de estar en contacto. Se destaca la alta concordancia alcanzada entre el resultado numérico obtenido por medio de la metodología ACIM y la solución analítica. Adicionalmente, se subraya que la condición de impenetrabilidad se logró imponer alcanzando un valor máximo de penetración de $5.0E-04$ mm, ver el detalle de la zona de contacto en la figura 3.25.

El segundo caso estudiado, donde se cuenta con los efectos de la fricción ($\mu = 0.1$), no presenta una solución analítica por medio de la cual se pueda contrastar el resultado obtenido numéricamente, sin embargo, para su comparación, se han tomado como referencia los resultados publicados en [55]. En la figura 3.26 se pueden observar las tensiones normales y tangenciales de contacto resultantes de la utilización de la metodología ACIM y su comparación con los resultados tomados de la citada referencia, obtenidos con el código comercial ABAQUS [41]. Del análisis y comparación de las curvas se advierte, por un lado: la alta coincidencia cuantitativa entre ambos resultados, y por otro lado: el menor número de oscilaciones presentes en las tensiones que resultan del método ACIM. Esto último indicaría que la utilización de la interfaz de contacto y el consecuente cálculo de una fuerza resultante, que es obtenida de la composición local de las fuerzas calculadas sobre varios elementos de la interfaz, tiende a suavizar las oscilaciones de dichas fuerzas observadas en los resultados de otras metodologías. En consecuencia, las fuerzas nodales resultantes de tal composición tienden a ser más homogéneas, y presentan la ventaja añadida de que dicho suavizado no extiende la zona de contacto más allá de lo que la fenomenología indica, ver la figura 3.26.

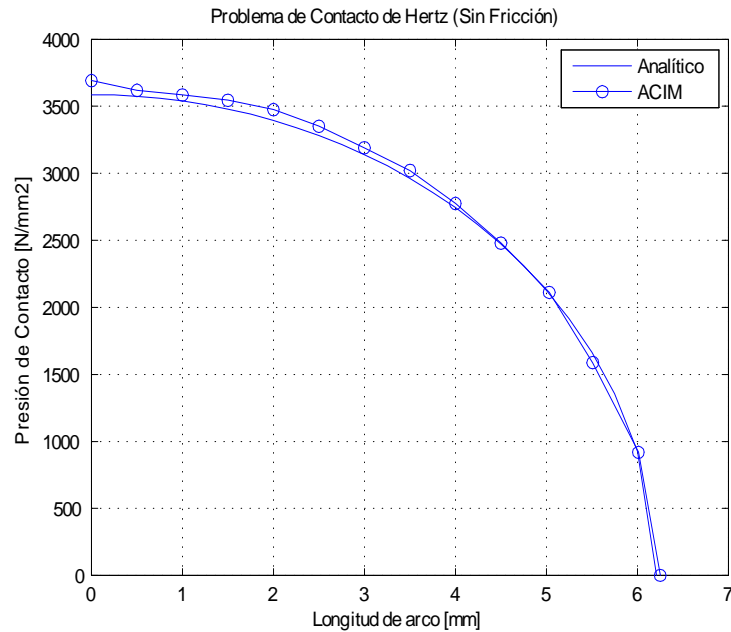


Figura 3.24: Relación presión de contacto - longitud de la zona de contacto resultantes del cálculo analítico y numérico del problema de contacto de Hertz sin fricción

Por otra parte, la figura 3.27 muestra el deslizamiento entre los contornos en contacto a lo largo de la longitud de arco de la superficie curvada de contacto. Se puede observar un comportamiento cualitativamente similar entre los resultados obtenidos por el método ACIM y el tomado de la referencia [55]. Ambos resultados contienen las típicas oscilaciones debidas al efecto stick-slip entre los contornos de los cuerpos (estas oscilaciones se perciben más fuertemente sobre los desplazamientos que sobre las fuerzas), sin embargo el método ACIM presenta unos valores mayores de deslizamiento, acentuados especialmente a medida que se aproxima a la zona donde finaliza la región de contacto. Dado que no existe un resultado exacto del problema (surgido de un cálculo analítico), no es conveniente aventurarse a concluir acerca de las causas que motivan este comportamiento. Sin embargo, dado que se obtiene un resultado cualitativamente consistente y cuantitativamente dentro del mismo orden de magnitud, el mismo puede considerarse como válido pero sin dejar de tener en cuenta la particularidad observada en el método.

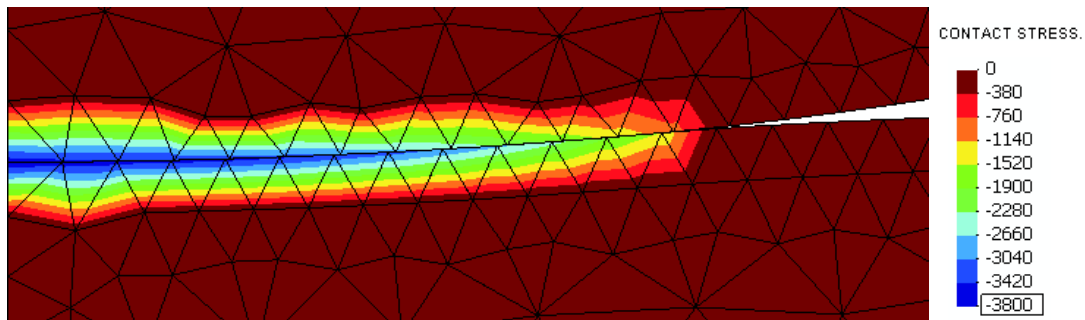


Figura 3.25: Detalle de la discretización, de las tensiones de contacto y de la imposición de la condición de contacto en el problema de contacto de Hertz

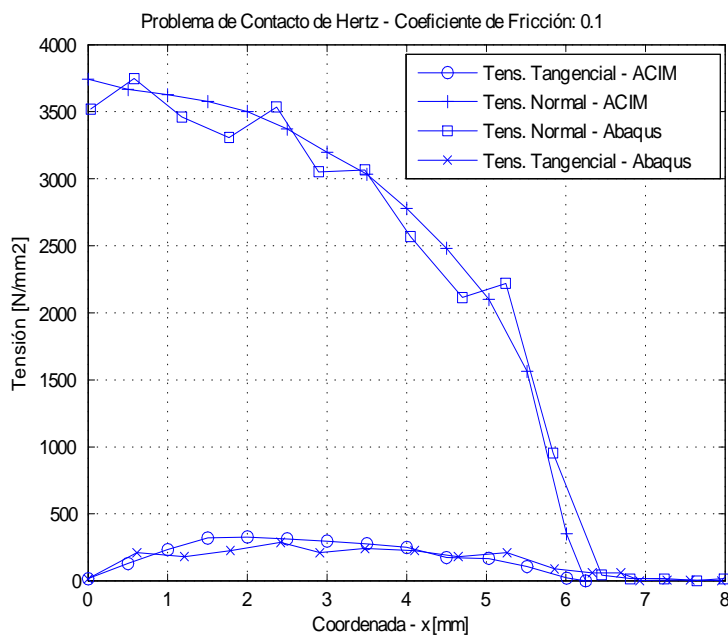


Figura 3.26: Tensiones normales y tangenciales resultantes de la resolución del problema de contacto de Hertz con fricción con el código Abaqus/Standard, ver la ref. [55]

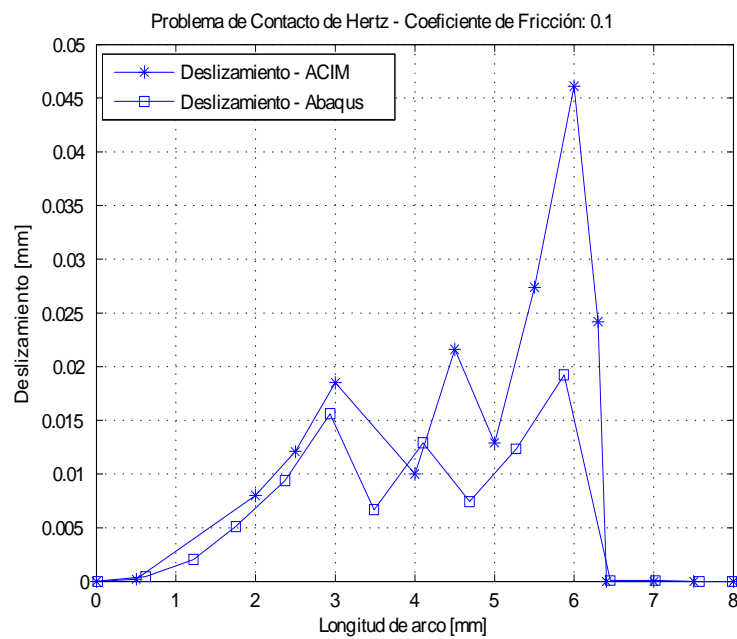


Figura 3.27: Deslizamiento entre los contornos resultantes de la resolución del problema de contacto de Hertz con fricción. Comparación entre la implementación del ACIM y el código Abaqus/Standard, ver la ref. [55]

3.5.3. Problema 3: Contacto Axisimétrico

El problema de contacto axisimétrico, que originalmente se plantea como un problema en 3D donde entran en contacto dos cuerpos elásticos y cilíndricos, uno superior (punch) de acero y otro inferior (foundation) de aluminio, permite ser simplificado de forma razonable en un problema de 2D, debido a su simetría axisimétrica completa. El problema original es esquematizado en la figura 3.28, donde se pueden observar las magnitudes geométricas de los cuerpos, las cargas aplicadas (presión uniforme $P = 100 \frac{N}{mm^2}$) sobre el cuerpo superior y las condiciones de contorno (base del cuerpo inferior bajo la restricción de empotramiento).

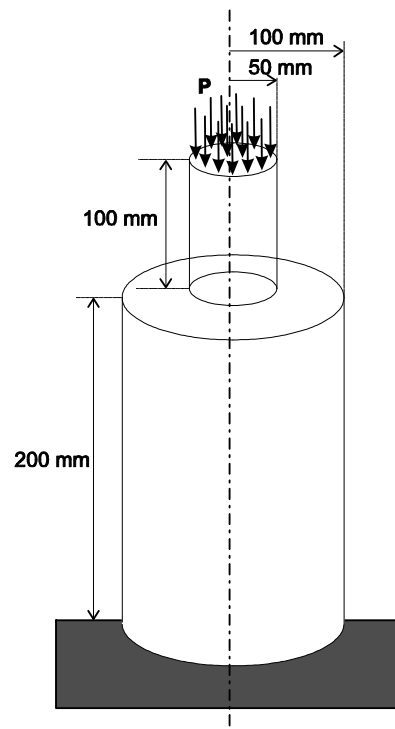


Figura 3.28: Esquema de la geometría en 3D del problema de contacto axisimétrico

En el presente análisis se plantean dos casos de estudio, uno sin la presencia de la fricción y otro que incluye fenómenos de fricción, adoptándose para este último el modelo de Coulomb. Por lo tanto, el coeficiente de fricción de Coulomb adquiere, para cada uno de los casos respectivamente citados, los valores $\mu = 0$ y $\mu = 0.1$. Los objetivos fundamentales del problema son:

- Evaluar la validez y desempeño de la metodología propuesta en el caso axisimétrico.
- Estudiar el comportamiento del método ante situaciones de contacto con cuerpos deformables a ambos lados de la región de contacto.
- Analizar y medir las situaciones de adherencia-deslizamiento (stick-slip) a lo largo de la zona de contacto ante la presencia de fricción.

Cuerpo	E [MPa]	ν
punzón	210E03	0.3
fundación	70E03	0.3

Cuadro 3.13: Axisymmetric contact test - Propiedades mecánicas

Parámetro	Valor
K_N	1.0E07 MPa
K_T	1.0E03 MPa
f	0.25
h	1 mm
N° incrementos	25
N° iteraciones	4
Norma fuerzas	1.0E-12
Norma desplazamientos	1.0E-14
Norma penetración contacto	1.0E-03

Cuadro 3.14: Axi-symmetric contact test - Datos relativos a la simulación

Al igual que en el problema anterior, no se cuenta con una solución analítica con la que comparar los resultados obtenidos. Por lo tanto, a fin de contrastar los resultados, se consideran los valores publicados en la referencia [55], donde las soluciones presentadas han sido resueltas con los códigos comerciales MCS.MARC [25] y Abaqus/Standard [41] según sea el caso. En el cuadro 3.13, se pueden observar las propiedades mecánicas asignadas a los cuerpos involucrados en el problema, las cuales como se dijo anteriormente, corresponden a las propiedades genéricas del acero y del aluminio.

En cuanto al valor de los parámetros característicos del método, los mismos se encuentran listados en el cuadro 3.14, donde K_N y K_T son los parámetros de penalización asociados a la tensión normal y tangencial, f es el factor de reducción geométrica, h es la distancia media entre los nodos de la zona de contacto. Las normas a las que se hace referencia son las usadas habitualmente para llevar a cabo la medida del error y como criterio de convergencia, en este sentido la norma de penetración de contacto se encuentra normalizada con respecto al parámetro h .

En primer lugar se presentan los resultados pertenecientes al caso sin fricción. En las figuras 3.29, 3.30 y 3.31 se muestran las evoluciones, a lo largo del radio de la fundación, de los desplazamientos axiales, los desplazamientos radiales y las tensiones normales de contacto. En los tres casos las comparaciones se hicieron con respecto al código MSC.MARC [25] relativo a la referencia [55]. Los desplazamientos en la dirección axial presentan un buen ajuste entre los resultados obtenidos por medio del método ACIM y los de referencia. Se observa que los mayores desplazamientos se producen sobre el eje de simetría y son de aproximadamente -0.13 mm. Dichos desplazamientos permanecen luego casi constantes hasta alcanzar un radio de 40 mm, a partir del cual descienden de forma abrupta hasta alcanzar un valor asintótico que se ve truncado en el radio 100 mm (donde acaba la fundación). En ésta ubicación se alcanza un valor de los desplazamientos de -0.04 mm.

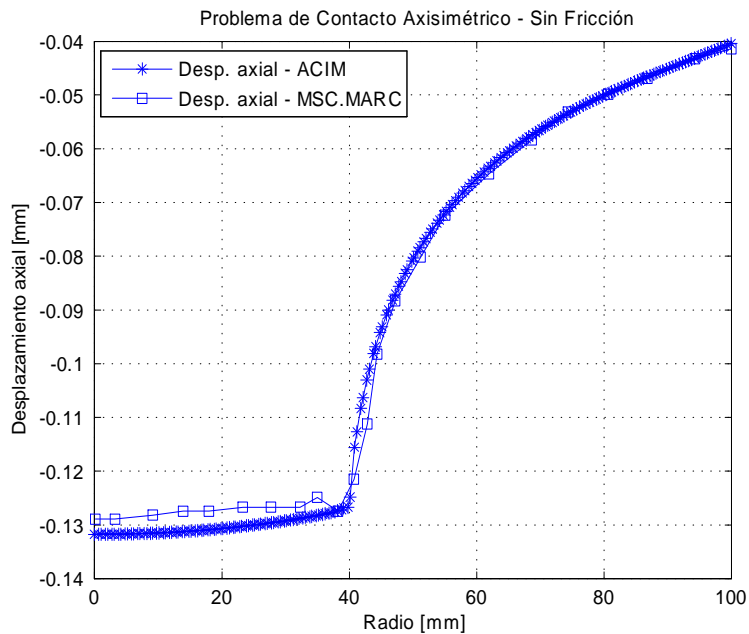


Figura 3.29: Desplazamientos axiales en la superficie superior de la fundación para el caso sin fricción

En el caso de los desplazamientos radiales de la figura 3.30, el valor máximo de los mismos se alcanza en un radio cercano a los 40 *mm*. En el eje de simetría, tal como es de esperarse, el valor de los desplazamientos radiales es nulo, mientras que en un radio de 100 *mm*, el valor al que se tiende asintóticamente es de aproximadamente $-0,005$ *mm*. En este caso se observa también una alta concordancia entre el resultado obtenido y el de referencia.

El análisis de las tensiones normales de contacto, a partir de los datos que se observan en la figura 3.31, indica que el valor máximo se alcanza en la zona cercana al final de la zona de contacto entre los cuerpos (donde hace contacto la esquina del cuerpo punch), y los valores resultantes para ambos métodos son de aproximadamente: 800 *MPa* para el método ACIM y de 400 *MPa* para el código MSC.MARC. Para radios menores a los 30 *mm* resultan tensiones normales de entre 50 – 100 *MPa*, donde ambos resultados presentan algunas diferencias de poca magnitud, que se encuentran dentro del valor de la amplitud de las oscilaciones presentes. Sin embargo, para radios mayores a 40 *mm* (más allá de donde termina la zona de contacto), se tienen valores de tensión de contacto nulo en ambos métodos.

En segundo lugar se estudia el caso donde el coeficiente de fricción es $\mu = 0,1$. Para los desplazamientos axiales, de la figura 3.32, se lleva a cabo la comparación de los resultados correspondientes al método ACIM y al código Abaqus [41], extraído de la referencia [55]. Se puede observar que para radios por debajo de los 40 *mm* los desplazamientos axiales son de aproximadamente -0.13 *mm*, existiendo un error sistemático pero leve (aprox. 5 %) entre ambos resultados, en donde el método ACIM tiende a tener valores por debajo de los de referencia. Sin embargo, para radios por encima de los 40 *mm* la concordancia de los resultados es alta y casi permanente.

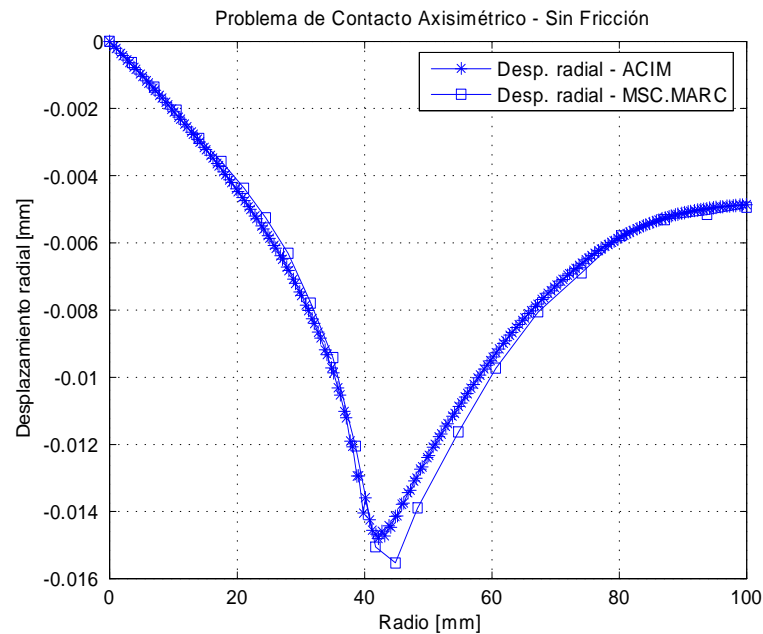


Figura 3.30: Desplazamientos radiales en la superficie superior de la fundación para el caso sin fricción

Las tensiones tangenciales o de cizalladura originadas como consecuencia del fenómeno de fricción entre los cuerpos pueden observarse en la figura 3.33. En ella se destacan una fuerte correspondencia cualitativa entre ambos resultados, donde el método ACIM presenta menos oscilaciones que los resultados de la referencia. Desde un punto de vista cuantitativo se observa que el punto de máxima tensión coincide, en ambos casos, para un radio de 40 *mm*. Sin embargo se observa una diferencia importante (mayor al 100 %) para el resultado surgido del método ACIM.

Las mayores discrepancias observadas entre los resultados obtenidos por medio de la metodología ACIM y los valores de referencia corresponden a las tensiones tangenciales sobre la superficie superior de la fundación, fig. 3.33. Con el objeto de reducir la diferencia existente se llevaron a cabo pruebas variando tanto la discretización de los cuerpos como así también los parámetros de penalización normal y tangencial. El resultado de tales pruebas permite advertir una tendencia a reducir las leves oscilaciones de las tensiones tangenciales, pero no muestran un cambio concluyente de su valor medio a lo largo del radio de la fundación.

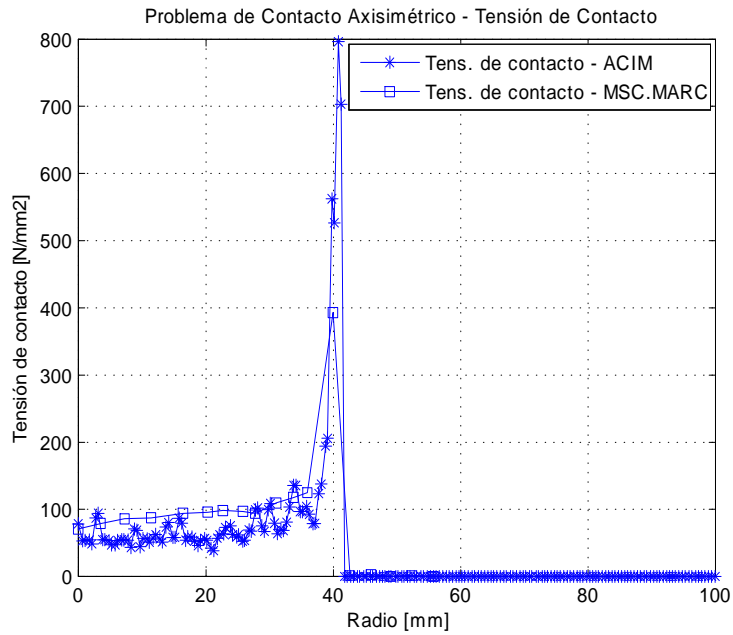


Figura 3.31: Tensiones normales de contacto en la superficie superior de la fundación para el caso sin fricción

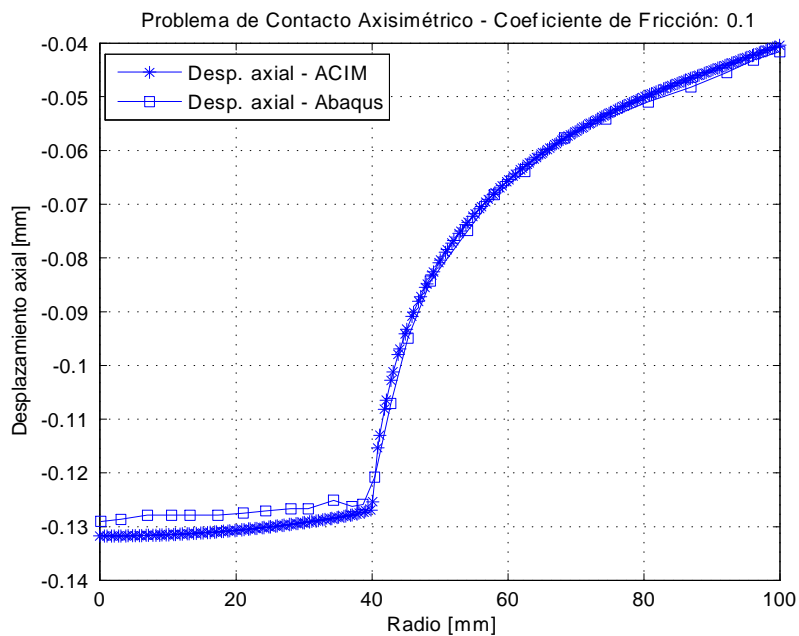


Figura 3.32: Desplazamientos axiales en la superficie superior de la fundación para el caso con fricción

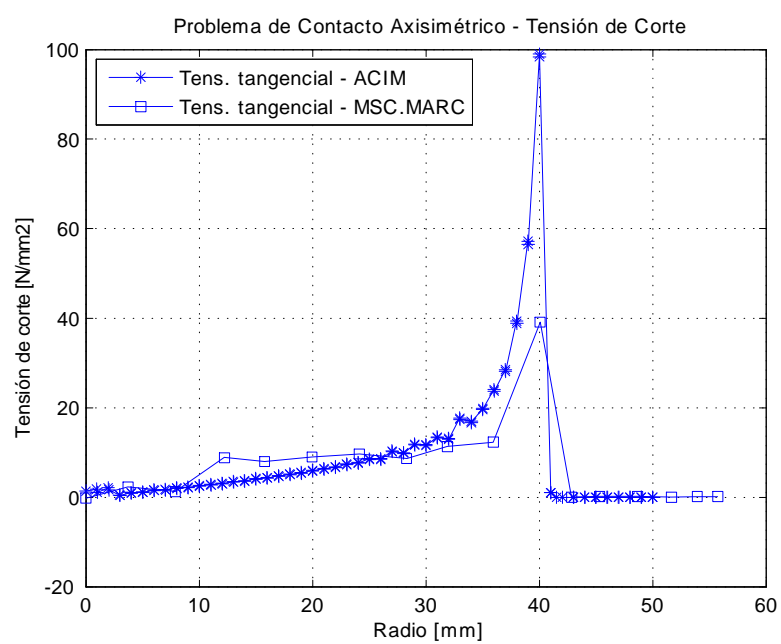


Figura 3.33: Tensiones tangenciales sobre la superficie superior de la fundación originadas por la fricción

3.6. Recapitulación

En el capítulo se llevó a cabo una amplia introducción a la problemática del contacto, tomando como punto de partida la descripción física del fenómeno, repasando luego las formulaciones existentes para resolverlo para llegar finalmente al desarrollo de la metodología ACIM propuesta en este trabajo. Las conclusiones más importantes del estudio son las siguientes:

- El método ACIM se apoya en la creación de la interfaz de contacto. La misma resuelve el problema de búsqueda de contactos entre cuerpos desde un punto de vista alternativo y novedoso, aprovechando para ello de manera inteligente las propiedades del método de triangulación de Delaunay con restricciones (CDT).
- La creación de la interfaz de contacto es capaz de resolver problemas de búsqueda de contactos cuya solución resulta extremadamente dificultosa o hasta imposible para los métodos clásicos existentes, con un costo computacional acotado y de orden $(n \log n)$.
- La propia interfaz de contacto sirve como herramienta primaria para medir la distancia entre diferentes contornos, y a partir de esta propiedad se definen deformaciones, tensiones y fuerzas de contacto que luego se utilizan para imponer la condición de impenetrabilidad y de fricción entre los contornos.
- El objeto que subyace en la metodología ACIM es comparable, tanto en su concepción como en los pasos seguidos en su formulación, al de un modelo constitutivo aplicado a cada elemento de la interfaz y que tiene efectos en las direcciones normal y tangencial a una determinada zona del contorno. Como consecuencia, su enfoque constitutivo permite una alta flexibilidad en el desarrollo y aplicación de diversos modelos de fricción.
- El correcto seguimiento de un determinado fenómeno físico durante su desarrollo, exige que la interfaz de contacto sea reconstruida periódicamente en cada incremento de tiempo. Una vez actualizada la conectividad nodal de la interfaz de contacto en función de la nueva topología de los contornos, ésta se utiliza para imponer las restricciones de contacto y las condiciones de fricción.
- El cálculo de las fuerzas de contacto en un determinado nodo del contorno, a partir de la composición de fuerzas provenientes del patch de elementos de interfaz que relacionan a ese nodo del contorno con otros nodos de otros contornos, introduce un efecto de suavizado sobre las fuerzas de contacto y logra resolver problemas de no unicidad presente en los métodos estándar.
- La metodología ACIM utiliza una estrategia de condensación nodal estática aplicada sobre los nodos de los contornos en contacto, por lo tanto no se agregan nuevos grados de libertad al problema original. Sin embargo, se puede ver incrementado el ancho de banda de la matriz global del problema ante el acoplamiento de grados de libertad por parte de las conectividades de la interfaz de contacto. Por lo tanto se requiere que el solver utilizado para resolver el sistema de ecuaciones del problema, esté provisto de un renumerador de grados de libertad.

- Es importante destacar que para que una presión de contacto se transmita de forma suave a través de la interfaz, el ACIM exige contar en todo momento con una interfaz de contacto continua, sin huecos entre sus elementos.
- La resolución de varios problemas de referencia para su validación, indica que la metodología ACIM presenta un comportamiento satisfactorio en lo que respecta a la imposición de la condición de impenetrabilidad. Las tensiones de contacto son prácticamente coincidentes con las teóricas o de referencia. La interpenetración entre cuerpos en contacto alcanza niveles mínimos, y el hecho de utilizar valores elevados en los coeficientes de penalización no parece inducir malos condicionamientos en la matriz de rigidez global del problema.
- Las tensiones asociadas a la fricción y los deslizamientos entre contornos son los resultados medidos que llegan a tener un mayor nivel de dispersión con respecto a los valores de referencia en algunos de los casos considerados.

Apéndice I. Método de Triangulación de Voronoi con Restricciones - CDT

A. Introducción

El método de *Triangulación de Delaunay*¹¹ [37] es una metodología ampliamente difundida para la generación de mallas no estructuradas a partir de una nube de puntos distribuidos arbitrariamente en el plano o en el espacio. De forma breve, el proceso seguido por el método puede ser sintetizado en dos fases, la colocación de los vértices de la malla y la triangulación.

1. La primera fase reconoce los vértices a lo largo del contorno del dominio de interés, y luego se van agregando en su interior a los demás puntos que lo conforman. En este paso del proceso existen varias estrategias posibles para su realización, como son: el método de avance frontal, la inserción aleatoria de puntos a partir de una determinada distribución, etc. El método más óptimo al respecto es aquel que va introduciendo los puntos al mismo tiempo que lleva a cabo la etapa de triangulación, ya que de esta forma es posible ir mejorando la calidad de la malla de triángulos durante su propia construcción.
2. La segunda fase de triangulación de los puntos, está definida por la propiedad de las circunferas vacías, que expresa que todo triángulo construido es válido si y sólo si su circunfera asociada no contiene en su interior otro punto perteneciente al mismo conjunto de puntos. Existen para ejecutar esta fase del proceso varios algoritmos relacionados con la construcción de la triangulación de Delaunay, como por ejemplo: buscar e identificar todos los triángulos cuyas circunferas contengan el nuevo punto introducido y luego regenerar convenientemente la triangulación a nivel local, o construir una triangulación y luego, a partir de esta, ir intercambiando los contornos comunes a dos triángulos si dos ángulos en la diagonal suman más de un determinado valor, etc.

Las propiedades más importantes de la triangulación de Delaunay, que son utilizadas para la generación de la propia malla son [67]:

- Ninguno de los puntos se encuentra contenido dentro de la circunferencia de alguno de los triángulos. Esta propiedad es conocida como la de circunferencias vacías.

¹¹En el apartado 2.3 del capítulo 1 se presenta una descripción más detallada del método de triangulación de Delaunay.

- En 2D puede probarse que de todas la triangulaciones posibles, la de Delaunay es la que maximiza el mínimo ángulo para todos los elementos triangulares. Esta propiedad es de gran relevancia en el cálculo posterior, ya que se garantiza que el error debido a la calidad de las conectividades generadas es mínimo para esa distribución de puntos en particular.

La triangulación de Delaunay se construye sobre un conjunto de puntos donde no hay, a priori, un contorno impuesto por unos determinados límites fijos. Sin embargo, existe la posibilidad de forzar la inclusión de contornos en la triangulación de Delaunay de una nube de puntos. Esta variante del método original es la llamada *Triangulación de Delaunay con Restricciones* (CDT) y fue introducida por primera vez por [23], donde se prueba que el algoritmo con restricciones puede ser calculado en un tiempo máximo de $O(n \log n)$, donde n es el número total de puntos del conjunto.

B. Relación entre los métodos ACIM y CDT

La utilidad y necesidad del método de Triangulación de Delaunay con Restricciones (CDT) para la correcta construcción de la malla de interfaz asociada al método ACIM, es esquematizada en la figura 3.34. En ella se puede observar una situación de contacto inminente entre los cuerpos \mathbb{B}_1 y \mathbb{B}_2 , donde se ha generado además una interfaz de contacto por medio del método de Triangulación de Delaunay estándar, a partir de los nodos pertenecientes a los contornos de ambos cuerpos. Como puede observarse, la interfaz de contacto \mathbb{B}^I presenta características espúreas, que son no deseadas para el correcto funcionamiento de la metodología ACIM. Específicamente, ante ciertas condiciones geométricas y discretizaciones de los cuerpos involucrados, la interfaz de contacto puede llegar a conectar nodos del contorno de uno de los cuerpos \mathbb{B}_1 con nodos de más de una cara del contorno del otro cuerpo \mathbb{B}_2 . El problema fundamental que resulta de esta situación es la no unicidad del problema de contacto. La ambigüedad surge al tener vectores normales a los contornos del cuerpo \mathbb{B}_2 , cuyas direcciones y sentidos son diferentes, lo cual imposibilita la correcta definición del problema de contacto, y por ende, la metodología falla. Para evitar el problema se utiliza una variante con restricciones del algoritmo de Delaunay, por medio del cual, se impone el respeto por los contornos preexistentes que separan regiones admitidas y no admitidas para llevar a cabo la conexión nodal.

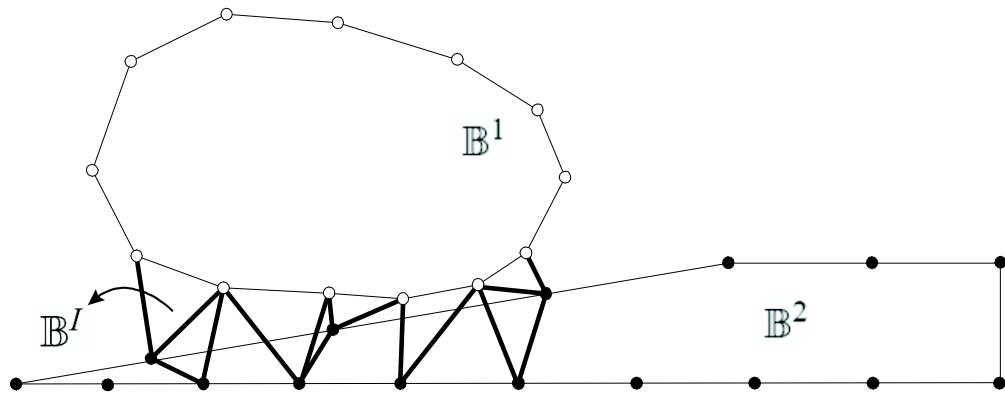


Figura 3.34: Esquema de una situación de contacto donde es necesaria la utilización de la CDT

C. Triangulación de Delaunay con Restricciones (CDT)

Una forma general de presentar la metodología es la seguida en las referencias [2][23][21]. Sea \mathbf{P} un conjunto de N puntos en \mathbb{R}^2 , y sea \mathbf{S} un conjunto de K segmentos lineales que dividen el interior de los puntos \mathbf{P} , donde cada punto $p \in \mathbf{S}$ y $p \in \mathbf{P}$. Los puntos $p, q \in \mathbb{R}^2$ son visibles si el interior del segmento \overline{pq} no interseca ningún segmento de \mathbf{S} . La triangulación restringida de Delaunay $\mathbf{T}(\mathbf{P}, \mathbf{S})$, es la triangulación de \mathbf{P} que contiene todos los segmentos de \mathbf{S} , como así también todos los contornos que conectan pares de puntos $p, q \in \mathbf{P}$, que son visibles y que están sobre el contorno de un disco abierto que contiene sólo los puntos de \mathbf{P} que no son visibles desde p y q . Se define a $\mathbf{T}(\mathbf{P}, \emptyset)$ como la triangulación de Delaunay estándar de un conjunto de puntos \mathbf{P} .

Por lo general, los algoritmos utilizados para calcular la CDT comienzan con la obtención de una triangulación de Delaunay por medio del algoritmo estándar antes descrito para luego imponer las restricciones asociadas a los segmentos dato. En la figura 3.35 se pueden observar, para una misma distribución de puntos, a) las conectividades que resultan de aplicar un algoritmo de Delaunay estándar y b) de restringirlas luego, mediante la metodología CDT, sobre la base de un conjunto de segmentos dados inicialmente.

Con respecto a la propiedad general de la triangulación de Delaunay de las circunferencias vacías, ésta debe ser modificada de forma tal que los puntos pertenecientes a los vértices predefinidos (contornos o segmentos a imponer), no sean visibles en caso de quedar en el interior de alguna de las circunferencias. Esta modificación de la metodología básica de Delaunay hace que se pierda la propiedad relacionada con la maximización del mínimo ángulo en cada uno de los elementos triangulares generados, ya que las restricciones impuestas no permiten la libertad requerida por el método para la construcción de conectividades con la optimalidad intrínseca que originalmente posee. Como consecuencia, las triangulaciones que resultan del CDT no poseen la totalidad de las propiedades de las que gozan las triangulaciones de Delaunay sin restricciones.

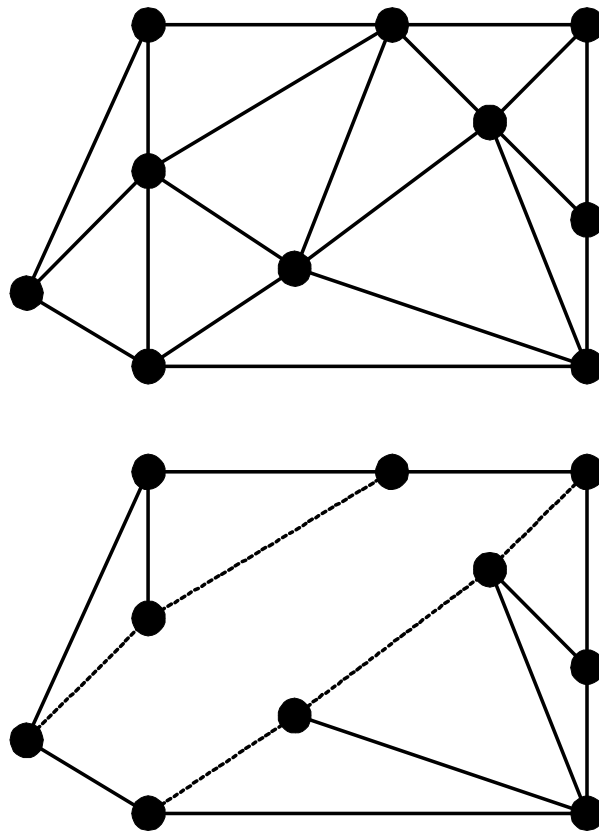


Figura 3.35: Triangulaciones de Delaunay a) estándar, b) restringida sobre los segmentos en línea punteada

Apéndice II. Tratamiento de Casos Especiales

A. El Elemento Virtual

En aquellos casos en que $g_N^0 \approx 0$, se tiene una situación originada como consecuencia de una singularidad geométrica, que hace que el volumen del elemento de interfaz sea nulo o casi nulo. Dicha situación puede generar indeterminación a la hora de calcular el gradiente de la función de forma del nodo p perteneciente al elemento de interfaz ∇N_p . La existencia de dicha singularidad puede ser detectada al construir la conectividad de los elementos de interfaz, es decir cuando se establece la relación entre el nodo p de un cuerpo y los nodos q_1 y q_2 del otro cuerpo. Con el objetivo de poder conservar y aplicar la metodología ACIM aún para este caso singular, es necesario introducir el concepto de *elemento virtual*. Por medio del mismo, se lleva a cabo una transformación geométrica del elemento de interfaz original (triángulo de altura y área casi nula) en otro elemento denominado virtual (triángulo con una altura y área diferente de cero).

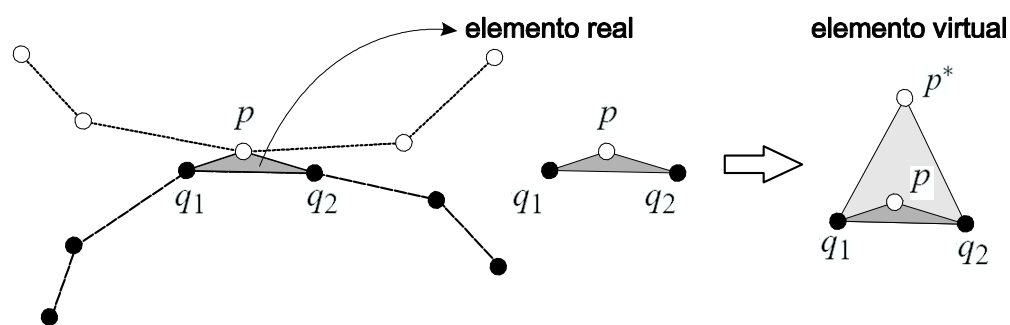


Figura 3.36: Esquema de un elemento de interfaz con geometría singular (triángulo degenerado) y su transformación en un elemento virtual (triángulo con altura no nula)

El elemento virtual que resulta del reposicionamiento del nodo p en p^* tiene las siguientes propiedades:

- Su altura es diferente de cero.
- Las posiciones proyectadas de p y de p^* son coincidentes.

Con el objetivo de llevar a cabo los mismos cálculos de ε_N , σ_N , etc. presentados en el apartado 3.4, y para no alterar la condición de contacto, es necesario definir un

$g_N^0 \neq 0$, lo cual viene dado por la expresión: $g_N^0 := [(\mathbf{X}_{p^*}^1 - \mathbf{X}_{q_1}^2) \cdot \hat{\mathbf{N}}] \cdot h_c$, donde \mathbf{X}_p^1 y $\mathbf{X}_{q_1}^2$ representan las posiciones de los nodos p^* (modificada de p) y q_1 en el tiempo t_n . Por su parte, $\hat{\mathbf{N}}$ y h_c son la normal y la longitud crítica del elemento de interfaz que fueron definidos oportunamente y dependen de las coordenadas de los nodos q_1 y q_2 .

Observación

- La notación que hace referencia a las posición de los puntos: p , p^* , q_1 y q_2 , es equivalente a: X_p , X_{p^*} , X_{q_1} y X_{q_2} .

B. Elementos Degenerados

En la construcción y el análisis de los elementos de interfaz pueden existir otros casos diferentes al anterior en los que la proyección tangencial del nodo p se encuentre fuera del segmento definido por q_1 y q_2 , ver la figura 3.37. En los casos en los que el nodo p no se encuentra dentro de la zona de proyección podría tomarse la decisión, basada en las metodologías clásicas de contacto (nodo - segmento), en la que se asuma que el nodo p no se encuentra en contacto activo, con lo cual el caso no debe ser ahondado con más detalle. Sin embargo, si la estrategia es no decidir la activación del contacto con un criterio arbitrario como el descrito, y se intenta aplicar de todas formas el modelo propuesto, aparecen tracciones artificiales que alteran la condición de equilibrio que subyace en los elementos de la interfaz de contacto.

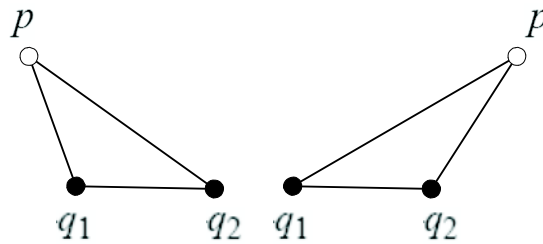


Figura 3.37: Esquema de elementos de interfaz degenerados, con la proyección del nodo p fuera del segmento definido por q_1 y q_2

El tratamiento que se propone para extender el rango de aplicación del ACIM, y así lograr resolver los casos en cuestión, es reubicar al nodo p de forma tal que el mismo se sitúe dentro de la zona de proyección. Equivalentemente, se podría llevar a cabo una extensión del segmento en el cual se realiza la proyección, introduciendo de esta forma a la proyección de p en el segmento. De dicho tratamiento, resulta un reposicionamiento de los nodos $[q_1, q_2] \Rightarrow [q_1 - \epsilon, q_2 + \epsilon]$, donde ϵ es la distancia necesaria para hacer que la proyección de p se encuentre convenientemente posicionada en el segmento, corrigiendo así la malformación del elemento de interfaz. Adicionalmente, la metodología propuesta implica que esta clase de elementos pueda activarse o desactivarse de acuerdo a un criterio basado en su tamaño. Lo cual requiere que en una etapa precedente, se haya realizado un análisis de sus características geométricas y se hayan removido aquellos que superan un cierto valor máximo previamente establecido. Luego de aplicar esta estrategia, es posible continuar normalmente con el desarrollo de la metodología ACIM.

Apéndice III. Cálculo de los Operadores Tangentes Asociados al Método ACIM

En el presente anexo se exponen los cálculos correspondientes a las contribuciones a la matriz tangente global del problema debidas a los diferentes modelos de contacto y de fricción desarrollados dentro del contexto del método ACIM y PFEM.

Para los siguientes cálculos se ha considerado que los vectores unitarios tangente y normal ($\hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{N}}$) pertenecientes a cada uno de los elementos de la interfaz, están expresados en la configuración de referencia (coordenadas materiales), por lo que no son dependientes de los desplazamientos a lo largo del incremento. Los fundamentos de esta simplificación se basan en:

- El método PFEM se ha formulado con un enfoque del tipo lagrangeano actualizado, con lo que luego de cada incremento se lleva a cabo la actualización completa del problema desde una configuración actualizada hacia una nueva configuración inicial o de referencia.
- Al inicio de cada nuevo incremento de tiempo se regenera la interfaz de contacto, con lo que se vuelven a obtener las nuevas zonas de contacto activo y/o potencial, respetando la posición actualizada de todos los contornos de los cuerpos. Por lo tanto, en cada nuevo incremento y en cada uno de los elementos de la interfaz, se calculan nuevamente sus vectores tangente y normal asociados.

A. Definiciones importantes

A continuación se presentan algunas definiciones que son utilizadas luego en los desarrollos subsiguientes.

A.1. Expresión del gradiente de los desplazamientos virtuales

Partiendo de la definición discreta de los desplazamientos virtuales, y considerando que los mismos son interpolados de acuerdo con:

$$(\boldsymbol{\eta})_i \approx (\boldsymbol{\eta}^h)_i = \sum_{p=1}^{np} N_p \boldsymbol{\eta}_{ip} \quad (3.96)$$

donde N_p son las funciones base o de forma del nodo p y η_{im} representa el desplazamiento del nodo p en la dirección i . El gradiente de los desplazamientos virtuales, ec. 3.96 puede expresarse como:

$$\nabla(\boldsymbol{\eta}^h) = \sum_{p=1}^{np} \nabla N_p \boldsymbol{\eta}_p^h \quad \forall \boldsymbol{\eta} \quad (3.97)$$

considerando las direcciones normal y tangente, se tiene:

$$\nabla(\boldsymbol{\eta}^h)_N = \frac{\partial N_p}{\partial X_k} \hat{N}_k \quad (3.98)$$

$$\nabla(\boldsymbol{\eta}^h)_T = \frac{\partial N_p}{\partial X_k} \hat{T}_k \quad (3.99)$$

A.2. Linealización de las deformaciones incrementales normales

Las deformaciones incrementales se definen como:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sum_p \left(\frac{\partial N_p}{\partial X_j} \Delta u_{pi} + \frac{\partial N_p}{\partial X_i} \Delta u_{pj} \right) \quad (3.100)$$

La linealización de $\Delta \varepsilon_N = \hat{\mathbf{N}} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e \cdot \hat{\mathbf{N}}$ respecto de los desplazamientos \mathbf{u} , se expresa como:

$$\frac{\partial \Delta \varepsilon_N}{\partial u_{sj}} = \frac{1}{2} \sum_p \left[\frac{\partial N_p}{\partial X_l} \hat{N}_k \hat{N}_l u_{pk} + \frac{\partial N_p}{\partial X_k} \hat{N}_k \hat{N}_l u_{pl} \right] \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial \Delta \varepsilon_N}{\partial u_{sj}} = \frac{1}{2} \sum_p \left[\frac{\partial N_p}{\partial X_l} \hat{N}_k \hat{N}_l \delta_{ps} \delta_{kj} + \frac{\partial N_p}{\partial X_k} \hat{N}_k \hat{N}_l \delta_{ps} \delta_{lj} \right] \quad (3.102)$$

donde luego de operar se llega a:

$$\left(\frac{\partial \Delta \varepsilon_N}{\partial \mathbf{u}} \right)_p = \frac{\partial N_p}{\partial \mathbf{X}} (\hat{\mathbf{N}} \otimes \hat{\mathbf{N}}) \quad (3.103)$$

A.3. Linealización de las deformaciones incrementales tangenciales

Partiendo nuevamente de la definición de las deformaciones incrementales, ec. 3.100, la linealización de $\Delta \varepsilon_T = \hat{\mathbf{T}} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e \cdot \hat{\mathbf{N}}$ respecto de los desplazamientos \mathbf{u} , se expresa como:

$$\frac{\partial \Delta \varepsilon_T}{\partial u_{sj}} = \frac{1}{2} \sum_p \left[\frac{\partial N_p}{\partial X_l} \hat{T}_k \hat{N}_l u_{pk} + \frac{\partial N_p}{\partial X_k} \hat{T}_k \hat{N}_l u_{pl} \right] \quad (3.104)$$

$$\frac{\partial \Delta \varepsilon_T}{\partial u_{sj}} = \frac{1}{2} \sum_p \left[\frac{\partial N_p}{\partial X_l} \hat{T}_k \hat{N}_l \delta_{ps} \delta_{kj} + \frac{\partial N_p}{\partial X_k} \hat{T}_k \hat{N}_l \delta_{ps} \delta_{lj} \right] \quad (3.105)$$

de donde se obtiene finalmente:

$$\left(\frac{\partial \Delta \varepsilon_T}{\partial \mathbf{u}} \right)_p = \frac{\partial N_p}{\partial \mathbf{X}} (\hat{\mathbf{T}} \otimes \hat{\mathbf{N}}) \quad (3.106)$$

A.4. Linealización de las tensiones normales de contacto

Dado que las tensiones debidas al contacto normal se definen como:

$$\boldsymbol{\sigma}_N = \mathbb{E}^I \tilde{\varepsilon}_N^e = [K_N H(-\tilde{\varepsilon}_N^e)] \tilde{\varepsilon}_N^e (\hat{\mathbf{N}} \otimes \hat{\mathbf{N}}) \quad (3.107)$$

y recordando que las deformaciones normales son: $\tilde{\varepsilon}_N^e = \varepsilon_N^0 + \Delta\varepsilon_N(\mathbf{u})$, la linealización de las tensiones normales provenientes del contacto se expresa como:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_N}{\partial \mathbf{u}} = K_N H(-\tilde{\varepsilon}_N^e) \frac{\partial \Delta\varepsilon_N}{\partial \mathbf{u}} \quad (3.108)$$

donde $\frac{\partial \Delta\varepsilon_N}{\partial \mathbf{u}}$ corresponde a la definición dada en la ec. 3.103. Indicialmente, la expresión viene dada por: $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_N}{\partial u_{sj}} = K_N H(-\tilde{\varepsilon}_N^e) \frac{\partial \Delta\varepsilon_N}{\partial u_{sj}}$.

A.5. Linealización del incremento de velocidad relativa tangente

Tomando como base la definición de la velocidad tangencial incremental relativa:

$$v_T^e = \frac{2h_{\bar{p}-q_1} \tilde{\varepsilon}_T^e}{\Delta t} \quad (3.109)$$

la linealización de la misma respecto de los desplazamientos \mathbf{u} , puede ser expresada como:

$$\frac{\partial v_T}{\partial \mathbf{u}} = \frac{2h_{\bar{p}-q_1} \tilde{\varepsilon}_T^e}{\Delta t} \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial \mathbf{u}} \quad (3.110)$$

donde $\frac{\partial \varepsilon_T}{\partial \mathbf{u}}$ se refiere al resultado obtenido en la ec. 3.106. Indicialmente, la expresión puede definirse como: $\frac{\partial v_T}{\partial u_{sj}} = \frac{2h_{\bar{p}-q_1} \tilde{\varepsilon}_T^e}{\Delta t} \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial u_{sj}}$.

B. Contribución debida al contacto normal

Definidas las fuerzas debidas al contacto normal y asociadas a un nodo p como:

$$\mathbf{F}_{N,p} = - \int_{\mathbb{B}^I} \nabla N_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_N dV \quad \forall p \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (3.111)$$

y utilizando la definición dada en la ec. 3.97 para reescribir ∇N_p , la contribución de dichas fuerzas en la matriz tangente global se expresa como:

$$(K_N)_{pi,sj} = \frac{\partial F_{N,ri}}{\partial u_{sj}} = - \int_{\mathbb{B}^I} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_N}{\partial u_{sj}} \left(\frac{\partial N_p}{\partial X_k} \hat{\mathbf{N}}_k \right) \hat{\mathbf{N}}_i dV \quad \forall p \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (3.112)$$

donde luego de utilizar el resultado obtenido en la ec. 3.108, resulta:

$$(K_N)_{pi,sj} = \frac{\partial F_{N,ri}}{\partial u_{sj}} = -K_N \int_{\mathbb{B}^I} \hat{\mathbf{N}}_i \left(\frac{\partial N_s}{\partial X_l} \hat{\mathbf{N}}_l \right) \left(\frac{\partial N_p}{\partial X_k} \hat{\mathbf{N}}_k \right) \hat{\mathbf{N}}_j dV \quad \forall p \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (3.113)$$

de forma compacta se tiene

$$\mathbb{K}_N = -K_N \int_{\mathbb{B}^I} \nabla(\boldsymbol{\eta}^h)_N \nabla(\boldsymbol{\eta}^h)_N \left(\widehat{\mathbf{N}} \otimes \widehat{\mathbf{N}} \right) dV \quad (3.114)$$

C. Contribución debida a la fricción

C.1. Modelo de Coulomb

Tomando como punto de partida la expresión perteneciente a las fuerzas tangenciales:

$$\mathbf{F}_{T,p} = - \int_{\mathbb{B}^I} \nabla N_p \cdot \boldsymbol{\sigma}_T dV \quad \forall p \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (3.115)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_T = K_T \Delta \varepsilon_T |\tilde{\sigma}_N| (\widehat{\mathbf{T}} \otimes \widehat{\mathbf{N}})$, $\Delta \varepsilon_T = \widehat{\mathbf{T}} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \widehat{\mathbf{N}}$, y $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ son nuevamente las deformaciones incrementales, ec. 3.100. Luego de efectuar los respectivos reemplazos y operar algebraicamente resulta:

$$\mathbf{F}_{T,p} = - \int_{\mathbb{B}^I} \nabla N_p \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon} |\tilde{\sigma}_N| dV \quad \forall p \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (3.116)$$

con lo que al utilizar la definición de la ec. 3.97 para reemplazar ∇N_p , la contribución a la matriz tangente se define como:

$$(K_{TCOU})_{pi,sj} = \frac{\partial F_{T,ri}}{\partial u_{sj}} = -K_T \int_{\mathbb{B}^I} \left[\begin{array}{l} \frac{\partial \Delta \varepsilon_T}{\partial u_{sj}} |\tilde{\sigma}_N| \left(\frac{\partial N_p}{\partial X_k} \widehat{N}_k \right) \widehat{T}_i + \\ + \Delta \varepsilon_T \frac{\partial |\tilde{\sigma}_N|}{\partial u_{sj}} \left(\frac{\partial N_p}{\partial X_k} \widehat{N}_k \right) \widehat{T}_i \end{array} \right] dV \quad \forall p \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (3.117)$$

luego se calcula $\frac{\partial |\tilde{\sigma}_N|}{\partial u_{sj}} = \text{sign}(\tilde{\sigma}_N) \frac{\partial \tilde{\sigma}_N}{\partial u_{sj}}$, pero $\tilde{\sigma}_N \leq 0$, por lo que $\text{sign}(\tilde{\sigma}_N) = -1$. Considerando los resultados obtenidos en las ecuaciones 3.108 y 3.101, se tiene que: $\frac{\partial |\tilde{\sigma}_N|}{\partial u_{sj}} - K_N \frac{\partial N_s}{\partial X_l} \widehat{N}_l \widehat{N}_j$, y finalmente, reemplazando la última expresión y la ec. 3.106 en la ecuación 3.117 se llega a:

$$(K_{TCOU})_{pi,sj} = \int_{\mathbb{B}^I} \left(\frac{\partial N_p}{\partial X_k} \widehat{N}_k \right) \left\{ \begin{array}{l} \widehat{T}_i \left[\frac{K_T}{2} |\tilde{\sigma}_N| \left(\frac{\partial N_s}{\partial X_l} \widehat{T}_l \right) - K_N \Delta \varepsilon_T \left(\frac{\partial N_s}{\partial X_l} \widehat{N}_l \right) \right] \widehat{N}_j + \\ + \widehat{T}_i \left[\frac{K_T}{2} |\tilde{\sigma}_N| \left(\frac{\partial N_s}{\partial X_l} \widehat{N}_l \right) \right] \widehat{T}_j \end{array} \right\} dV \quad \forall p \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (3.118)$$

de forma compacta se tiene:

$$\mathbb{K}_{TCOU} = - \int_{\mathbb{B}^I} \left[(A - B) \left(\widehat{\mathbf{N}} \otimes \widehat{\mathbf{T}} \right) + C \left(\widehat{\mathbf{T}} \otimes \widehat{\mathbf{T}} \right) \right] dV \quad (3.119)$$

donde se definen los siguientes términos:

$$A = \frac{K_T}{2} |\tilde{\sigma}_N| \nabla(\boldsymbol{\eta}^h)_N \nabla(\boldsymbol{\eta}^h)_T \longrightarrow \text{Contribución debida a } \tilde{\sigma}_N \text{ en } \hat{\mathbf{T}} \quad (3.120)$$

$$B = K_N \Delta \varepsilon_T \nabla(\boldsymbol{\eta}^h)_N \nabla(\boldsymbol{\eta}^h)_N \longrightarrow \text{Contribución debida a } \delta \tilde{\sigma}_N \text{ en } \hat{\mathbf{T}} \quad (3.121)$$

$$C = \frac{K_T}{2} |\tilde{\sigma}_N| \nabla(\boldsymbol{\eta}^h)_N \nabla(\boldsymbol{\eta}^h)_N \longrightarrow \text{Contribución debida a } \delta \tilde{\sigma}_T \text{ en } \hat{\mathbf{T}} \quad (3.122)$$

C.2. Modelo de Norton-Hoff

Partiendo desde la expresión perteneciente a las fuerzas tangenciales resultantes de la evaluación del modelo de Norton-Hoff con las velocidades tangenciales relativas entre los cuerpos en contacto:

$$\mathbf{F}_{T,p} = - \int_{\mathbb{B}^I} \nabla N_p \cdot \sigma_T^* dV \quad \forall p \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (3.123)$$

donde $\sigma_T^* = \mu v_T \tilde{\sigma}_N (\hat{\mathbf{T}} \otimes \hat{\mathbf{N}})$, $\tilde{\sigma}_N = \mathbb{E}^I \tilde{\varepsilon}_N^e$ y $\tilde{\varepsilon}_N^e = \varepsilon_N^0 + \Delta \varepsilon_N(\mathbf{u})$, la contribución de las fuerzas $\mathbf{F}_{T,p}$ en la matriz tangente global viene dada por:

$$(K_{T_{NH}})_{pi,sj} = \frac{\partial F_{N_{ri}}}{\partial u_{sj}} = \int_{\mathbb{B}^I} \mu \left(\frac{\partial N_p}{\partial X_k} \hat{N}_k \right) \left(\frac{\partial v_T}{\partial u_{sj}} \tilde{\sigma}_N + v_T \frac{\partial \tilde{\sigma}_N}{\partial u_{sj}} \right) \hat{T}_i dV \quad \forall p \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (3.124)$$

donde teniendo en cuenta los resultados de las ecuaciones: 3.110, 3.106, 3.108, 3.103 y utilizando la definición de la ec. 3.97 para reescribir ∇N_p , se obtiene la siguiente expresión de la contribución a la matriz tangente global debida al modelo de fricción dinámica de Norton-Hoff:

$$(K_{T_{NH}})_{pi,sj} = \int_{\mathbb{B}^I} \mu \left(\frac{\partial N_p}{\partial X_k} \hat{N}_k \right) \left\{ \hat{T}_i \left[+ \frac{h_{\bar{p}-q_1} \tilde{\sigma}_N}{\Delta t} \left(\frac{\partial N_s}{\partial X_l} \hat{N}_l \right) \hat{T}_j + \frac{h_{\bar{p}-q_1} \tilde{\sigma}_N}{\Delta t} \left(\frac{\partial N_s}{\partial X_l} \hat{T}_l \right) \hat{N}_j + K_N v_T \left(\frac{\partial N_s}{\partial X_l} \hat{N}_l \right) \hat{N}_j \right] \right\} dV \quad \forall p \in \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \quad (3.125)$$

de forma compacta se tiene:

$$\mathbb{K}_{T_{NH}} = \int_{\mathbb{B}^I} \mu \left\{ \frac{h_{\bar{p}-q_1} \tilde{\sigma}_N}{\Delta t} \left[A^* (\hat{\mathbf{T}} \otimes \hat{\mathbf{T}}) + B^* (\hat{\mathbf{N}} \otimes \hat{\mathbf{T}}) \right] + C^* (\hat{\mathbf{N}} \otimes \hat{\mathbf{T}}) \right\} dV \quad (3.126)$$

donde se definen los siguientes términos:

$$A^* = \nabla(\boldsymbol{\eta}^h)_N \nabla(\boldsymbol{\eta}^h)_N \longrightarrow \text{Contribución debida a } \delta \tilde{\sigma}_T^* \text{ en } \hat{\mathbf{T}} \quad (3.127)$$

$$B^* = \nabla(\boldsymbol{\eta}^h)_N \nabla(\boldsymbol{\eta}^h)_T \longrightarrow \text{Contribución debida a } \tilde{\sigma}_N \text{ en } \hat{\mathbf{T}} \quad (3.128)$$

$$C^* = K_N v_T \nabla(\boldsymbol{\eta}^h)_N \longrightarrow \text{Contribución debida a } \delta \tilde{\sigma}_N \text{ en } \hat{\mathbf{T}} \quad (3.129)$$

Capítulo 4

Ejemplos Aplicados a la Pulvimetalurgia

4.1. Introducción

La pulvimetalurgia (PM) es un proceso tecnológico de conformado de componentes y piezas mecánicas a través de la compactación de materiales en polvo. Sus principales aplicaciones se encuentran en las industrias: automotriz, aeronáutica, nuclear, de fabricación de pequeños motores, etc., donde la PM ofrece la posibilidad de fabricar piezas en serie y a bajo costo. Los diversos tipos de componentes pueden ser fabricados con: metales y sus diferentes aleaciones, cerámicas, componentes porosos y hasta con materiales compuestos. Las piezas se caracterizan por ser pequeñas y con geometrías complejas, ya que la PM a diferencia de otros procesos de mecanizado mecánico (torneado, fresado, etc.), es una tecnología industrial de fabricación capaz de producir componentes con una alta precisión dimensional y una mínima generación de desperdicios.

La producción masiva de componentes mecánicos presenta una tendencia creciente y sostenida hacia la sustitución de otros procesos industriales como el moldeado, forjado, mecanizado, etc. por la PM. En consecuencia, a fin de lograr una mejora continua en la calidad final de las piezas terminadas, la industria de la pulvimetalurgia requiere que el proceso productivo completo sea optimizado, para lo cual es necesario llegar a conocer y a predecir las fenomenologías y los comportamientos esperados en cada una de las etapas que lo conforman. En definitiva, el objetivo perseguido es modificar de manera inteligente los parámetros que gobiernan a cada uno de los procesos de la PM a fin de obtener en cada etapa, una distribución homogénea del material o de su densidad. Detrás de tal objetivo se encuentra la voluntad de evitar el indicio, probado por la experiencia de los fabricantes y por la experimentación de los investigadores, de que la aparición de una distribución de densidades no homogénea, antes o durante la compactación, tiende a originar zonas de debilidad mecánica y de formación o propagación de fisuras en las piezas terminadas. Cabe destacar, sin embargo, que la manifestación de zonas de debilidad mecánica y de potencial formación de fisuras puede producirse también durante la extracción posterior a la compactación de las piezas terminadas.

Universalmente, los procesos de fabricación comprendidos por la pulvimetalurgia, se dividen en las siguientes etapas o partes:

- **Llenado del molde:** el polvo es conducido, en general por acción de la gravedad,

desde un cargador o tolva de llenado hacia el interior de un molde que se encuentra previamente vacío, ver la figura 4.1a y b. Como consecuencia de este proceso se produce un desempaquetamiento o separación de los granos que conforman al material, de lo que resulta que la distribución de densidades en el interior del molde después del llenado no sea completamente homogénea.

- **Transferencia:** una serie de movimientos de las herramientas (punzones) desplazan el polvo por el interior del molde hasta llegar a una forma más cercana a la geometría de la pieza terminada y que permita comenzar con la compactación en sí misma. Esta etapa es de vital importancia en la fabricación de piezas con varios niveles, ver la figura 4.10c.
- **Prensado o compactación:** el movimiento de los punzones produce una reducción en el volumen de la cámara con el consecuente aumento en la densidad del material. Por medio de altas presiones el material es llevado hasta su densidad y geometría finales, obteniéndose el material o pieza en verde, figura 4.2b.
- **Extracción:** la pieza o material en verde es extraído por la acción de los punzones hacia el exterior del molde (normalmente empujado de forma ascendente por el/los punzones inferiores). En este estadio del proceso, la extrema fragilidad del material verde sumada a la posible existencia de puntos de singular debilidad mecánica (bajas densidades), puede ser el origen de fisuras y roturas tanto dentro como fuera del molde. Al efecto descrito se suma la relajación elástica o springback que se produce durante la salida de la pieza del interior del molde, y que genera la dilatación volumétrica de la misma que se encontraba previamente confinada en el interior del molde.
- **Sinterizado:** por medio de un proceso físico-químico, en el que se calienta la pieza por debajo de su punto de fusión bajo una atmósfera controlada, se obtiene la recristalización y la soldadura intergranular de las partículas de polvo. Como resultado, el material pasa de ser poroso y frágil a tener la consistencia integrada de un pieza completamente sólida y con buenas propiedades mecánicas. Por medio de este proceso, el material adquiere de manera simultánea resiliencia y ductilidad.
- **Rectificación dimensional:** la pieza es ligeramente ajustada dimensionalmente por medio de procesos de rectificado o mecanizado hasta alcanzar las tolerancias dimensionales requeridas por su diseño y especificaciones.

Una explicación más detallada tanto del proceso de compactación de pulvimetales como así también de la obtención y procesamiento de los materiales utilizados para tal fin puede encontrarse en [16] y [98].

En el presente trabajo, la metodología PFEM se utiliza de forma aplicada al estudio de los siguientes procesos comprendidos por la pulvimetalurgia: llenado de molde, transferencia y prensado o compactación. A continuación se lleva a cabo una descripción detallada de cada uno de ellos, en donde se explica el experimento realizado y se contrastan los resultados numéricos con los experimentales.

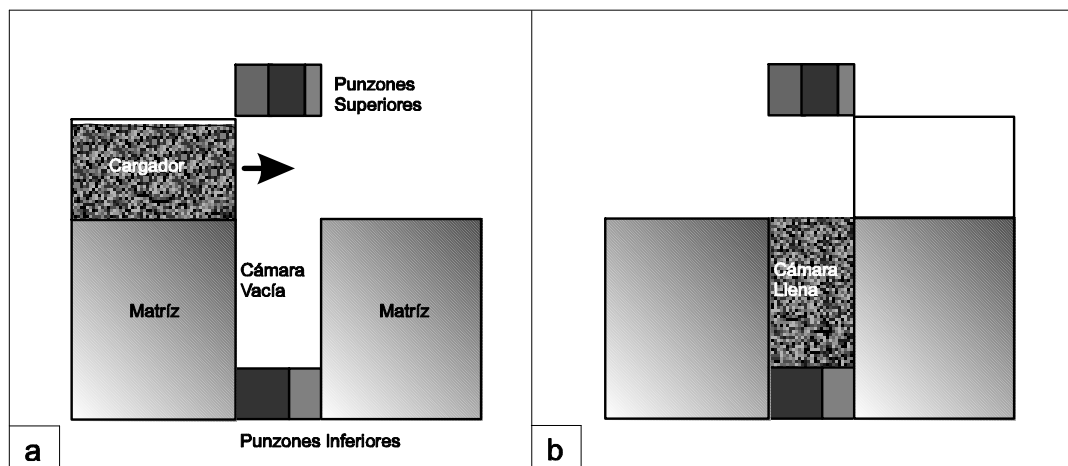


Figura 4.1: Proceso de llenado de moldes, a) material en el cargador y molde vacío, b) molde totalmente lleno de material

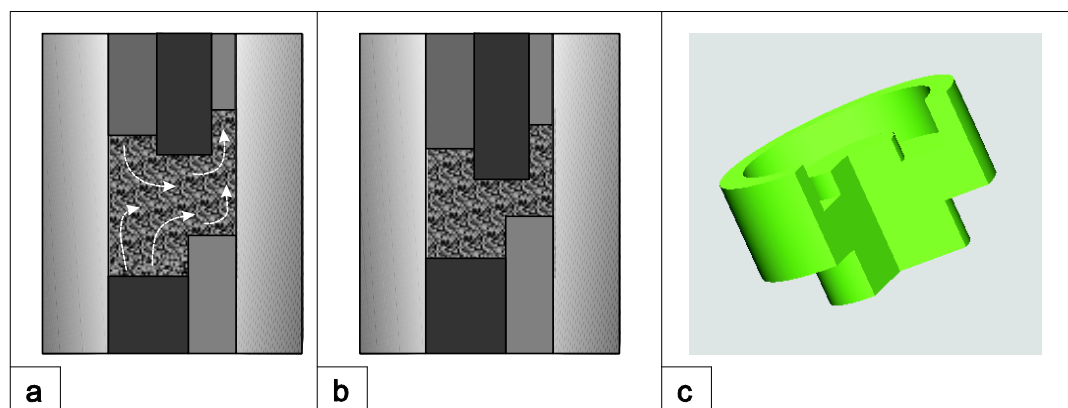


Figura 4.2: Proceso de transferencia, a) flujo de material entre diferentes zonas de la cámara, b) Proceso de compactación: cámara final del molde luego de la compactación, c) esquema con corte 3D de la geometría perteneciente a la pieza terminada

4.2. Proceso de llenado

4.2.1. Generalidades

El llenado de moldes es un proceso dinámico de velocidad intermedia ($t_{proceso} \leq 1s$), en el que se producen grandes movimientos y redistribuciones del material. Se trata de la etapa perteneciente a los procesos de la pulvimetalurgia que menos atención ha recibido hasta el momento. Esto se debe básicamente a:

- La elevada complejidad que presenta la observación del comportamiento del material durante la fase de llenado de un proceso de manufactura real. A partir de la cual los efectos de un "buen." "mal"llenado sólo se logran conocer de manera indirecta una vez extraída la pieza.
- La gran dificultad que supone, tanto la medición de los parámetros físicos del mate-

rial a través de ensayos experimentales como así también su modelado y simulación numérica.

La distribución no uniforme de densidad o de masa en el seno del material, trae aparejado el riesgo de aparición de defectos como cavidades y microcavidades, porosidad no uniforme, etc. Lo cual tiende a deteriorar las propiedades mecánicas y a producir el fallo anticipado de piezas y componentes producidos mediante PM.

En consecuencia, y ante la necesidad de refinar las herramientas de análisis y predicción cuali y cuantitativa de este tipo de procesos, se ha comenzado a estudiar recientemente de forma experimental [49] y numérica [89], la sensibilidad de los diferentes parámetros del proceso y su consecuente influencia en las variables estudiadas (distribución de masa dentro del molde, etc.).

Los procesos de llenado de moldes pueden ser clasificados, según sea el mecanismo por el cual el material es conducido hacia el interior del molde, en: fluidizados, por succión de aire y por gravedad, ver [49]. Sin embargo, el método más utilizado a nivel industrial es por gravedad, por medio del cual el polvo metálico ingresa al molde sólo por los efectos de la aceleración de la gravedad y sin la participación de alguna otra fuerza externa complementaria.

4.2.2. Aspectos fenomenológicos

Las principales variables que inciden en el comportamiento físico del material durante el llenado son básicamente: el tamaño y la morfología de los granos de polvo y la velocidad del cargador, desde el cual el polvo cae bajo los efectos de la gravedad hacia el interior del molde. El efecto producido por la velocidad de avance del cargador es que a medida que esta se incrementa, el flujo se vuelve más suave y continuo. Por otra parte, el tamaño de los granos de polvo hace lo propio de manera que cuando este disminuye, y como consecuencia de una mayor superficie de interacción por unidad de volumen entre las partículas, la fuerza de fricción intergranular total aumenta, y por ende, se presentan episodios de discontinuidad en el flujo. Por último, la morfología de los granos de polvo también tiene influencia en las características físicas del flujo, de forma que las partículas más esféricas favorecen la fluencia continua del mismo, mientras que las partículas irregulares tienden a introducir la presencia del denominado régimen de avalanchas, por el cual el material se desmorona por deslizamientos intermitentes [49] [89]. Las figuras 4.3, 4.4, 4.5, y 4.6, muestran concretamente las diferencias en tamaño y en morfología esperables en partículas de diferentes materiales y granulometrías [49].

Por regla general, el llenado de moldes en los procesos industriales de pulvimetalurgia se lleva a cabo a altas velocidades del cargador, por lo tanto es válido centrar el foco de atención en aquellos regímenes de flujo continuo, sin discontinuidades e intermitencias durante la entrada del material en el molde [89].

4.2.3. Ensayo de llenado de molde

El proceso de llenado de molde se estudia sobre la base del ensayo experimental desarrollado en la ref. [49]. En el mismo, se considera a un cargador y a una cavidad simple (molde) ambos de forma paralelepípeda y con las mismas dimensiones geométricas, de forma que durante su paso sobre el hueco superior del molde, el material cae desde el

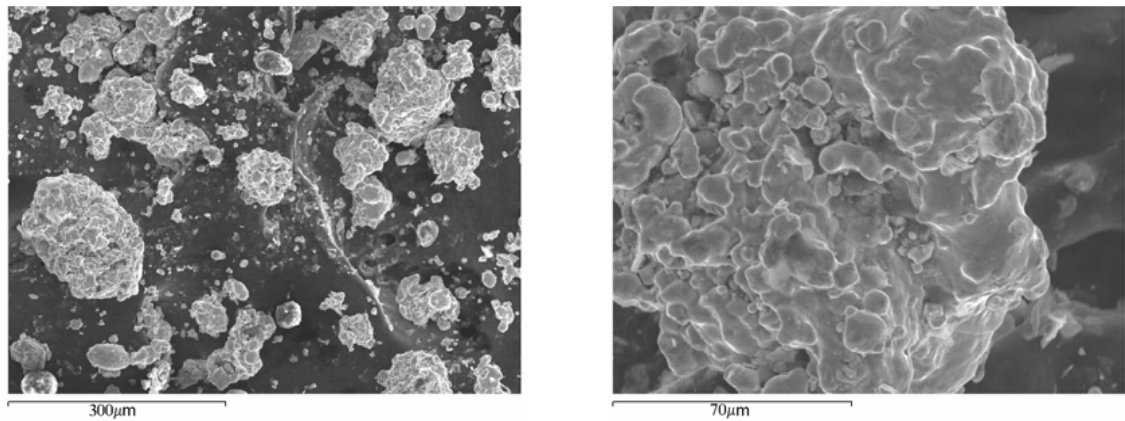


Figura 4.3: Hierro fino de morfología irregular - Distalloy AB

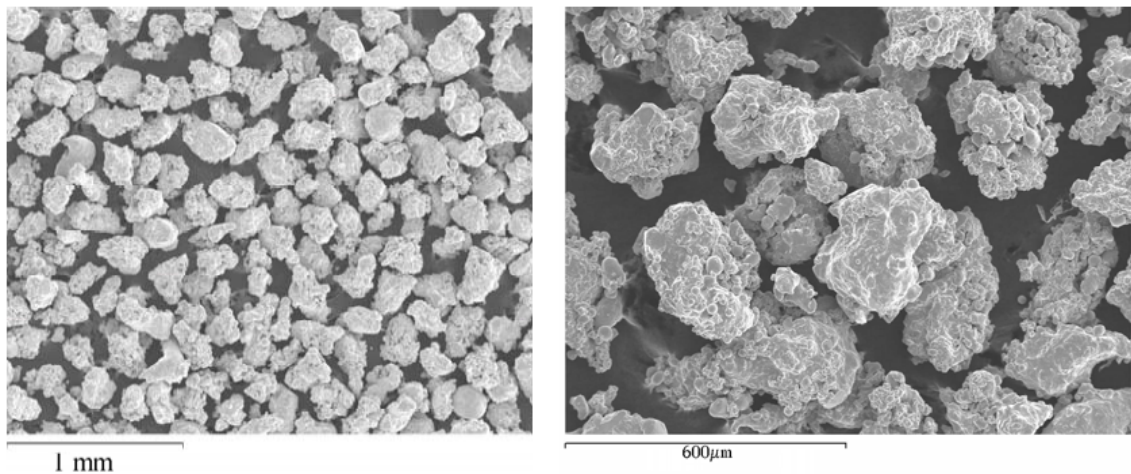


Figura 4.4: Hierro grueso de morfología irregular

cargador hacia su interior. El montaje experimental comprende un sistema neumático que impulsa al cargador a lo largo de una trayectoria rectilínea y horizontal y a un sistema de adquisición de datos e imágenes, ver la fig. 4.7. Ambos sistemas se encuentran instrumentados y controlados electrónicamente. Para mayores detalles acerca del montaje experimental, ver la ref. [49].

El cargador y el molde presentan un volumen de carga útil de material de 250 cm^3 , ya que sus dimensiones son $L = 100 \text{ mm}$, $h = 50 \text{ mm}$ y $b = 50 \text{ mm}$, ver la figura 4.7. En el ensayo experimental el material se coloca en el interior del cargador formando 5 capas horizontales de 10 mm de altura cada una, ver la figura 4.8.

El objetivo perseguido por el ensayo es analizar cualitativamente el comportamiento del polvo durante el proceso de llenado del molde, es decir desde que se encuentra dentro del cargador hasta que se deposita en el interior del molde. Para ello, la velocidad característica de avance promedio del cargador durante su carrera es de $10 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$.

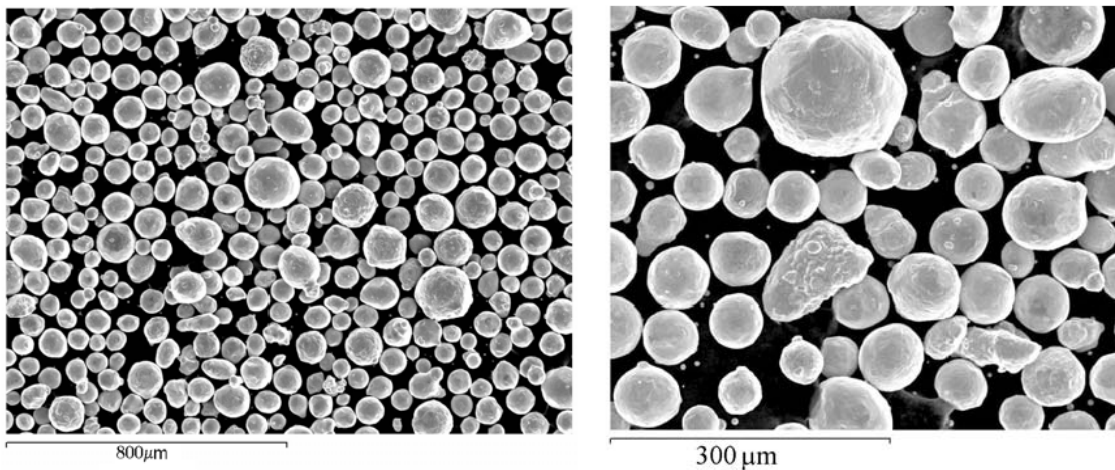


Figura 4.5: Cobre fino de morfología esferoidal

Por su parte, el material seleccionado para el ensayo, cuyo comportamiento es representativo de aquellos utilizados por la PM a nivel industrial, es la arena fina, que presenta una densidad aparente de $\rho_{arena} \simeq 1,58 \frac{gr}{cm^3}$.

4.2.4. Aspectos del modelo numérico

En el modelo numérico, y a partir de las evidencias experimentales, se supone que el fenómeno de llenado es homogéneo en la dimensión b de la geometría del cargador y del molde. Por lo tanto, resulta válido desarrollar el estudio en 2D bajo la hipótesis de deformación plana. La relación constitutiva utilizada para modelar al material en polvo (arena fina) es el modelo de flujo, que ha sido desarrollada en detalle en el capítulo A. Tal como se explicó oportunamente, el modelo constitutivo de flujo considera la existencia de una analogía física entre un fluido viscoso no newtoniano compresible y un material en polvo. Dicha analogía se materializa, al igual que la inexistencia práctica de deformaciones elásticas, durante los procesos de llenado de moldes en régimen continuo (materiales de grano grueso sometidos a altas velocidades de llenado), cuando:

- El material cae desde el cargador hacia el molde y se reacomoda en su interior, por lo que las diferentes capas de granos deslizan entre sí a velocidades considerables como lo hace un fluido.
- El material se comprime localmente y disipa la energía cinética adquirida durante la caída a medida que impacta con los contornos del molde¹.

La calibración de los parámetros característicos del modelo de flujo, coincide con la realizada en el apartado A.4 del capítulo A, ya que la experiencia práctica indica que los valores del ángulo de fricción interna b_2 , de la cohesión b_1 y de la compresibilidad a bajas

¹El fenómeno de impacto durante el llenado, al igual que el de compresión durante la compactación, representan la aplicación de cargas de alta energía, que el material logra disipar al aumentar su densidad de forma local o global, dependiendo de la intensidad y de la distribución de las cargas.

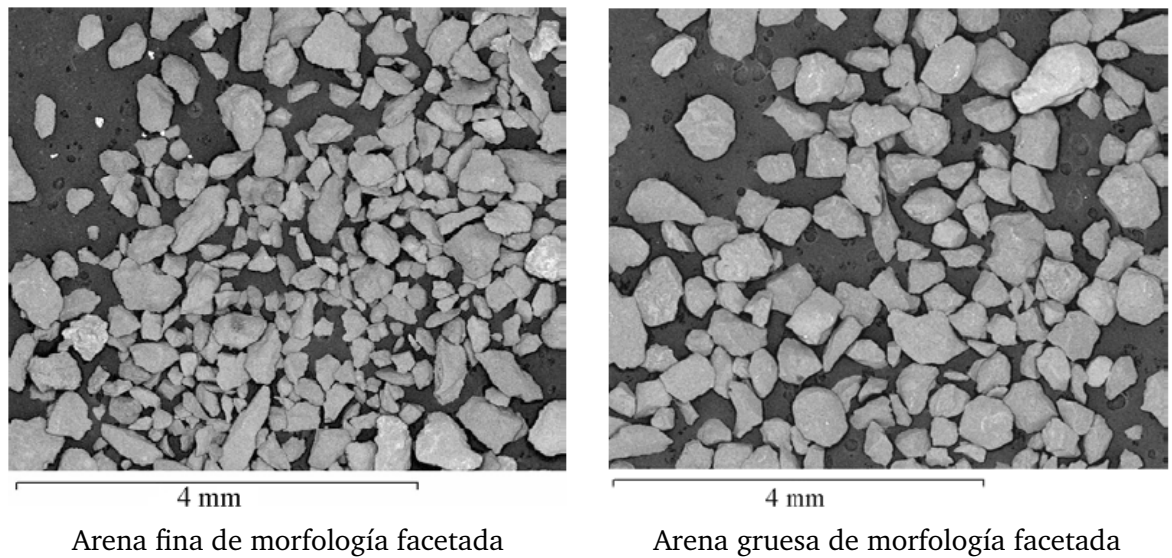


Figura 4.6: Arenas de morfología facetada

densidades $s_1 - s_2$, de los materiales polvo metálico y arena fina, son similares para el rango de densidades considerados por el presente ensayo.

El tiempo total del proceso es de 1 segundo, el cual se discretiza en 6500 incrementos o intervalos de tiempo. Sin embargo, a fin de iniciar el proceso de llenado desde una situación de equilibrio estático, obedeciendo a la realidad, se incluye un incremento inicial adicional, en el que no se induce el movimiento del cargador y sólo se aplican los efectos de la gravedad. Dicha condición de equilibrio estático permite la definición de los parámetros elásticos del modelo, para lo cual se suponen un módulo elástico de $0,1 \text{ MPa}$ y un ratio de Poisson de $0,3$, que limitan las deformaciones del material a causa del peso propio en aproximadamente un 1% .

El nivel de discretización espacial aplicado en el dominio definido por el material en polvo es intermedio y viene dado por 4500 partículas. En cuanto al cargador y al molde, los materiales que conforman todos sus contornos han sido considerados como rígidos, ya que las consecuencias de dicha simplificación son despreciables a los efectos del estudio aquí presentado.

4.2.5. Resultados numéricos y experimentales

De la observación de las primeras etapas de los resultados experimentales de la columna izquierda de las figs. 4.9, se puede advertir que la superficie libre del material en polvo que se encuentra en el interior del cargador, no presenta cambios notables luego de que el proceso se inicia y el sistema cambia su estado de movimiento. En consecuencia, se puede afirmar que el efecto de la inercia es despreciable a fin del presente estudio.

A medida que el cargador pasa sobre el hueco superior del molde, se diferencian tres etapas fenomenológicas que se desarrollan sucesivamente. La primera de ellas marca la presencia de un régimen de flujo continuo de material, durante el cual se identifica el

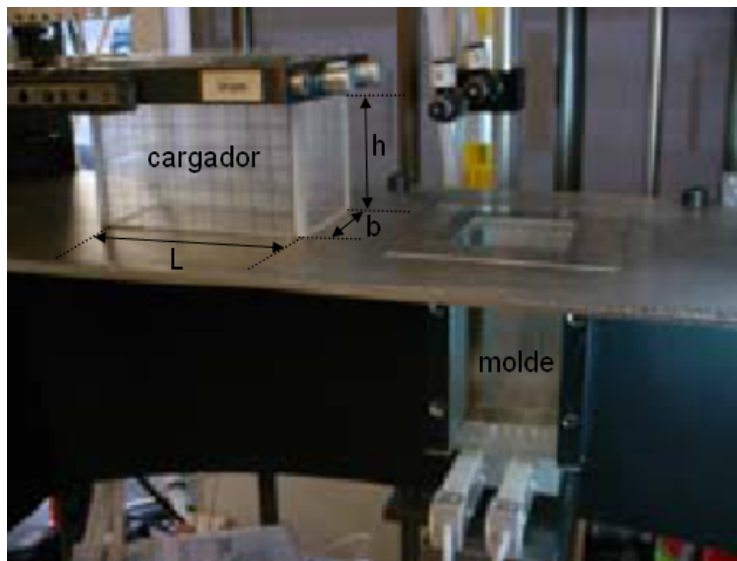


Figura 4.7: Vista general del montaje experimental utilizado en el estudio del llenado de moldes [49]

ángulo de deslizamiento asociado a la cohesión del material que fue oportunamente estudiado en el apartado A.4 del Apéndice A. La segunda es la caída libre del material en polvo hacia el interior del molde y la tercera es el reordenamiento de las partículas que se van depositando y asentando dentro de la cavidad. Cada una de ellas aparece de forma más o menos dominante en las diferentes etapas del proceso mostradas en las figuras 4.9.

Como lo demuestran los resultados, el modelo de flujo es capaz de reproducir el comportamiento estático friccional de los materiales en polvo, que se aprecia particularmente en el proceso de llenado cuando el material se mueve junto con el cargador y cuando se deposita en el interior del molde, de modo que forma un montículo en el que no existe velocidad relativa entre los granos. Esta condición representa la primera etapa de la fenomenología descrita y marca una diferencia física fundamental entre los fluidos y los materiales en polvo, y su efecto se logra en el modelo de flujo por medio de la regularización elástica que fue explicada con detalle en el capítulo A. Brevemente, la regularización elástica introduce una elevada pseudo-viscosidad que tiende a mantener a las partículas en reposo, de forma tal que elimina la indeterminación intrínseca del modelo cuando la velocidad de los granos del material es nula.

Al evolucionar el proceso de llenado y producirse un efecto de expansión del material que pasa sobre el hueco superior del molde, la presión que mantenía confinado al material disminuye y se activan los mecanismos de flujo. Dicho proceso se encuentra gobernado por la superficie de fluencia de Drucker-Prager. Posteriormente, las partículas ingresan en el interior del molde en caída libre por la acción de la gravedad, que es el proceso que representa a la segunda etapa fenomenológica, donde el comportamiento del material obedece puramente a la ecuación de movimiento y se traduce en la transformación de energía potencial en cinética.

Finalmente, en la tercera etapa fenomenológica, los granos de polvo colisionan entre sí y contactan con los contornos del molde. La energía cinética que traen acumulada se

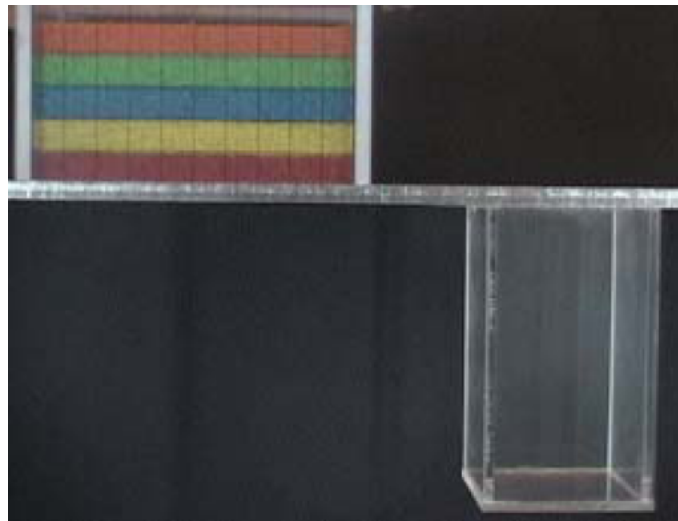


Figura 4.8: Vista del cargador y del molde con el material ubicado en el interior del cargador en capas horizontales de 10 *mm* de espesor

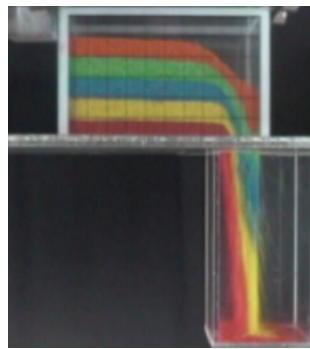
disipa en el proceso físico real por medio de colisiones intergranulares, mientras que en la aproximación de medios continuos utilizada por la metodología y el modelo constitutivo de flujo, la disipación se produce a través de la deformación plástica del material. Esta última etapa está gobernada por la superficie de fluencia elíptica que induce la compresión del material ante la transformación de una cantidad elevada de energía cinética en energía de deformación irreversible.

La comparación de los resultados numéricos y experimentales demuestran una buena concordancia en el movimiento del material cuando se encuentra dentro del cargador, cuando cae hacia el molde y cuando se encuentra en el interior del mismo. En la primera etapa a los 0.25s, el material que cae desde el cargador, impacta en el contorno inferior del molde y los diferentes conjuntos de granos se separan lateralmente tendiendo a ocupar el espacio disponible hasta llegar a los contornos laterales del molde. A medida que el material se va depositando en la parte inferior del molde se acumula y se genera un montículo central como consecuencia del plegamiento de sus capas. Los pliegues que realiza el material sobre sí mismo, se observa en las imágenes 2a-b), 3a-b) y 4a-b) de la figura 4.9, y se pone en evidencia gracias a la clasificación inicial del material en capas horizontales de diferentes colores.

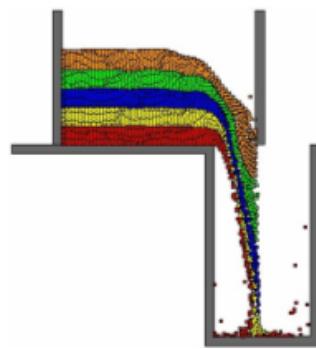
El análisis global del proceso indica que se produce un proceso de dilatación del material, ya que el volumen disponible en el cargador para el llenado y el volumen del molde a llenar son iguales, sin embargo el molde termina totalmente lleno de material mientras que el cargador permanece con un remanente del mismo, ver las imágenes 4a-b). Por otra parte, de acuerdo a lo que se observa en la figura 4b) la distribución de masa o de vacíos (espacios blancos en el seno del material) en las zonas cercanas a los contornos del molde y una cantidad de material con menor cantidad de ellos en la zona central. En consecuencia, se puede aventurar, que el molde presenta cualitativamente una mayor densidad de material en su parte central y una menor densidad cerca de los contornos (paredes laterales y con-

torno inferior del molde). Una posible razón de dicho comportamiento es que el molde se llena primero en su parte central, y luego el material se va desplazando hacia los lados. Lo cual induce la aparición de un gradiente de concentración de masa que es mayor en el centro y se va reduciendo a medida que se va acercando a las paredes laterales.

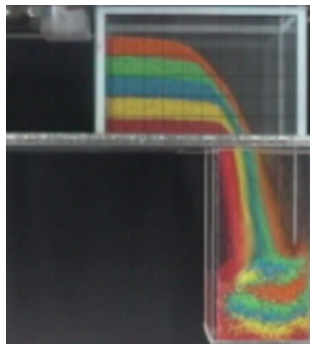
Los resultados experimentales que respaldan esta última afirmación no se encuentran disponibles, y su medición resulta ser extremadamente compleja y poco precisa en la práctica. Sin embargo, los resultados que aquí se presentan pueden ser considerados como un aporte original para el estado actual de la tecnología en el tema, y su validez se asienta sobre la base de la alta coincidencia que presenta la cinemática del material durante el proceso de llenado.



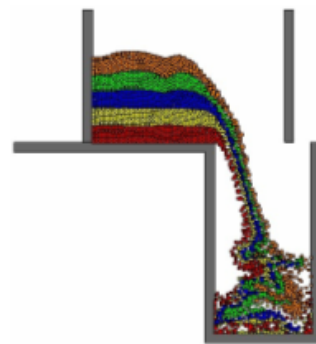
1a) 0.25s



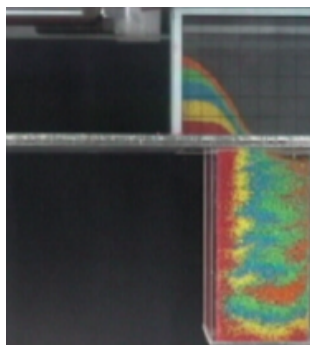
1b)



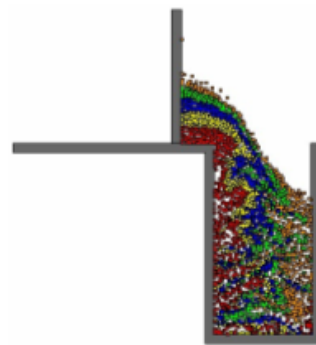
2a) 0.5s



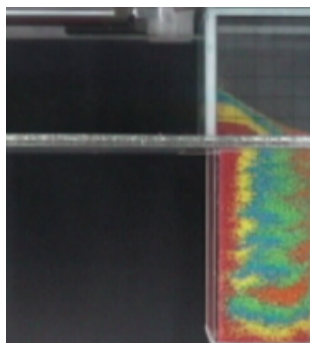
2b)



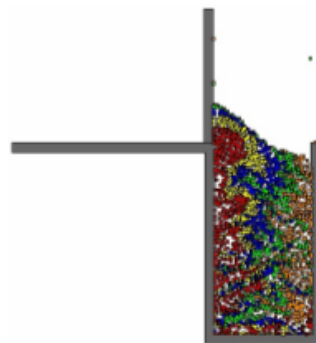
3a) 0.75s



3b)



4a) 1s



4b)

Figura 4.9: Etapas del ensayo de llenado del molde

4.3. Procesos de transferencia

4.3.1. Generalidades

Como se expuso previamente, la *transferencia*² es una de las etapas del proceso global de compactación de componentes en la industria de la pulvimetalurgia (PM). Durante la misma, por efecto del movimiento de los punzones, se induce el transporte de material con o sin *flujo de masa*³ desde una zona hacia otra del interior de la cámara donde posteriormente se llevará a cabo la compactación. Su objetivo fundamental es el de obtener una distribución de la masa y de la densidad homogéneas en el interior de la cámara por medio de la maximización del flujo de material en el interior del molde. La necesidad de este proceso se pone en evidencia cuando se deben fabricar piezas de varios niveles, ver las figuras 4.2, donde ciertas partes de la pieza cuya cavidad se genera a partir de la transferencia, dependen exclusivamente de este mecanismo para contar con la cantidad de material que más tarde será compactado.

Proceso de transferencia $\left\{ \begin{array}{l} - \text{Transporte de cámara} \\ - \text{Flujo de material} \end{array} \right.$

El *transporte de cámara*⁴ es una de las variantes del proceso de transferencia, se utiliza como paso previo a la compactación de piezas donde el material situado en una cámara virtual definida por los punzones debe ser trasladada de un lugar a otro del molde con mínimas modificaciones en su densidad (entrada o salida de material en la cámara), ver las figuras 4.10c y 4.11a. Su objetivo fundamental es el transporte de material minimizando el flujo del mismo entre la cámara y el resto del molde.

Un claro ejemplo de la necesidad de este proceso es la producción de una pieza con perfil en forma de 'H', ver las figuras 4.10a-c y 4.11a-c. La fabricación de tal tipo de piezas requiere de la acción independiente de cuatro grupos de punzones. Inicialmente los punzones inferiores se encuentran dentro del molde durante el llenado del mismo. Luego los punzones superiores son movidos de forma descendente, para que finalmente el perfil con forma de 'H' sea creado al mover los punzones medios, superior e inferior, manteniendo durante el proceso una distancia constante entre los mismos. La cámara a transportar queda virtualmente definida por los punzones medios superior e inferior y por dos planos

²*Transferencia*: en general describe el movimiento o reposicionamiento del material de una zona hacia otra del interior del molde como consecuencia del efecto de los punzones. El objetivo de este proceso puede ser el de llevar a cabo el transporte del material existente dentro de una determinada zona minimizando el flujo de material desde o hacia la misma (transporte de cámara) o el de inducir el flujo de material desde una zona de la cámara con material hacia otra zona vacía o con una menor densidad de material. Estos procesos pueden o no ir acompañados de una reducción del volumen de la cámara.

³*Flujo de masa o de material*: cantidad de material que pasa a través de los límites de una determinada cámara o volumen de control. Aparece como consecuencia de los procesos de llenado, transporte, transferencia y compactación, ante la existencia de gradientes de presión y/o de densidad. En el contexto de la transferencia, el proceso ideal es el que maximiza el flujo de material entre la cámara o zona transferida y el resto de la cavidad.

⁴*Transporte de cámara*: por medio del movimiento de los punzones se desplaza una determinada cámara por el interior del molde. La cámara transportada suele conservar su volumen constante durante el proceso, con lo cual se habla de transferencia de material con transporte de cámara. El objetivo de este tipo de procesos, cuando es puro, es desplazar la totalidad del material existente en el interior de la cámara de transporte. En consecuencia el proceso ideal implica que la entrada y salida (flujo) de material de la cámara de transporte sea mínima o nula.

verticales, que a modo de continuación de los extremos de tales punzones los unen, cerrando así la cámara de transporte o volumen de control, ver las figuras 4.10c y 4.11a. Durante el proceso descrito el volumen de la cámara transportada se mantiene constante, sin embargo, se producen unas fuertes deformaciones cortantes en las zonas adyacentes a los límites laterales de dicha cámara. Tal fenómeno, que será explicado con más detalle en el siguiente apartado, induce la aparición de variaciones locales de densidad dentro de la zona de influencia de dichas deformaciones [24], y por ende, de perturbaciones en la densidad del interior de la cámara transportada y del establecimiento de patrones de flujo de material entre el interior de la cámara y el resto del molde.

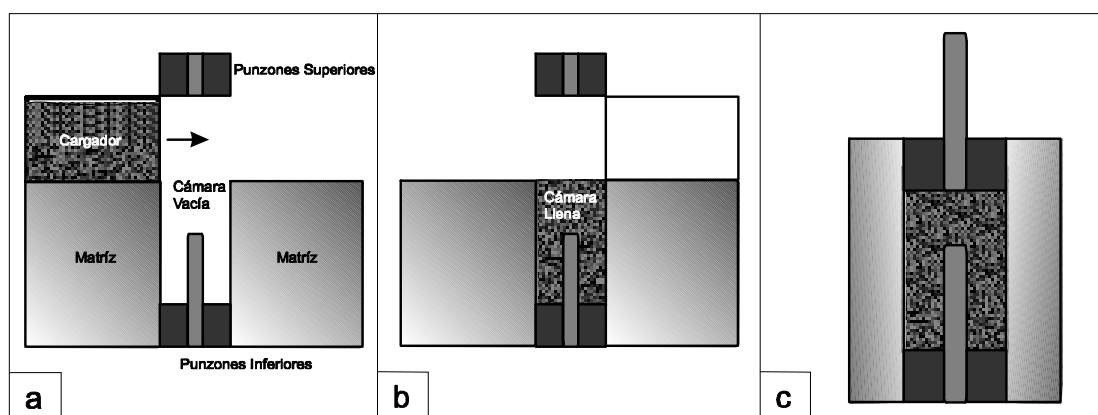


Figura 4.10: Pieza tipo H, a) llenado de molde, material en el cargador y molde vacío, b) molde totalmente lleno de material, c) transporte de cámara (estado inicial)

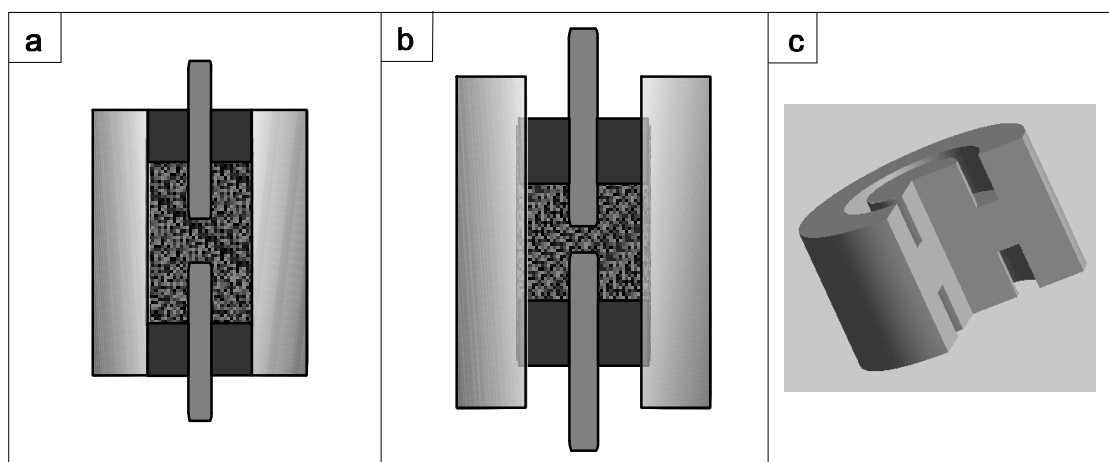


Figura 4.11: Pieza tipo H, a) transporte de cámara (estado final), b) compactación, c) pieza terminada

4.3.2. Aspectos fenomenológicos

Los procesos de defomación de medios granulares presentan habitualmente planos o bandas de cizalladura o corte [49]. Esta fenomenología es la dominante cuando no hay una variación importante del volumen que ocupa el material, es decir que la compactación que se produce es de baja magnitud. En estos casos prevalece el efecto del denominado ángulo de fricción interno del material, tal como lo indican los modelos constitutivos clásicos de Mohr-Coulomb y Drucker-Prager desarrollados especialmente para materiales de tipo friccional [39].

Una característica destacable de estos materiales es que las deformaciones tienden a concentrarse en planos dominantes denominados planos de corte, shear bands o shear planes. A partir del análisis teórico dichos planos tienen dimensión nula [90], pero como consecuencia de las observaciones experimentales se sabe que dichos planos presentan una dimensión finita que llega a ser de 8-12 veces el diámetro del grano característico que compone al material [29]. Por lo tanto, en el espacio definido por los planos o bandas, se producen unas elevadas distorsiones (originadas por las deformaciones cortantes) del material que tienden a generar fenómenos de dilatación⁵ seguidos de una consecuente reducción local de la densidad [26][39][24]. Por otra parte, los resultados experimentales indican que la zona con concentración de deformaciones cortantes presenta su máximo efecto en la parte central de la banda de corte para luego ser atenuado exponencialmente hacia la periferia de la misma [39], efecto que se explica por la existencia de planos de activación formados por las diferentes capas de granos presentes en el material [49][97].

4.3.3. Estudio del transporte de cámara

En virtud de lo expuesto acerca de los procesos de transferencia, desde un punto de vista general, se plantea la necesidad de simular numéricamente tales procesos a fin de poder predecir el comportamiento de los materiales utilizados habitualmente en la industria. Por tal motivo, y con el propósito de poder efectuar la validación y comparación del modelo numérico propuesto, se presenta a continuación la reproducción numérica de un ensayo de transporte de cámara basado en los estudios experimentales presentados en [49]. El objetivo primario es el obtener numéricamente un resultado de cualitativamente comparable con los resultados experimentales. Se trata de reproducir numéricamente la configuración final del material deformado y evaluar tanto cualitativa como cuantitativamente el transporte de cámara durante el proceso para su posterior validación mediante la comparación con el resultado experimental. Una vez validado el resultado numérico, éste puede ser utilizado para prever la distribución de densidades y flujos de masa ocurridos durante el proceso, los cuales presentan una extremadamente compleja o hasta imposible medición experimental.

4.3.4. Descripción del ensayo

Para estudiar de forma aislada y general al proceso de transporte de cámara se tomaron como base los resultados experimentales publicados en [49] correspondientes a la arena

⁵Dilatancia de Reynolds [97], aumento de volumen de una determinada masa de material.

gruesa⁶, que fue utilizada experimentalmente debido a su fácil manipulación y marcado. La pieza bajo análisis presenta un perfil final en forma de 'H' al que se llega partiendo de un perfil inicial en forma de 'Π'. En éste, la acción de dos punzones, produce el movimiento de la cámara que conforma inicialmente el arco superior hasta zona media del perfil. Las figuras 4.12 muestran de forma esquemática las geometrías inicial y final del ensayo, indican las dimensiones geométricas y el desplazamiento de los punzones superior e inferior durante el proceso. Por otra parte, en la misma figura, se señala entre los punzones superior e inferior la cámara de transporte que permanece con el volumen constante durante todo el proceso. Puede observarse además, que en la región definida por todo el ancho del molde y la posición inicial de los punzones superior e inferior, se ha llevado a cabo una subdivisión de la cámara en 6 capas horizontales de igual altura. El material perteneciente a cada una de dichas capas ha sido marcado a fin de seguir su evolución durante el proceso y poder así realizar cálculos y comparaciones tanto de carácter cualitativo como cuantitativo para su posterior comparación con los resultados experimentales, ver las figuras 4.12a y b.

El tiempo total del proceso es de 1 s, mientras que el desplazamiento asignado a los punzones superior e inferior es U_p , ver el cuadro 4.1, con lo que la velocidad de los punzones corresponde a 50 mm/s y se mantiene constante durante todo el proceso. El efecto de la fricción entre el material y los punzones y entre este y las paredes del molde no se ha tenido en cuenta en el estudio por ser considerado despreciable respecto a la fricción interna del material y al efecto global del ensayo. Debido a las características comentadas anteriormente y relacionadas con este tipo de procesos, el ancho del punzón, W_p , se presenta como la variable fundamental para ser estudiada. Esto se debe a que si el resto de dimensiones y condiciones se mantienen constantes, el ancho del punzón define el tamaño de la cámara a transportar, y por ende, la cantidad de material involucrado en el transporte, la superficie total de contacto entre los punzones y el material donde se imponen el desplazamiento y la fuerza destinados a mover el material, etc.

Para poder explicar y analizar el ensayo de transporte de cámara se consideran las siguientes definiciones:

- Volumen de control: coincide con la cámara o zona de transporte que queda definida en sus límites superior e inferior por los punzones superior e inferior respectivamente. A ambos lados, la cámara se define virtualmente por medio de una prolongación de los planos generados por los lados de los punzones superior e inferior, ver la figura 4.12.
- Transporte eficiente: es el proceso por el cual la totalidad del material que se encuentra en el volumen de control al inicio del proceso es transportado completamente hasta su posición final sin haber existido flujo de material en dicho volumen.
- Índice de transferencia: definido como $IT = \frac{Masat}{Masao} * 100$ indica el porcentaje de masa perteneciente al volumen de transporte transferida respecto de la masa inicial en dicho volumen⁷. Alcanza el 100 % en el caso de que la masa se haya transportado

⁶Las propiedades granulares tales como el factor de forma S , la rugosidad R , etc. de los metales utilizados en los procesos industriales de pulvimetalurgia (Distaloy AB - Sintermetal, Iron Metal Powder) son comparables con las de la arena gruesa y fina, ver el capítulo 4 de [49].

⁷El proceso de transferencia de material está formado por dos componentes: el transporte de cámara y el

Dimensión	Medida [mm]
W_m	50
H_m	100
H_{ch}	30
W_p	3-5-10-20-30
U_p	50

Cuadro 4.1: Dimensiones geométricas del molde

completamente, sin entrada y/o salida de material de la zona de transporte (balance de masa nulo en la cámara de transporte).

En el caso ideal (transferencia con transporte eficiente) las variaciones de masa y de densidad en la zona de transporte son despreciables, ya que la masa en el interior de esta zona se mantiene invariable. Sin embargo, se espera que la acción de la fricción interna del material en las partes laterales del volumen de transporte produzca alteraciones y perturbaciones que desvíen el comportamiento real respecto del ideal. En este sentido, el papel desempeñado por el ancho del punzón no afecta directamente al tamaño de las zonas expuestas a la fricción interna del material (laterales de la cámara de transporte), sin embargo se supone que presenta influencias a nivel de la calidad del transporte de la cámara. Por tal razón, el análisis de las influencias de dicha variable es lo que motiva el presente estudio.

4.3.5. Aspectos del modelo numérico

A continuación se mencionan un conjunto de hipótesis que tienen como fin el de simplificar de forma razonable el problema original, transformándolo en otro equivalente a los ojos del objetivo perseguido. Se enumeran además el conjunto de propiedades mecánicas y numéricas que definen el comportamiento del material y del modelo constitutivo y los indicadores del grado de discretización y de coste numérico del problema.

Debido a las simetrías existentes en la geometría, el desarrollo del proceso se hace bajo la hipótesis de deformación plana, por la que se reduce la geometría originalmente en 3D, figura 4.12c, a un problema equivalente en 2D por medio de un corte coincidente con el plano transversal del montaje, figura 4.12a-b.

Considerando las características del tipo de material a modelar y la clase de problema a simular, se adopta el modelo de flujo desarrollado en el capítulo A. Los parámetros principales y propios del modelo constitutivo como así también las propiedades mecánicas utilizadas para caracterizar el comportamiento del material, se pueden observar en el cuadro 4.2. Algunas características importantes del modelado numérico del proceso de transporte de cámara llevado a cabo son las siguientes:

flujo de material. Los mismos pueden actuar de forma simultánea o separada. Si lo hacen de forma simultánea se tiene un proceso de transporte con flujo de material, pero si lo hacen de forma segregada, el transporte será puro o perfecto (no hay flujo de material por los límites de la cámara considerada) mientras que si sólo existe flujo de material éste podrá establecerse durante la transferencia sin la necesidad de hallarse en presencia de un proceso de transporte.

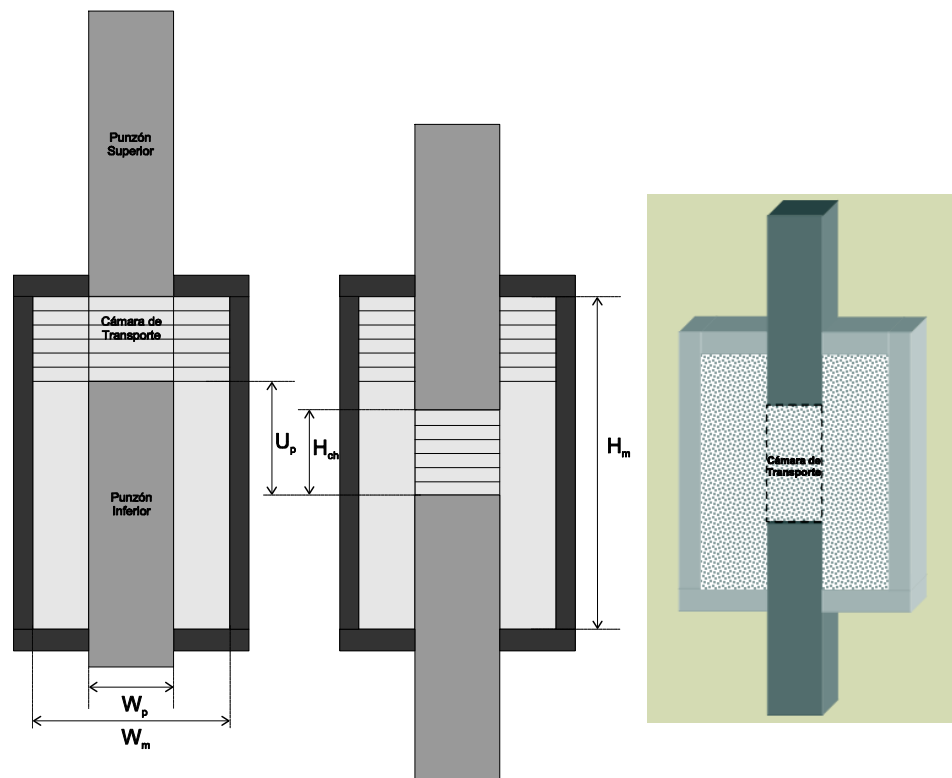


Figura 4.12: Esquema del ensayo de transporte de cámara. Geometría inicial, final (corte plano 2D) y perspectiva 3D

- El número de incrementos de tiempo utilizados para simular el proceso hace que los desplazamientos incrementales de las partículas sean de un orden de magnitud muy bajo. En consecuencia, la reconexión de las partículas en cada incremento de tiempo garantiza distorsiones mínimas en los subdominios de cálculo y la actualización muy frecuente de las propiedades y magnitudes del problema.
- La evolución de las propiedades del material es despreciable durante el proceso, ya que la variable interna del modelo (máxima densidad relativa histórica) permanece prácticamente constante durante el mismo.

El grado de discretización utilizado para la simulación del problema es equivalente al número total de partículas definidas para representar al material (PFEM), y éstas son una función proporcional del número de grados de libertad resueltos y del número medio de subdominios (conectividades entre las partículas) involucrados en cada incremento de cálculo. Cada uno de los aspectos nombrados se exponen en el cuadro 4.3 para los diferentes anchos de punzón considerados. Por su parte, la densidad inicial del material considerada en el ensayo es de $1.58 \frac{gr}{cm^3}$ ⁸.

⁸Dicha densidad corresponde al material utilizado en los ensayos experimentales: arena gruesa.

Propiedad	Magnitud
Módulo de Young - E [MPa]	0.1
Coef. Poisson - ν	0.3
Fricción interna - b_1	2.2
Cohesión - b_2	10E-06 MPa
Eje principal de la elipse - s_1 [MPa]	$0.0075(\bar{\eta}\rho_{ref})^{5.2}$
Relación de aspecto de la elipse - s_2	1
Factor de regularización DP - γ	0.9
Factor de regularización Ellipse - ξ	0.9

Cuadro 4.2: Propiedades del material pertenecientes al modelo de flujo

Ancho punzón [mm]	GDL ⁹	Nº de partículas	Nº de subdominios
3	11678	7520	13888
5	11334	7414	13682
10	10216	7006	12871
20	8574	6293	11444
30	6922	5520	9896

Cuadro 4.3: Detalle del número de partículas, de grados de libertad y de particiones promedio utilizadas para la simulación del proceso

4.3.6. Resultados numéricos y experimentales

Análisis de los campos de desplazamientos

El estudio de los campos de desplazamientos, que si bien en esta clase de ensayos sólo permite un análisis cualitativo, presenta interés en cuanto a que por medio de los mismos pueden visualizarse los patrones de flujo que se generan durante el proceso y la posición final de las zonas marcadas previamente. Para efectuar dicho estudio, y la correspondiente comparación entre los resultados numéricos y experimentales, se procede a identificar al material, tanto dentro como fuera de la cámara de transporte, en capas de diferente color pero de igual altura $h = \frac{H_{ch}}{6}$, ver la figura 4.13¹⁰.

En primer lugar se muestran las comparaciones entre las configuraciones deformadas para una asignación de capas y zonas exactamente coincidentes entre los ensayos numérico y experimental y un alto grado de discretización numérico¹¹, ver figuras 4.14 y 4.15. De la observación de los resultados relativos a los punzones de 3-20 mm, pueden advertirse a grandes rasgos, dos comportamientos claramente diferenciados, uno donde las deformaciones son prácticamente despreciables y otro donde las mismas presentan un carácter muy marcado. Las zonas de menor deformación se encuentran más alejadas de

¹⁰El ensayo experimental difiere de la asignación mostrada en la figura 4.13, ya que en el experimento, la aquí denominada zona 7, se encuentra a su vez dividida de forma similar a las zonas 1-6. El objetivo de definir de esta manera a la zona 7 es el de poder identificar la entrada de material externo en la zona de transporte.

¹¹Se hace referencia al número de partículas utilizadas para la discretización del modelo numérico (PFEM), 25057 para el punzón de 3 mm y 20424 para el punzón de 20 mm.

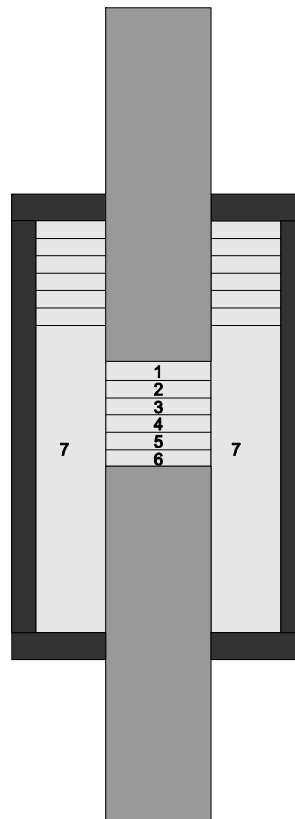


Figura 4.13: Detalle de la asignación de las diferentes zonas en la cámara de transporte (zonas 1-6) y fuera de la misma (zona 7).

los planos verticales que separan la zona transportada de la no transportada, tanto dentro como fuera de la zona de transporte. Las zonas más distorsionadas presentan altas deformaciones concentradas en planos de corte, ver el apartado 4.3.2. Las bandas de corte, que aparecen típicamente en los materiales granulares, presentan una dimensión que es proporcional al tamaño del grano involucrado [39]. La concentración de deformaciones de cizalladura que tiene su máximo valor sobre las bandas de corte, decrece con la distancia desde el centro del plano hacia la periferia del mismo, tal como se observa en la región externa a la zona de transporte de la figura 4.14 y en las regiones interior y exterior de esta en la figura 4.15. Un claro indicador de la presencia de acciones de tipo cortante son las denominadas tensiones de Von Mises¹², las cuales dependen directamente de las tensiones del tipo desviador. Un ejemplo de la concentración de tensiones de Von Mises en zonas con altas deformaciones cortantes puede ser observado en la figura 4.16, donde se aprecian claramente las bandas de corte en los límites laterales de la zona de transporte.

Dado que las bandas de corte se producen por la acción de la fricción interna del material, y como ya se ha mencionado, se ubican en los límites verticales que definen virtualmente la zona de transporte, el flujo transversal de material durante el proceso

¹²Las tensiones de Von Mises $\bar{\sigma}$ se definen como: $\bar{\sigma}(\sigma) = \sqrt{3J_2'}$, donde σ es el tensor de tensiones de Cauchy y $J_2'(\sigma)$ es el segundo invariante del tensor desviador de tensiones [69].

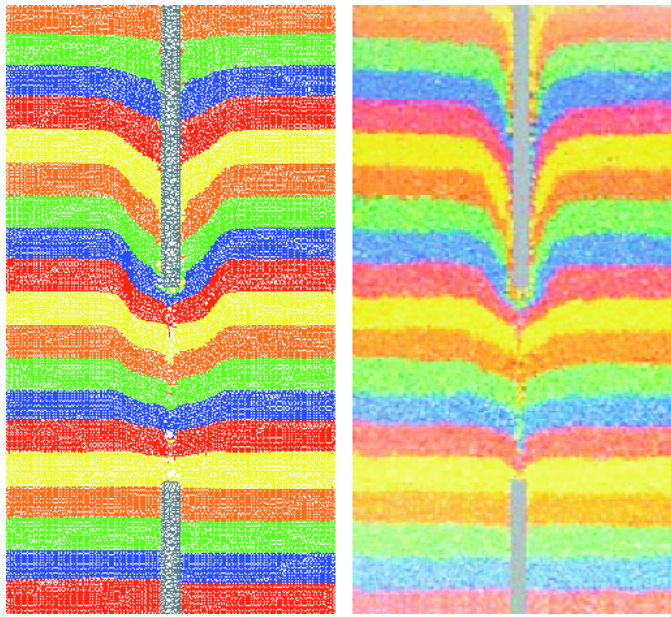


Figura 4.14: Estado final del proceso de transporte de cámara con punzón de 3 mm de ancho, resultados a) numérico, b) experimental

se establece a través de las mismas, con lo cual el análisis de la estricción de la sección transferida permite un estudio cualitativo de los patrones de flujo existentes [49]. Para efectuar dicho análisis se lleva a cabo la simulación numérica del proceso con cada uno de los anchos de punzón antes definidos con una identificación y seguimiento del material tal como se muestra en la figura 4.13, es decir del material perteneciente a cada una de las capas que se encontraba dentro de la zona de transporte al inicio del proceso. En las figuras 4.18 y 4.17, correspondientes a los resultados numéricos y experimentales, se pueden observar las configuraciones finales luego de realizar el transporte de cámara para punzones de 3-5-10-20-30 mm de ancho. La asignación de capas aplicada en la simulación numérica permite advertir a simple vista el grado de transferencia logrado en el proceso como así también entender el sentido del flujo de masa. La calidad del transporte aumenta con la dimensión del punzón y, en consecuencia, el flujo de masa entrante y saliente de la zona de transporte decrece con el mismo. En el caso del punzón de 3 mm el transporte es nulo, por lo cual el material a transportar ha salido completamente de la zona de transporte desplazado por el material externo. En el de 5 mm la situación es similar aunque aquí se observa un mínimo de transporte, el cual se incrementa algo más en el de 10 mm, donde se logra transportar una parte del material perteneciente a las zonas inferiores de la cámara. Finalmente, en los punzones de 20-30 mm, el transporte de material es considerablemente alto, en especial en el de 30 mm. Sólo tiene sentido hablar de estricción de la sección de transporte en los punzones de 10-20-30 mm, ya que en los de 3-5 mm, el material de la zona de transporte es prácticamente desplazado hacia el exterior en su totalidad. Una lectura e interpretación similar puede hacerse de los resultados experimentales de la figura 4.18, ya que a pesar de no haberse realizado en el experimento una asignación de las capas exactamente igual al caso numérico, se observa que se puede hablar de material transportado en los punzones de 10-20-30 mm de ancho y de material desplazado hacia el exterior de la cámara en los de 3-5 mm.

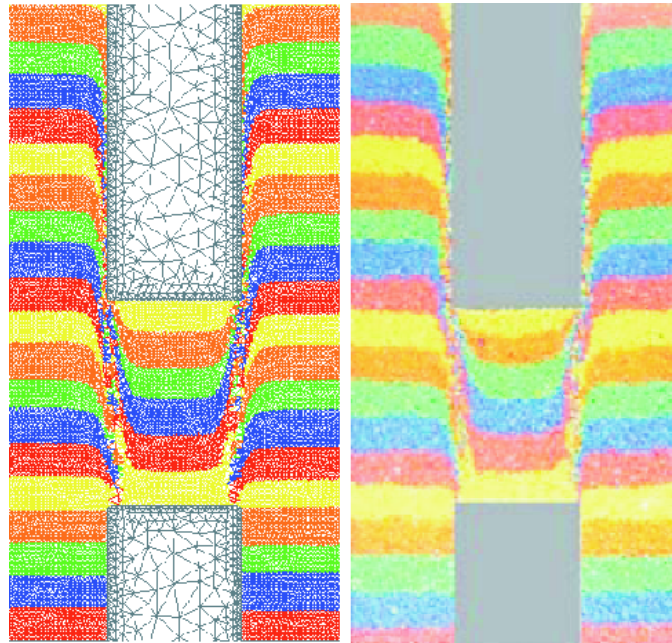


Figura 4.15: Estado final del proceso de transporte de cámara con punzón de 20 mm de ancho, resultados a) numérico, b) experimental

En el análisis de los resultados experimentales realizado en [49] se propone un modelo que describe el fenómeno físico relacionado con el flujo de material entrante y saliente de la zona de transporte. Dicho modelo se basa en que a medida que se avanza en el proceso de transporte, se induce un flujo de material de naturaleza convectiva mediante el cual el material entra desde el exterior de la cámara por la parte inferior, se desplaza axialmente de forma ascendente penetrando hacia el centro de la cámara de transporte y arrastrando hacia la zona superior (por el efecto de la fricción interna del material) a las partículas interiores. Finalmente el material arrastrado sale por la parte superior de la cámara, ver la figura 4.19. Este mecanismo va socavando al material presente originalmente en la cámara produciendo la estricción, y por ende, el adelgazamiento de la sección, que en los punzones de menor tamaño terminan desplazando la casi totalidad del material. Adicionalmente, en estudios de características similares presentados en [24] y [26], se hace un especial énfasis en el fenómeno asociado a la depresión del material que se produce en la superficie libre superior del mismo, y que resulta del colapso de los huecos ya existentes en el material y del consecuente acomodamiento de las partículas a causa de la influencia del movimiento de los punzones. En este sentido, desde un punto de vista numérico se verifican los fenómenos expuestos, y tal como puede apreciar a simple vista, el grado de concordancia entre los resultados numéricos aquí presentados y los experimentales de [49] puede considerarse como alto.

Análisis del flujo de masa

Para analizar cuantitativamente el proceso de transporte de cámara, se procede nuevamente a identificar al material en capas con el fin de medir el flujo de masa durante

diferentes instantes del proceso. Para ello, se computa numéricamente, y en diferentes instantes de tiempo, el balance de masa en cada una de las capas identificadas a tal fin¹³, ver la figura 4.13. Dicho balance se realiza calculando la masa existente en cada una de las capas dentro del volumen de control (zonas 1-6 en la figura 4.13) en un determinado tiempo $Masa_t$ y se compara luego con la masa calculada en esa misma capa dentro del volumen de control en el instante inicial del proceso $Masa_o$. Por otra parte, se define una zona exterior al volumen de control (zona 7 en la figura 4.13), que inicialmente es ajena a la zona de transporte pero que potencialmente, y en estadios más avanzados del proceso, llega a interactuar con el material de la cámara de transporte.

Los resultados son presentados en gráficas obtenidas a partir de los valores surgidos de la simulación numérica del proceso para diferentes valores de la variable ancho del punzón. Se trata de curvas donde se representa la evolución del balance de masa de cada una de las capas dentro de la zona de transporte o volumen de control con respecto a la masa inicial de la misma capa al inicio del proceso. Dado que en cada uno de los anchos de punzón considerados se tiene totalmente llena de material la zona de transporte al inicio del proceso, sólo se puede esperar que dicho material sea completamente transportado durante el proceso (transporte puro o perfecto - transferencia con la única componente de transporte activa) o que se produzca un flujo saliente de material (transporte con flujo de material - transferencia con componentes de transporte y flujo activas).

En la figura 4.20, donde se presentan los resultados correspondientes a la zona 1, se puede observar que para todos los anchos de punzón analizados el valor inicial de la masa ($t = 0$) corresponde al 100%. Esto se debe a que, por lo antes expuesto, la masa de una determinada capa en cualquier tiempo t del proceso, está normalizada con respecto a su masa inicial en $Masa_o(t = 0)$. Puede notarse que todas las curvas van decreciendo en su valor a medida que el proceso avanza en el tiempo, lo que indica que una cantidad de masa proporcional a dicho decremento ha salido de la zona 1. La salida de masa, es marcadamente mayor cuando los punzones tienen un ancho entre 3-10 mm (más del 90%), mientras que para los punzones de 20 mm y 30 mm, la salidad de masa alcanza como máximo un 25%. En los punzones de 3 mm y 5 mm se llega a perder casi el total de la masa, con lo que puede afirmarse que el transporte de masa en la zona 1, para estos casos, es prácticamente nulo.

El análisis de la zona 2, de la figura 4.21, presenta resultados similares a los de la zona 1 para el caso de los punzones de 3 mm y 5 mm, aunque alcanzan el valor estacionario (de masa casi nula) en tiempos más tardíos, 0.3 s y 0.4 s respectivamente. El punzón de 10 mm, presenta un comportamiento de transición entre los punzones de 3-5 mm y los de 20-30 mm, de forma que éste va perdiendo más lentamente la masa de la zona

¹³El balance de masa numérico se hace teniendo en cuenta las siguientes condiciones. Cada una de las partículas que pertenecen a alguna de las capas antes definidas y que se encuentran dentro de la zona de transporte al inicio del proceso es marcada y seguida durante todo el proceso. En cada instante de tiempo se detectan las partículas que se encuentran dentro del volumen de control V_C , y en cada una de las capas predefinidas se lleva a cabo un balance de masa (partículas pertenecientes a la capa dentro del volumen de control). La porción de masa asociada con la partícula p en el tiempo t corresponde a la que fue calculada para esa partícula en el $t = 0$ (se considera como hipótesis que la variación de densidad en este tipo de proceso es prácticamente nula), $\int_{V_C} (\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}) dV \simeq \int_{V_C} \rho \nabla \cdot \mathbf{v} dV$, donde el volumen de integración está delimitado en todo momento por la cara inferior del punzón superior, la cara superior del punzón inferior y la línea de prolongación que une las caras laterales de dichos punzones (límites virtuales).

2, llegando a mantener hasta el final del proceso aproximadamente el 10 % de la masa inicial, a diferencia del escaso 5 % de la zona 1. Por su parte, los punzones de 20-30 mm muestran un descenso de la masa más lento y menos marcado que en el caso de la zona 1, conservando en el final del proceso aproximadamente un 5 % más de masa que en el caso anterior.

En la zona 3 de la figura 4.22 se acentúa aún más el efecto antes explicado, incluyendo como en el caso anterior, un mayor retardo en la caída de las curvas (salida de masa de la zona 3). En los punzones de mayor ancho 10-20-30 mm se aprecia una mayor cantidad remanente de masa al finalizar el proceso, de lo que se advierte una mayor calidad del transporte de material en esta clase de proceso.

La zona 4 presenta la peculiaridad, además de continuar con la misma tendencia antes descrita, de que el punzón de 5 mm logra que se conserve una cantidad aproximada a un 5 % dentro de la zona de transporte y el de 3 mm llega a perder casi la totalidad de la masa en los estadios finales del proceso. El punzón de 10 mm logra transportar el 50 % de la masa de la zona, mientras que los de 20-30 mm lo hacen en un porcentaje que está por encima del 85 %.

En la figura 4.24 se observa que en la zona 5 todos los punzones mantienen la totalidad de la masa hasta el tiempo 0.4 s del proceso. A partir de ese punto los punzones de mayor ancho 10-20-30 mm mantienen la masa de la zona en valores que están por encima del 90 %, mientras que el de 5 mm llega a perder casi totalmente la masa de la zona al finalizar el proceso y el de 3 mm lo hace a partir del tiempo 0.65 s.

Finalmente, la figura 4.25 presenta los resultados perteneciente a la evolución de la masa en la zona 6. En esta zona, la inferior de la cámara de transporte, los punzones de 10-20-30 mm permiten transportar un porcentaje muy superior al 90 % del material. Sin embargo, el punzón de 5 mm sólo transporta el 30 % de la masa y el de 3 mm llega incluso a perder, al final del proceso, la totalidad de la masa que inicialmente se encontraba dentro de la zona.

La línea de razonamiento presentada más arriba puede ser confirmada a la luz de los resultados que pertenecen a la evolución de la masa en la zona 7 (exterior al volumen de control definido en la zona de transporte), correspondiente a la figura 4.26. Dicha figura muestra la evolución, durante el tiempo que dura el proceso, del flujo de masa entrante hacia el interior del volumen de control (esta cantidad se encuentra nuevamente expresada en función de la masa total que inicialmente se encontraba dentro del dicho volumen). Se puede observar que la masa de la zona 7 va ingresando, a lo largo del proceso y de acuerdo al ancho de los punzones, dentro del volumen de control o zona de transporte. Como es lógicamente previsible, inicialmente no hay masa exterior dentro de la zona de transporte. Sin embargo, se observa que en el caso de los punzones de 20-30 mm la masa que ingresa llega hasta un valor máximo de aproximadamente un 10 % al final del proceso. En el caso del punzón de 10 mm, la masa entrante llega a ser de alrededor de un 45 %, en el de 5 mm de un 60 % y en el de 3 mm de un 100 %.

Este modo complementario de analizar el proceso, al igual que lo observado en la figura 4.27, se hace desde un punto de vista que considera la masa total o integrada, y no discriminada en zonas del volumen de control. En consecuencia, puede afirmarse que con un punzón de 3 mm de ancho no es posible llevar a cabo el transporte de la cámara llena de material tal como la analizada, los punzones de 5-10 mm lo hacen parcialmente,

llegando hasta un 40-55 % de material transportado, mientras que los de 20-30 mm llegan a transportar el 90-95 % del material de la cámara. En síntesis, nuevamente se llega a las mismas conclusiones previamente expuestas, quizás el aporte adicional de este enfoque es que puede permitir plantear una correlación entre la capacidad de transporte de cámara que permite un determinado ancho de punzón y el tiempo de proceso, expresado de forma equivalente, como el desplazamiento efectuado por los punzones. Esta visión alternativa puede ser potencialmente útil en el diseño y mejora de los procesos de transporte de cámara utilizados por la industria como etapa previa a la compactación porpiamente dicha.

Eficiencia del proceso de transporte

Una forma de valorar cuantitativamente un proceso de transporte de cámara es por medio de la definición de la eficiencia del proceso de transporte, que depende de forma directa del índice de transferencia (IT)¹⁴, [49]. La eficiencia de un proceso de transporte ha sido definida como la capacidad de trasladar el material existente dentro de una determinada cámara desde cierta posición inicial hasta otra posición final, sin que se produzcan fenómenos de estricción en el material perteneciente a la cámara, es decir minimizando el flujo de material en el volumen de control y considerando como espúreo el que pudiera producirse. Desde un punto de vista práctico el índice de eficiencia del proceso de transferencia se define como:

$$IT = \frac{Masa_t}{Masa_0} \quad (4.1)$$

donde $Masa_t$ es la masa de material existente en el volumen de control o zona de transporte en el tiempo t y $Masa_0$ es la masa de material que se encontraba al inicio del proceso en la misma zona de análisis. La lectura física del índice indica que si $IT = 1$ el transporte es perfecto, con lo cual la totalidad del material de la cámara es transportada hasta su posición final. Por el contrario, si $IT = 0$, el transporte efectuado es nulo, y para los valores intermedios se tiene todo el rango de transportes más o menos perfectos. A efectos de comparación con los valores experimentales presentados en [49], el tiempo t corresponde siempre al tiempo final del proceso.

Siguiendo con el análisis presentado en el apartado anterior, el estudio se centra en valorar la incidencia de los diferentes anchos de punzón en un mismo proceso de transporte de cámara, tal como lo muestra la figura 4.28. En la misma se puede observar la comparación del resultado numérico con respecto a dos resultados experimentales. Dichos resultados experimentales surgen a partir de diferentes metodologías, la primera denominada directa y la segunda indirecta, ver capítulo 11 de [49]. El análisis de los resultados bajo este punto de vista, indica una marcada coincidencia con las conclusiones precedentes, es decir que para anchos de punzón de 3-5 mm esta clase de procesos de transporte apenas logran superar el 10 % de eficiencia, mientras que para punzones de 10 mm se obtiene una eficiencia máxima de entre el 50-65 % y para punzones de 20-30 mm la eficiencia resultante es superior al 85 %.

¹⁴El índice de transferencia debe ser interpretado en el sentido estricto de su componente de transporte de material (transporte de cámara puro con objeto de minimizar el flujo de material).

Con respecto a la comparación entre resultados numéricos y experimentales, la máxima discrepancia se tiene en el caso de un ancho de punzón de 10 mm, donde la diferencia entre ambos resultados ronda el 15-18%. Dicha discrepancia puede atribuirse a dispersiones en la obtención del índice de transferencia en el caso experimental, ya que en ambas metodologías citadas en [49], se han requerido medidas procedentes de los análisis gráficos de las imágenes obtenidas durante el proceso, por lo que tales cálculos llevan un error intrínseco en los datos de origen. Por otra parte, una posible causa de error originada en los resultados numéricos podría deberse a la hipótesis simplificativa considerada, de despreciar las variaciones de baja y media intensidad en la densidad del material perteneciente a la zona transportada durante el cómputo del flujo de masa. Sin embargo la completa concordancia cualitativa o de tendencias y la media-alta concordancia cuantitativa, arroja un resultado aceptable del experimento desde un punto de vista crítico.

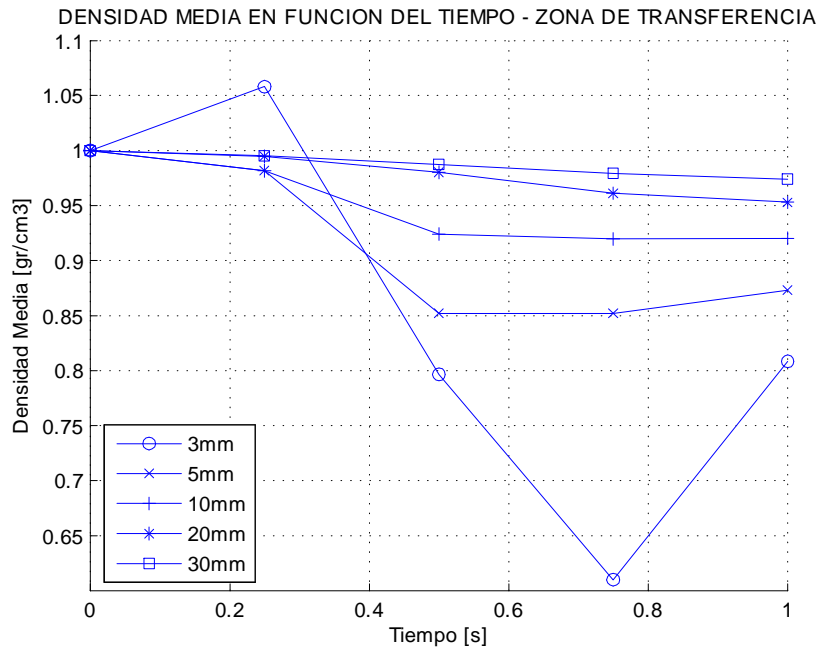
Análisis de la distribución de densidades

Como se señaló anteriormente, en el proceso real de transporte, la densidad del material tanto dentro como fuera de la zona de transporte se ve influenciada por la acción del efecto cortante existente entre las zonas móviles y fijas del material. Dicho efecto se produce como consecuencia de la fricción interna del material, la cual forma parte de las propiedades intrínsecas del mismo y depende directamente del grado de consolidación alcanzado durante el proceso. Por su parte, la densidad se presenta como una variable de análisis fundamental en el estudio de los procesos de la pulvimetalurgia, y su predicción permite mejorar y optimizar dichos procesos. La densidad presenta una extremadamente compleja medición experimental, por lo que la utilización de la simulación numérica aparece como una posibilidad cierta ante tal situación. Una vez aceptada la validez de los resultados numéricos, luego del previo contraste con los resultados experimentales en los apartados precedentes, se presentan aquí los campos de densidades resultantes del cálculo con el objetivo de brindar una estimación de las densidades presentes en el proceso real.

Nuevamente, el análisis se centra en la zona de transporte definida en el apartado 4.3.6 por medio del estudio de la evolución de la densidad media dentro de dicha zona a lo largo del proceso para cada una de los anchos de punzón considerados.

Análisis de la evolución de la densidad media en la zona de transferencia

La densidad media se calcula a través de la siguiente expresión: $\bar{\rho}_t = \frac{Masa_t}{V_t}$, donde $Masa_t$ es la masa presente en el tiempo t en la zona bajo estudio y V_t es el volumen de dicha zona (dado que los punzones superior e inferior se mueven de forma sincronizada y manteniendo constante la distancia entre sí, este volumen permanece constante durante todo el proceso para un determinado ancho de punzón). Por lo tanto, en un dado tiempo t , lo que se hace es situar la posición del volumen V_t (cámara de transporte), evaluar la masa $Masa_t$ presente en él, y finalmente calcular la densidad media $\bar{\rho}_t$ resultante.



Evolución de la densidad media en la zona de transporte

En líneas generales, una visión panorámica de las curvas de evolución de la densidad, figura 4.3.6, indica que para cualquiera de los anchos de punzón elegidos para llevar a cabo el análisis la densidad media de la cámara de transporte, tiende a disminuir en un rango que se sitúa en aproximadamente 2.5-38 % según sea el ancho de punzón considerado. Obteniéndose los menores valores de densidad en los punzones de menor ancho 3-5 mm. El punzón de 3 mm presenta, al iniciarse el proceso y hasta el tiempo 0.25 s, un comportamiento inestable¹⁵, durante el cual llega a producirse un aumento de la densidad media hasta aproximadamente $1.68 \frac{gr}{cm^3}$, para luego tomar un comportamiento decreciente, y que a pesar de sufrir nuevas inestabilidades, se sitúa finalmente en aproximadamente $1.28 \frac{gr}{cm^3}$. Por otra parte, el punzón de 5 mm, induce en la densidad un comportamiento también decreciente, aunque en menor medida que en el caso precedente y sin la presencia de inestabilidades. Luego del inicio del proceso, y hasta el tiempo 0.25 s, la reducción en la densidad media es prácticamente despreciable, para luego acentuarse hasta el tiempo 0.5 s y tomar de ahí en adelante su valor casi definitivo de aproximadamente $1.38 \frac{gr}{cm^3}$. En el punzón de 10 mm vuelve a experimentarse una evolución de la densidad media de características casi coincidentes con el caso antes descrito, aunque en este caso el valor final de la variable se sitúa en aproximadamente $1.46 \frac{gr}{cm^3}$. En los casos de 20-30 mm, también se percibe un comportamiento similar pero de menor escala y algo retrasado en el tiempo. Del cual resulta finalmente una densidad media de aproximadamente $1.5 \frac{gr}{cm^3}$ para el de 20 mm y de $1.58 \frac{gr}{cm^3}$ para el de 30 mm.

Si se tienen en cuenta las consideraciones relativas al flujo de masa en la zona de transporte, tanto desde el punto de vista de la masa entrante figura 4.26 como saliente figura 4.27, pueden establecerse relaciones entre dichos flujos y la densidad media dentro de la

¹⁵Las citadas inestabilidades pueden ser atribuidas a que se ha buscado definir el comportamiento de una determinada variable estrechando el rango de estudio (ancho del punzón) y manteniendo a su vez constante el grado de discretización numérico utilizado (densidad media de partículas representativas del medio - PFEM).

zona de transferencia. En los casos de los punzones de 3-5 mm, la masa que inicialmente se encontraba dentro de la cámara de transporte, termina en un 100 % fuera de la misma en el caso de 3 mm y en más de un 80 % en el de 5 mm. De forma complementaria el espacio vacío dejado por la salida del material original es parcialmente o totalmente ocupado por la entrada de material inicialmente ajeno a la cámara de transporte, figura 4.26. Este acontecimiento, que puede ser atribuido a un mecanismo impulsado por la fricción interna inherente al material, figura 4.19, y generado originalmente por el movimiento de los punzones se produce en todos los anchos de punzón, pero comienza a cobrar mayor relevancia en los casos de menor ancho, llegando a ser definitivo en el de 3 mm. Esto es debido a que los planos que limitan internamente a las bandas de corte tienden a acercarse aumentando el efecto de socavado en el material transportado, incrementando el flujo ascendente de material dentro de la zona de transporte y finalmente expulsándolo por su parte superior. El hecho de que el material externo a la cámara vaya ingresando a la misma como consecuencia de este mecanismo parece tener una influencia decisiva en la evolución de la densidad media. Este camino de razonamiento permite aventurar que el material ingresante conserva una menor cohesión, y por ende, mayor distancia entre sus granos, lo que en definitiva indica un efecto de dilatación que es típico en materiales de esta naturaleza.

Como conclusión de esta sección puede afirmarse que en general la zona de transporte presenta una evolución decreciente de la densidad media. Tal situación, es atribuible al proceso de entrada de material externo, a la salida de una mayor o menor proporción del material original, a su posterior movimiento ascendente y a su consecuente acomodamiento dentro de la cámara. El ancho de los punzones afecta de forma inversamente proporcional a la variación de la densidad media dentro de la cámara, y por consiguiente, a la salida de material de la misma. Los punzones de menor ancho, por su parte, tienden a perder una mayor proporción de su material original, a transportar una menor cantidad del mismo y a terminar el proceso con una densidad por debajo de su valor inicial.

Análisis de los campos de densidades

La observación de la distribución final de densidades en el proceso de transporte de cámara de la figura 4.29 hace notar, tal como se había hecho previamente en el apartado anterior, la existencia de comportamientos más o menos acentuados (en función del ancho del punzón) de la densidad en la zona de transporte. En los punzones de 3-5 mm, la distribución de densidades en esta zona tiende a ser más alta en la parte superior y más baja en la parte inferior como efecto de la influencia del empuje del punzón superior arriba y del espacio creado por el punzón inferior durante su descenso. Sin embargo, no pueden apreciarse dentro de la zona estudiada, regiones claramente definidas de valores de densidad dominante, cosa que sí puede hacerse en el caso de los punzones de 20-30 mm, donde se observa la existencia de prácticamente tres regiones de densidades alta, media y baja coincidentes con la altura de la zona de transporte. El punzón de 10 mm presenta un comportamiento más indefinido, con mayor densidad en la zona superior y menor densidad en la zona inferior del volumen de control pero con un comportamiento en general difuso.

El material externo a la zona de transporte, presenta en todos los casos un comportamiento casi coincidente que podría resumirse diciendo que en la parte inferior (zona por debajo de la cota inferior del volumen de control) aumenta la densidad debido a una leve

compactación del material debida a la fuerza ejercida por el movimiento de los punzones y a la propagación de la misma como consecuencia de la fricción interna propia del material. Por otra parte, toda la región superior (zona por encima de la cota superior de la zona de transporte) sufre una caída de densidad debida al efecto de dilatación experimentado por el material como consecuencia de la separación de las partículas que lo conforman. El citado efecto se ve incrementado en la periferia del punzón superior, ya que es en esta zona donde el material tiende a homogeneizar, luego del paso de la zona de transporte, el efecto producido por las bandas de corte anteriormente mencionadas. En este sentido se acepta parcialmente la explicación que se hace del fenómeno en [24] y [26], donde se asocia la existencia de bandas de corte con el fenómeno de dilatación y su consecuente aumento de volumen y reducción de densidad.

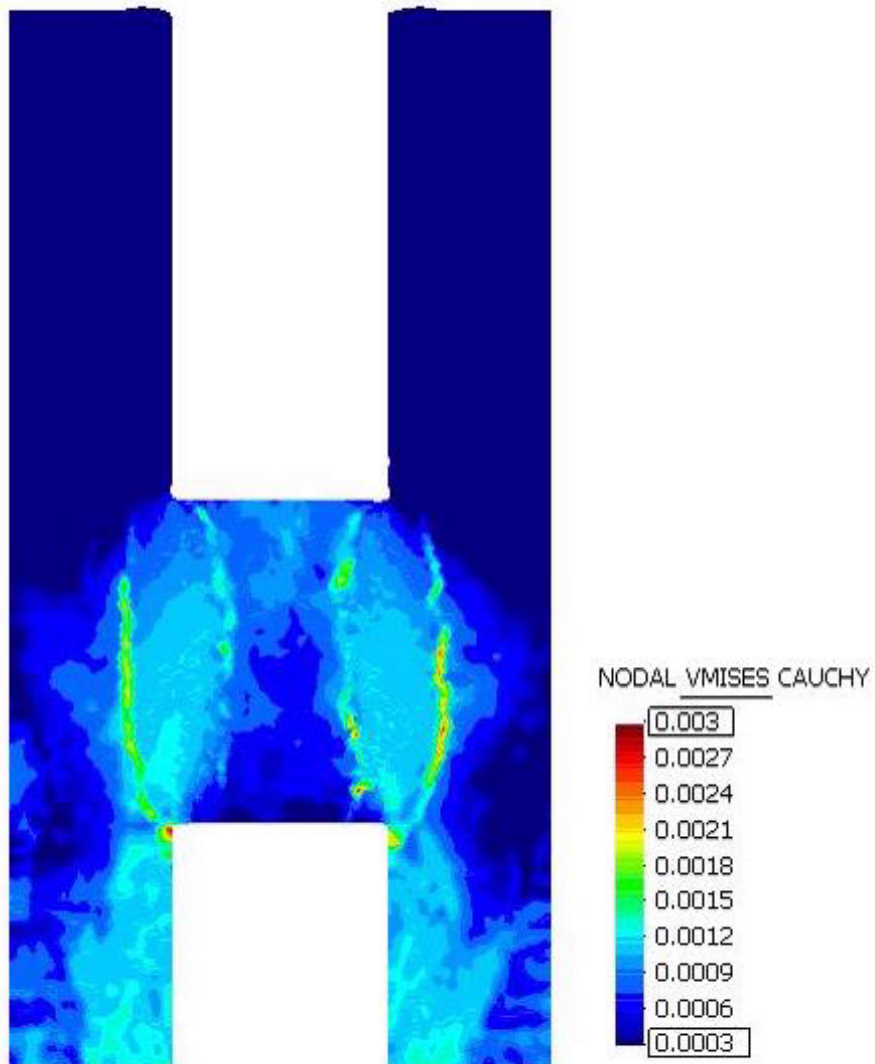


Figura 4.16: Detalle de las tensiones de Von Mises en un determinado instante del proceso de transporte de cámara con punzones de 20 mm de ancho (las tensiones se encuentran expresadas en MPa)

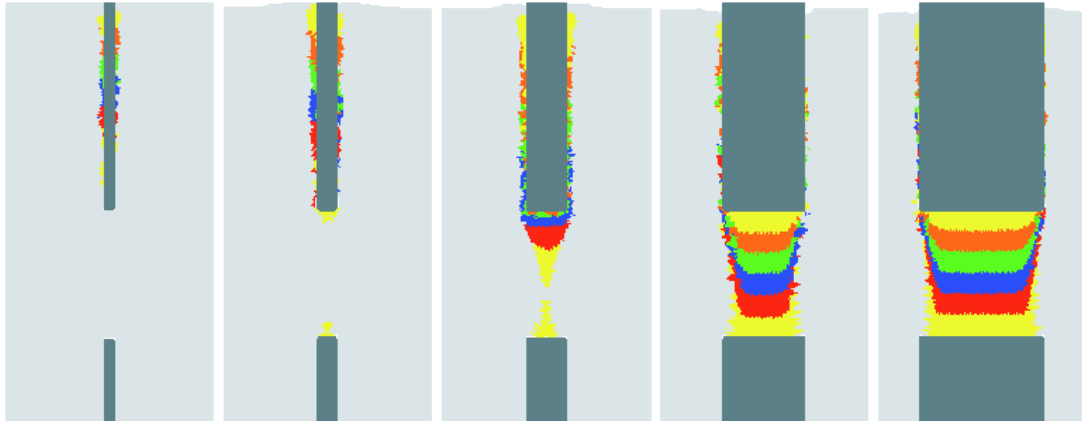


Figura 4.17: Estado final del proceso de transporte de cámara (resultados numéricos) para los punzones con anchos de: a) 3 mm, b) 5 mm, c) 10 mm, d) 20 mm, e) 30 mm

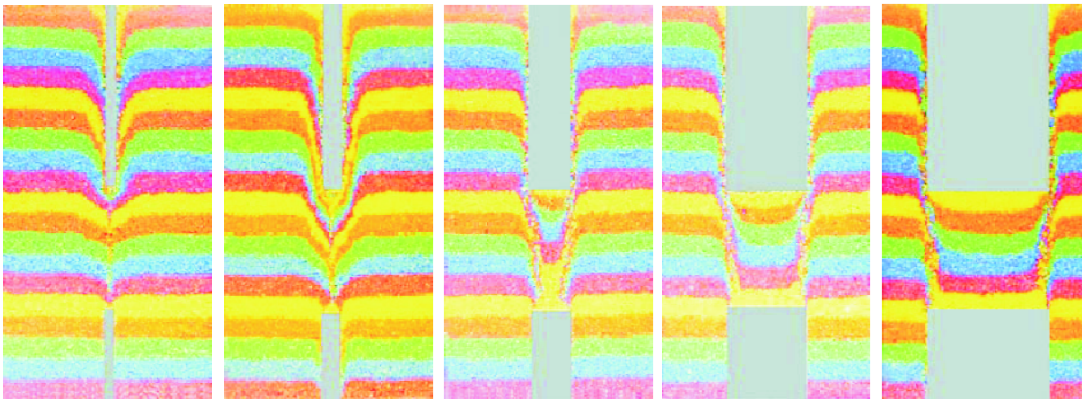


Figura 4.18: Estado final del proceso de transporte de cámara (resultados experimentales) para los punzones con anchos de: a) 3 mm, b) 5 mm, c) 10 mm, d) 20 mm, e) 30 mm

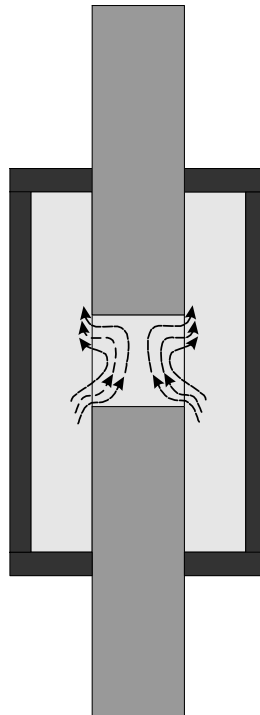


Figura 4.19: Esquema del flujo de material en la zona de transporte, efecto producido por la fricción interna del material

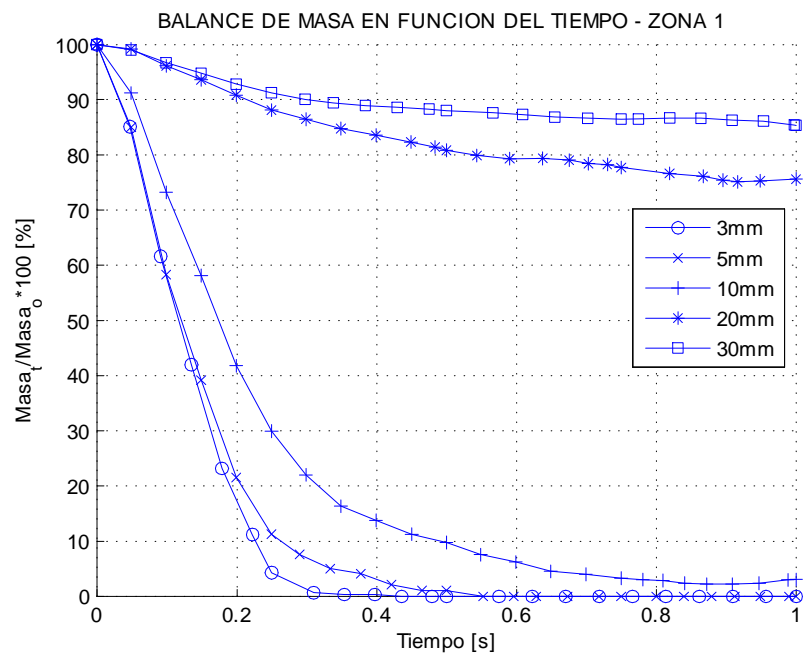


Figura 4.20: Evolución del balance de masa en la zona 1

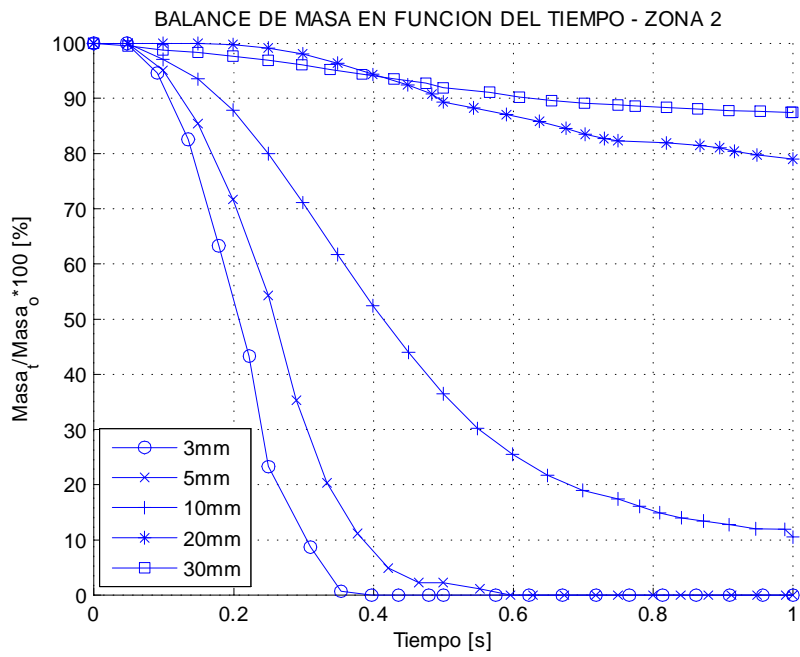


Figura 4.21: Evolución del balance de masa en la zona 2

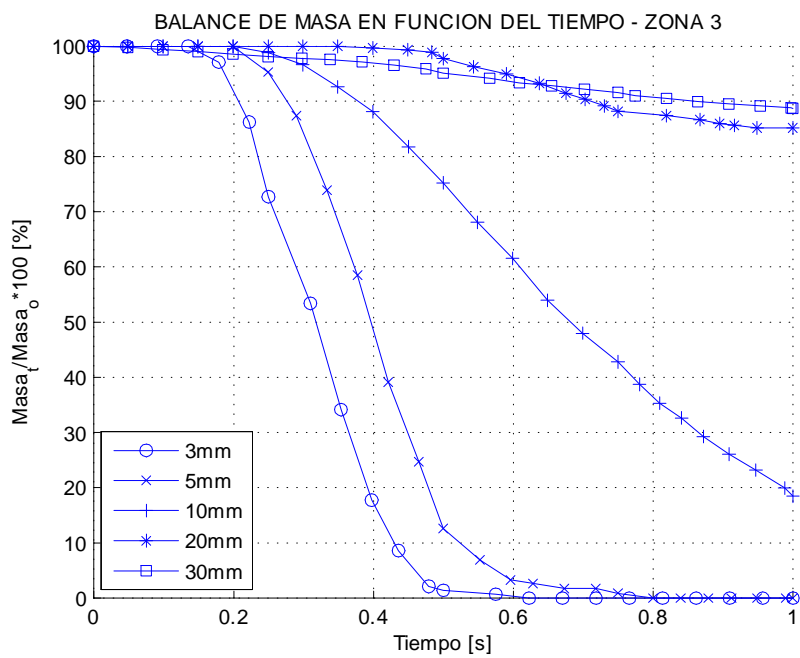


Figura 4.22: Evolución del balance de masa en la zona 3

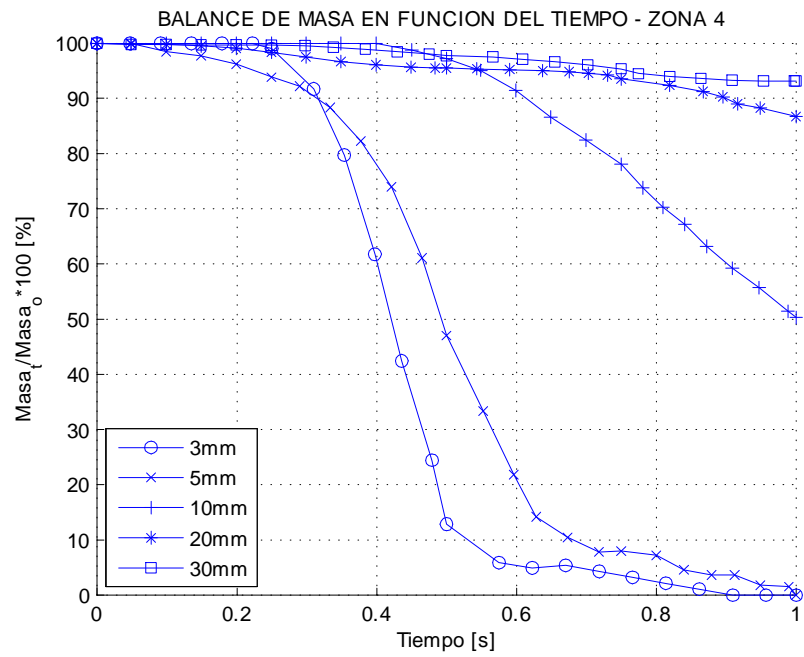


Figura 4.23: Evolución del balance de masa en la zona 4

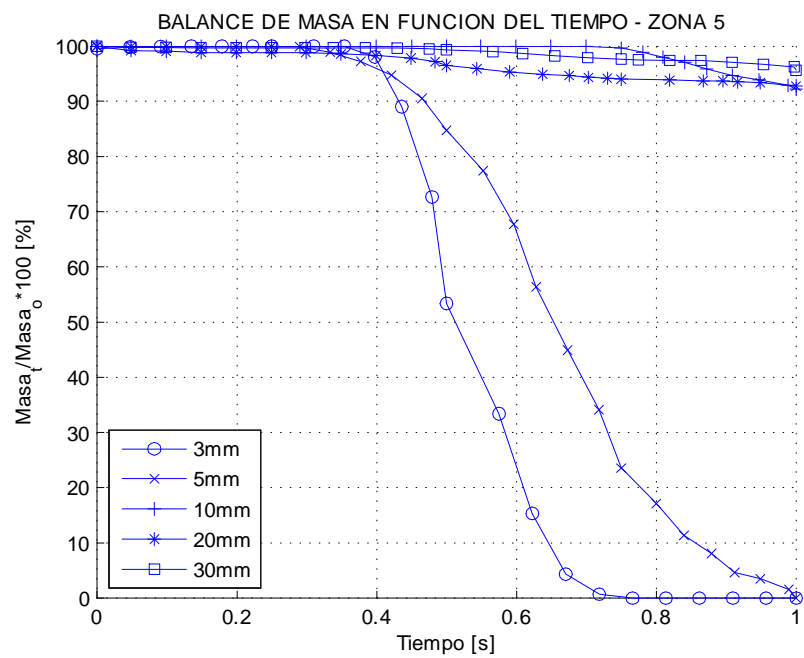


Figura 4.24: Evolución del balance de masa en la zona 5

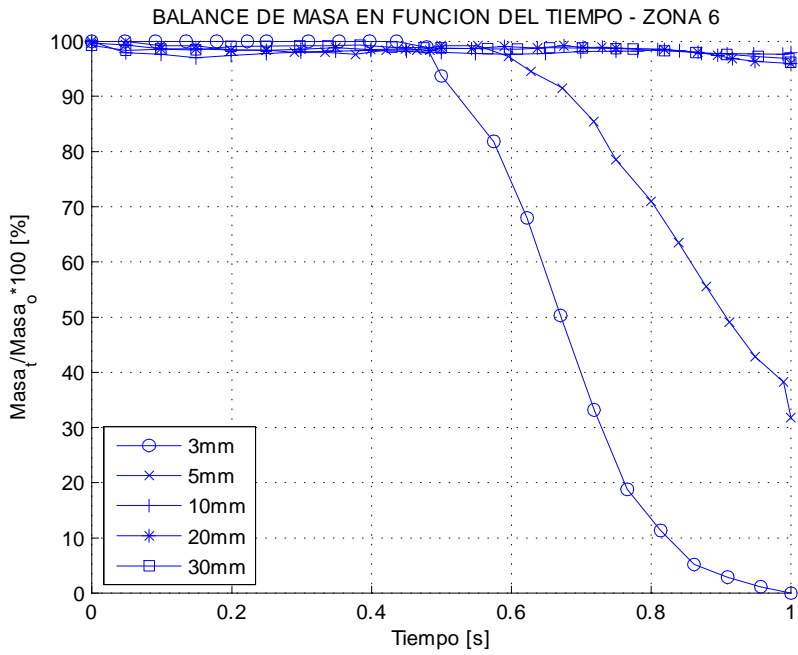


Figura 4.25: Evolución del balance de masa en la zona 6

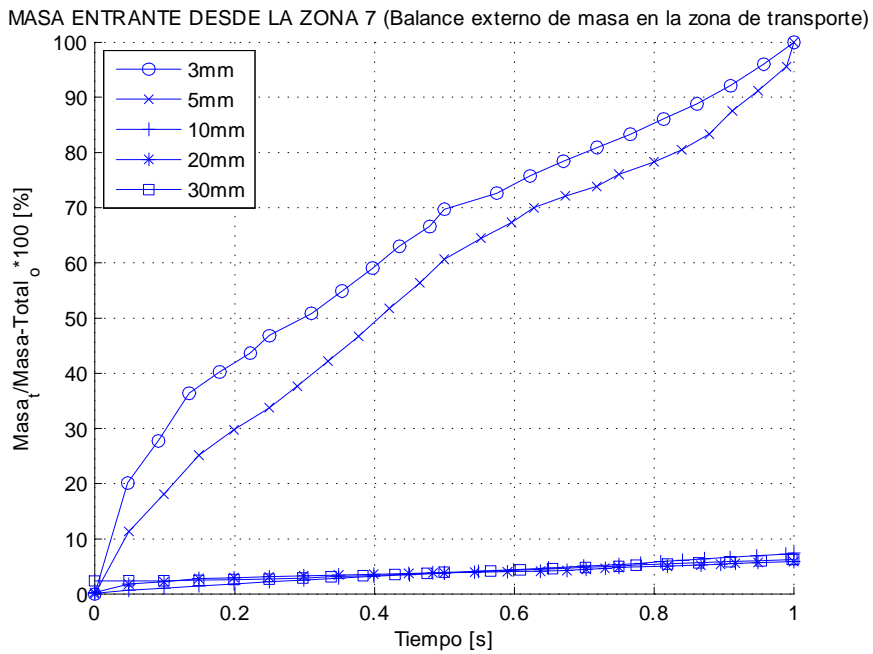


Figura 4.26: Evolución de la masa en la zona 7

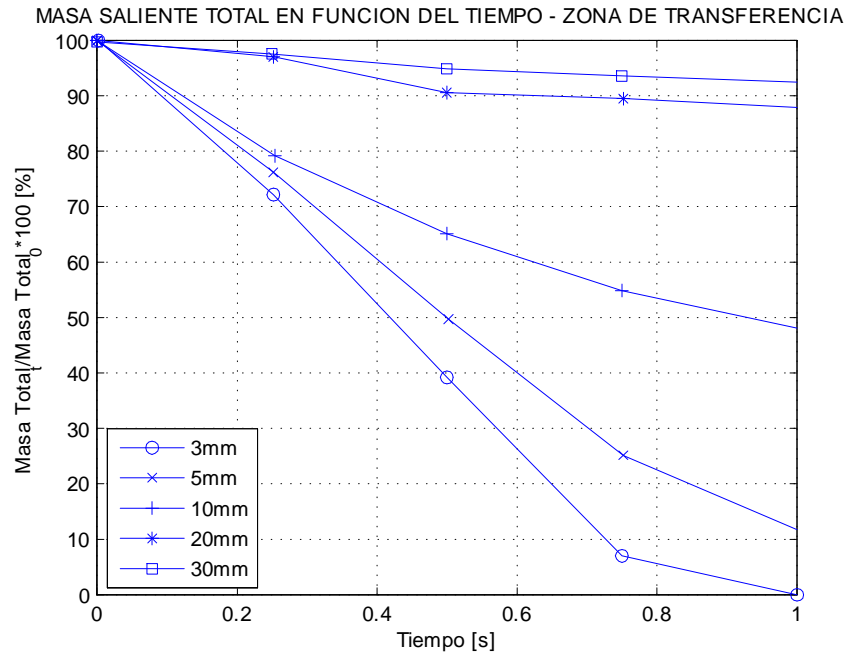


Figura 4.27: Evolución del balance de masa total en la zona de transporte

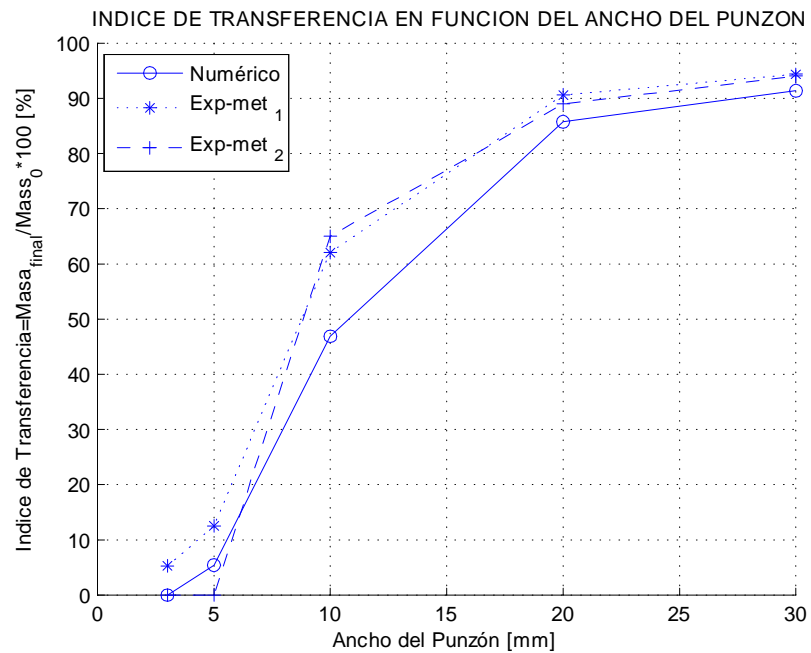


Figura 4.28: Índice de eficiencia del proceso de transporte de masa, resultados numéricos y experimentales

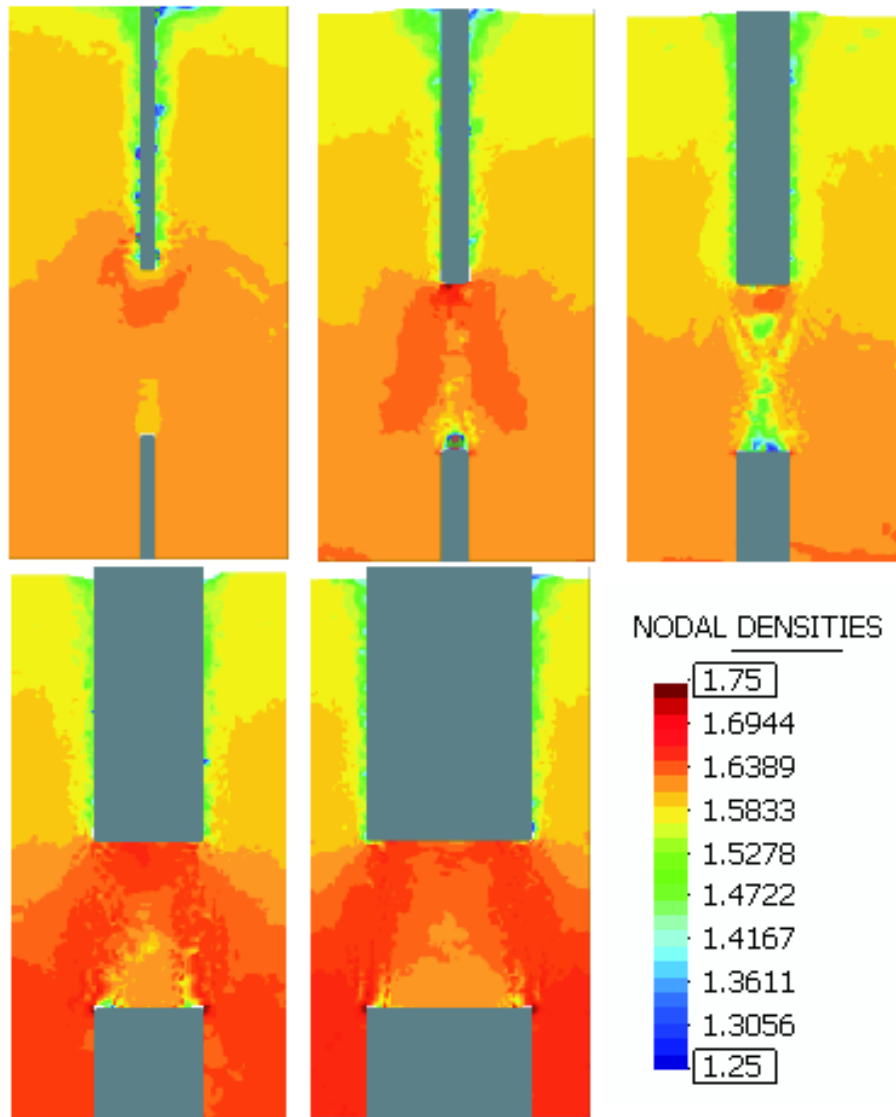


Figura 4.29: Distribución de densidad final en el proceso de transporte de cámara con punzones de a) 3 mm, b) 5 mm, c) 10 mm, d) 20 mm y e) 30 mm

4.4. Proceso de compactación

4.4.1. Generalidades

La compactación de materiales en polvo es el proceso por el cual se realiza el conformado de una pieza o componente por la acción de un conjunto de punzones metálicos impulsados por una prensa mecánica o hidráulica. Durante el mismo, y como consecuencia del aumento de la densidad, el material pasa de ser un polvo con sus granos desprendidos entre sí a ser una pieza compacta y sólida. Previamente a la compactación, el material en polvo se encuentra dentro del molde o matriz luego de la etapa de llenado. La matriz presenta una geometría que coincide con el negativo de la pieza, y su material constitutivo al igual que el de los punzones utilizados para conformar la pieza, posee una mayor dureza que la de la pieza ya compactada. Por lo tanto, en la mayoría de los casos prácticos, la deformación de las herramientas y de la matriz se suelen despreciar. Sin embargo, las pequeñas deformaciones presentes en dichos componentes, pueden llegar a enmascarar las diferencias existentes entre los procesos idealizados y los reales, que se reflejan en inconsistencias en las distribuciones de densidades finales. Por tal motivo, en el presente estudio del proceso de compactación se tienen en cuenta las deformaciones de todas las herramientas involucradas en el mismo.

Dentro de los procesos de compactación existen dos grandes grupos, la compactación en frío y en caliente. Desde el punto de vista de su aplicación industrial, el proceso de compactación en frío es el que mayoritariamente se utiliza en la actualidad. El mismo presenta a su vez algunas variantes: la compactación por vibración, la compactación cíclica, por laminado, por presión hidrostática y por presión uniaxial. De todas ellas, la que se estudia en este trabajo es la compactación por presión uniaxial.

El proceso de compactación uniaxial en frío se efectúa luego de las siguientes operaciones:

- Llenado del molde.
- Enrasado del material sobrante que excede el nivel máximo de la cámara inicial.
- Transferencia de material por el interior de la matriz a fin de obtener una distribución de masa uniforme en caso de que la pieza presente una geometría compleja.

En lo que se refiere al modelado y la simulación numérica, los procesos de compactación siempre han recibido una mayor atención por parte de los investigadores y de la industria. Esto se debe a que la distribución de densidades o de masa resultante de la compactación tiende a permanecer en la pieza final, ya que los procesos posteriores de sinterizado y de calibración no contribuyen a modificarla de manera significativa. En consecuencia, para obtener una pieza con propiedades mecánicas homogéneas, resulta indispensable optimizar el proceso de compactación, lo cual se facilita mediante el ensayo numérico de varias secuencias o cinemáticas de punzones para la compactación de un determinado componente.

El modelado y la simulación numérica de la compactación de materiales en polvo ha sido considerado por varios grupos de investigación [20][13][16]. Básicamente, se pueden identificar dos enfoques basados en los conceptos de material poroso o granular, que se reflejan en los efectos producidos por los estados tensionales en la respuesta mecánica de

esta clase de materiales. A los modelos de materiales porosos se los conoce habitualmente como modelos de Von Mises modificados, en los que se incluye la influencia de la componente hidrostática de las tensiones y se satisfacen las condiciones de simetría y convexidad requeridas para el desarrollo de la teoría de la plasticidad [96][43][52]. Sin embargo, estos modelos no consideran el endurecimiento asociado a la densificación del material, que es una característica fundamental del fenómeno de compactación. Por otra parte, los modelos granulares, que se utilizan para modelar el comportamiento de materiales friccionales como suelos y rocas, reflejan la deformación cuando se superan las fuerzas de fricción interna del material y el endurecimiento presente durante la compactación [61].

Adicionalmente, existen modelos combinados como el que se presenta en este trabajo, que consideran dos superficies de fluencia convexas como la de Mohr-Coulomb o Drucker-Prager para reflejar el comportamiento friccional típico de los estados tensionales de cizalladura y un casquete elíptico para capturar la densificación y el endurecimiento del material [16][62].

4.4.2. Aspectos fenomenológicos

La compactación del material se inicia cuando los punzones comienzan a reducir el volumen de la cámara inicial. La primera acción producida sobre el material en polvo induce una densificación leve e inicial que se atribuye al reacomodamiento de los granos, lo que se traduce en un aumento de la densidad aparente.

Los materiales en polvo utilizados en los procesos industriales de compactación que pertenecen a la PM, contienen una proporción de lubricante, que depende en su tipo y composición, de las características físicas y de la morfología del polvo metálico a compactar. La finalidad del lubricante es facilitar el deslizamiento de los granos entre sí, a fin de propiciar la densificación homogénea del material, y prevenir la soldadura por presión en frío del material compactado con las paredes del molde. La presencia de fenómenos de soldadura entre el material y el molde, tiende a dificultar la transmisión de la presión más allá de la zona adherida, lo cual condiciona el correcto desarrollo del proceso de compactación. Complementariamente, la reducción de la fricción entre el material en polvo y las paredes del molde por parte del lubricante, minimiza la disipación de energía y maximiza la proporción de ésta que se destina a la compactación de la pieza. Sin embargo, la cantidad de lubricante utilizada durante el proceso de compactación, puede llegar a jugar un papel opuesto al buscado, porque en algunos casos llega a permanecer en el interior de la pieza, aún después del proceso de sinterizado [16].

La aplicación de presiones crecientes sobre la pieza que se compacta, aumenta el área de contacto entre las partículas del polvo y en consecuencia incrementa su deformación plástica. De dicho proceso resultan la densificación y la mejora de las propiedades mecánicas del material, lo cual hace que las zonas de contacto que se van expandiendo durante la compactación sean permanentes, y que se produzca la fusión intergranular cuando las deformaciones plásticas y las fuerzas aplicadas son suficientemente elevadas.

La fenomenología descrita debe ser reflejada por el modelo constitutivo, y esto se hace por medio del modelo elastoplástico cuya formulación se desarrolla en la referencia [73], mientras que la calibración de sus parámetros característicos se lleva a cabo en la referencia [17]. En dicho modelo, las superficies de fluencia son coincidentes con las utilizadas por el modelo de flujo desarrollado en el apartado 4.4.6, sin embargo las relaciones ci-

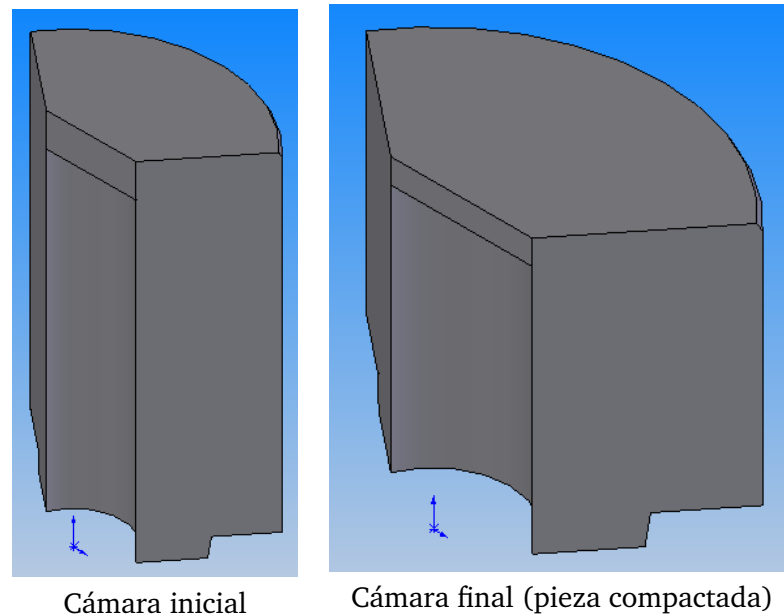


Figura 4.30: Geometrías 3D de la pieza industrial, cámara inicial y pieza compactada

nemáticas se plantean en función de los desplazamientos en lugar de hacerlo en función de las velocidades. El proceso de compactación sitúa los estados tensionales en la zona del casquete elíptico, donde el vector de flujo plástico es mayoritariamente compresivo. La superficie elíptica presenta una evolución que depende de la variable interna del modelo (máxima densidad histórica), de forma que a medida que aumenta el valor de dicha variable se incrementa su tamaño, y para deformar plásticamente al material es necesario aplicar una mayor presión. Por su parte, la deformación plástica que es mayoritariamente compresiva para densidades bajas y moderadas, tiende a ser incompresible para densidades relativas cercanas a la unidad. En el caso de las herramientas y la matriz, el modelo constitutivo utilizado es el elástico lineal.

4.4.3. Descripción del Ensayo

El ensayo de compactación reproducido numéricamente, pertenece a la pieza mecánica industrial de producción real [91]. La misma es una pieza que forma parte de una caja de velocidades de un automóvil de serie. El material utilizado es el Sint. D-10, que es una aleación de hierro habitualmente empleada para la producción de componentes mecánicos destinados a la industria automotriz.

La pieza presenta una geometría parcialmente axisimétrica, ver las imágenes de la figura 4.30. Las dimensiones geométricas nominales de la cámara inicial (previa a la compactación) y de la pieza ya compactada se pueden observar en las figuras 4.31 y 4.32, donde se encuentran convenientemente acotadas.

Las herramientas que se utilizan en el proceso industrial de la pieza estudiada son: la matriz, que delimita las caras planas laterales y la cara curva exterior de la pieza, el

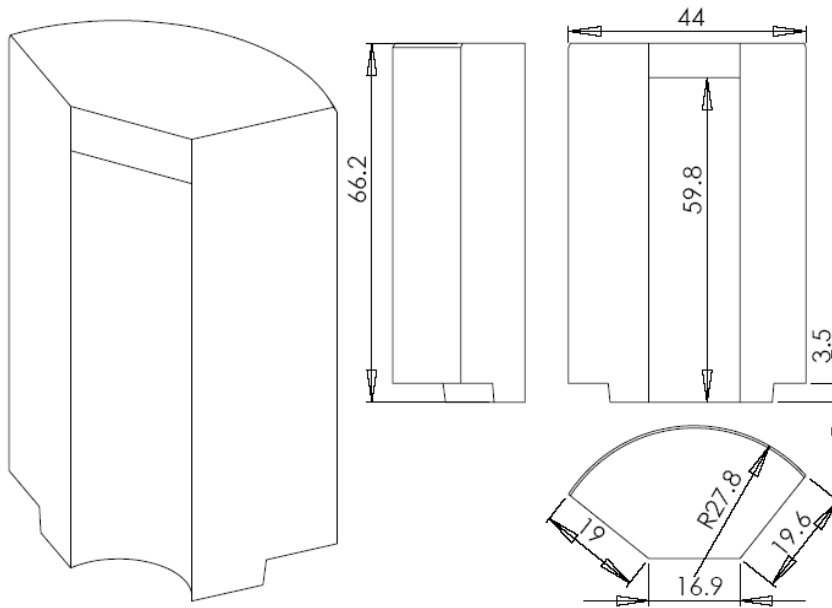


Figura 4.31: Pieza mecánica industrial - Cámara inicial

noyo, que define la cara curva interior de la pieza y contiene su eje de revolución, el punzón superior y el punzón inferior, que llevan a cabo la compactación axial de la pieza. El punzón inferior presenta dos niveles planos que generan un escalón en la parte inferior de la pieza, mientras que la matriz se cierra en la zona interior (próxima al eje), de forma que delimita la cara plana superior interna de la pieza.

El análisis de la distribución de densidades se realiza por medio del estudio experimental de la pieza compactada por zonas. Es decir que una vez que la pieza es compactada utilizando la cinemática descrita, se secciona en zonas y se mide experimentalmente en el laboratorio, por el método de pesado e inmersión, la masa y el volumen medios de cada una de las partes. La figura 4.33 demuestra de manera esquemática la división por zonas y las dimensiones de la pieza industrial. Adicionalmente, en la tabla 4.4 se detalla el valor de las dimensiones y de las densidades iniciales y finales de la pieza como así también el tiempo total ocupado por el proceso.

El análisis del proceso de compactación llevado a cabo se divide en dos partes, una en la que se consideran las herramientas y la matriz como rígidos y otra en la que se consideran como deformables. En ambos casos, la compactación se realiza mediante una combinación cinemática entre los punzones superior e inferior que se divide en tres etapas. Los valores asignados a cada una de las etapas para ambos estudios figuran en las tablas 4.5 y 4.6. Cabe destacar que para lograr las dimensiones finales de la pieza industrial en el caso donde se utilizan punzones deformables, es necesario aplicar una corrección para compensar el efecto de la deformación de las herramientas. Dicha corrección se obtiene teóricamente al calcular la deformación de las herramientas por medio de la teoría de

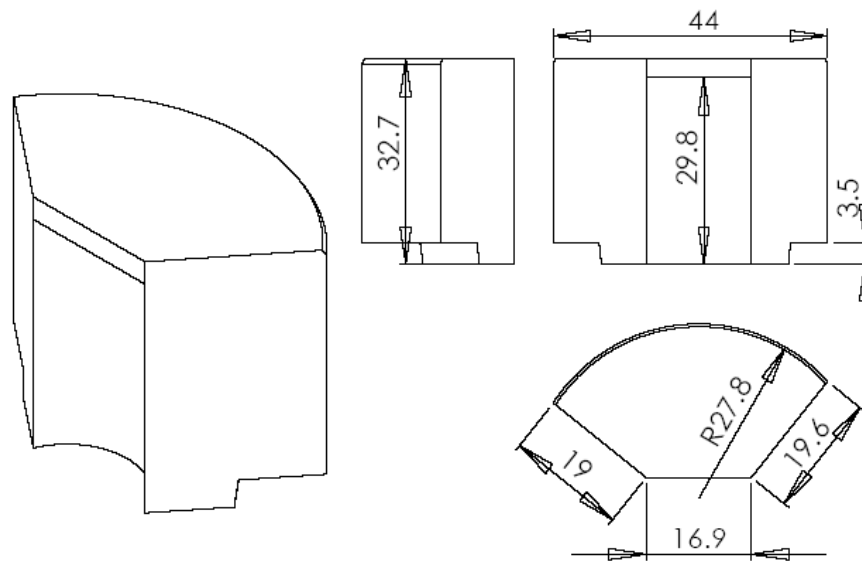


Figura 4.32: Pieza mecánica industrial - Cámara final

Dimensión	Inicial	Final [mm]
Ho [mm]	66.2	32.7
Hp [mm]	3.5	3.5
Hv [mm]	6.35	2.925
R1 [mm]	3.34	3.34
R2 [mm]	9.08	9.08
R3 [mm]	18.04	18.04
R4 [mm]	27.8	27.8
Densidad [gr/cm^3]	3.2655	6.86
Tiempo [s]		1.66

Cuadro 4.4: Dimensiones geométricas y densidades inicial y final, tiempo total

la elasticidad, y tiende a exigir mayores desplazamientos de los punzones en el mismo sentido de la compactación, ver la última fila de la tabla 4.6.

En cuanto a la fricción, dicho fenómeno sólo se considera a los fines del presente estudio, en la interacción del material en polvo con la matriz y con las demás herramientas, y se desprecia su efecto entre la matriz y las herramientas o entre ellas entre sí. No obstante, resulta importante advertir que tanto la metodología como los modelos desarrollados en el trabajo, permiten potencialmente introducir fenómenos de fricción y hasta de engrane entre las herramientas, sin embargo dichos temas se dejan para ser objeto de estudios futuros.

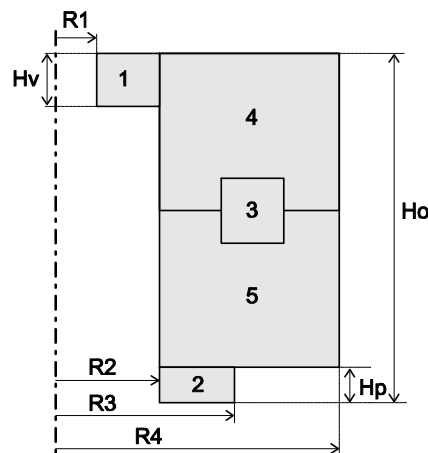


Figura 4.33: Esquema de las zonas de análisis de la densidad media y dimensiones de la pieza industrial

Etapa del Proceso	Desp. Punzón Sup. [mm]	Desp. Punzón Inf. [mm]
1	-2.1	0.0
2	-0.0	17.9292
3	-1.325	12.0528

Cuadro 4.5: Cinemática de fabricación de la pieza industrial - herramientas rígidas

4.4.4. Aspectos del modelo numérico

El modelo numérico utilizado es 2D y se asume la hipótesis de que la pieza es completamente axisimétrica, lo cual resulta válido en función de las características geométricas antes discutidas. Las propiedades de los materiales correspondientes a los parámetros del elastoplástico son las que figuran en el cuadro 4.7, mientras que las propiedades mecánicas de la matriz y de las herramientas (utilizadas cuando se consideran deformables), se presentan en el cuadro 4.8.

Otra hipótesis importante que se asume es que la distribución inicial de densidades es homogénea en toda la pieza, lo cual es válido a la luz de que no existen mediciones experimentales que permitan asignar un campo inicial de densidades o bien sirvan para

Etapa del Proceso	Desp. Punzón Sup. [mm]	Desp. Punzón Inf. [mm]
1	-2.1	0.0
2	-0.0	17.9292
3	-1.5046	12.371
Corrección Etapa 3	-0.1796	0.2586

Cuadro 4.6: Cinemática de fabricación de la pieza 6091 - herramientas deformables

Propiedad	Magnitud
Módulo de Young - E [MPa]	0.1
Coef. Poisson - ν	0.3
Fricción interna - b_1	2.2
Cohesión - b_2	10E-06 MPa
Eje principal de la elipse - s_1 [MPa]	$0,0075(\bar{\eta}\rho_{ref})^{5,2}$
Relación de aspecto de la elipse - s_2	1
Factor de regularización DP - γ	0.9
Factor de regularización Ellipse - ξ	0.9

Cuadro 4.7: Propiedades del material pertenecientes al modelo constitutivo

Herramienta	E [MPa]	ν	ρ [gr/cm ³]
Punzones	210000	0.3	7.85
matriz - Noyo	461000	0.25	12.9

Cuadro 4.8: Propiedades mecánicas de la matriz y de las herramientas

corroborar un hipotético ensayo de llenado previo¹⁶.

Las discretización espacial utilizada en la compactación de la pieza bajo análisis corresponde a 4500 partículas, mientras que la discretización temporal aplicada a ambos casos es la que se muestra en el cuadro 4.9.

4.4.5. Resultados numéricos y experimentales

Como se mencionó oportunamente, se estudian dos casos diferentes, uno con herramientas rígidas y el otro con herramientas deformables. A continuación se presentan los resultados de ambos casos.

Caso 1) Herramientas rígidas

En el caso donde las herramientas son rígidas, la cinemática de punzones coincide con la teórica y no es necesario introducir ninguna corrección. Por lo tanto las dimensiones

¹⁶Dado que no existen datos acerca de la distribución inicial de densidades, y con el objeto de desacoplar fenómenos y procesos, se opta por utilizar una distribución inicial de densidades en lugar de llevar a cabo un llenado previo.

Etapas del Proceso	Tiempo [s]	Nº de Incementos
1	0.25	100
2	1.16	350
3	0.25	250

Cuadro 4.9: Discretización temporal

finales de la pieza son exactamente las definidas inicialmente y lo que resta por analizar es la distribución de densidades media global y por zona. En la figura 4.34 se puede observar el campo de densidades finales que resultan de la compactación de la pieza con herramientas rígidas. Se advierten algunos puntos singulares de concentración de densidad, algunos atribuibles a la propia discontinuidad geométrica de la pieza (zonas superior interna y externa), mientras que otros que se propagan a lo largo de una mayor extensión, pueden deberse a la presencia de fuerzas de fricción elevadas (escalón de la zona inferior). La densidad media global es de $6,85 \text{ gr/cm}^3$, mientras que las densidades por zonas numéricas y experimentales que resultan son las que se observan en el cuadro 4.10. De las densidades por zonas se puede notar un buen acuerdo general entre los valores numéricos y los experimentales, sin embargo se observan algunas diferencias en las zonas 1, 2 y 5 (la zona 3 es consecuencia de las zonas 4 y 5). Tal diferencia indica que en el resultado numérico existe menos material en las zonas 2 y 5 y más material en la zona 1 que en las mediciones experimentales. Dicha diferencia puede ser atribuida a que ambos ensayos, el numérico y el experimental, no partieron de la misma distribución de densidades, lo cual terminó aumentando la discrepancia inicial.

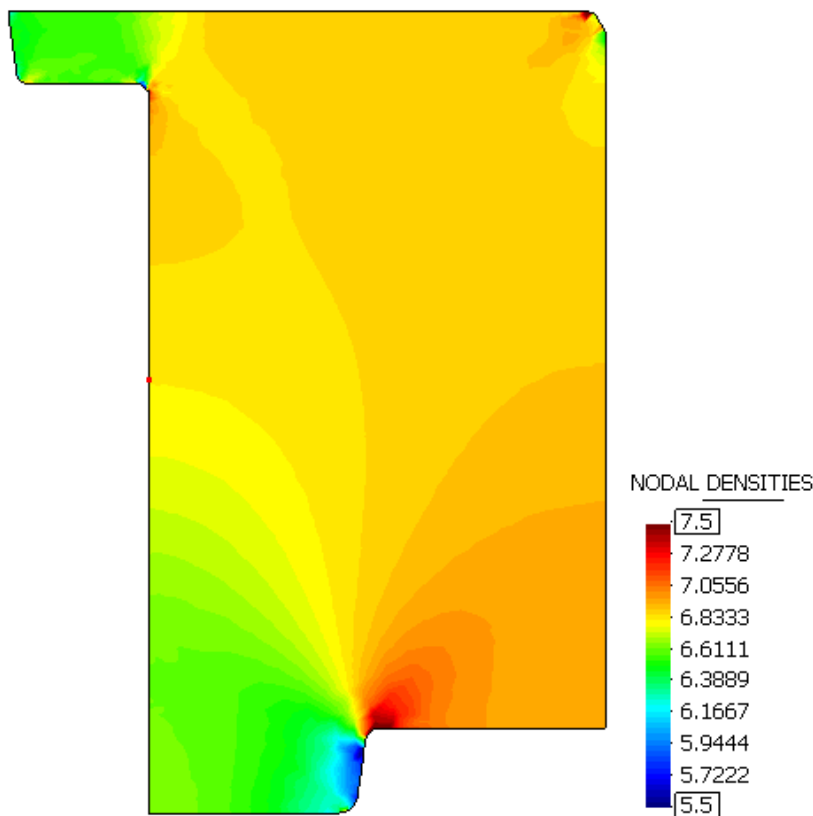


Figura 4.34: Distribución de densidades finales para la pieza 6091 con herramientas rígidas

Zona	Dens. Exp. [gr/cm^3]	Dens. Numérica [gr/cm^3]
1	6.57	6.78
2	6.89	6.83
3	6.73	6.81
4	6.86	6.84
5	6.95	6.86

Cuadro 4.10: Densidades por zonas numéricas y experimentales - caso 1 (herramientas rígidas)

Caso 2) Herramientas deformables

Cuando se tienen herramientas deformables, la cinemática tiene que ser corregida a fin de obtener las dimensiones correctas en la pieza compactada, tal como se ha hecho en la tabla 4.6 del apartado precedente. Esto ocurre en la práctica durante el inicio de la producción industrial de una nueva pieza, donde se parte de unos valores cinemáticos teóricos y de una estimación de deformaciones de las herramientas, luego se van corrigiendo mediante un proceso de prueba y error, los desplazamientos impuestos en los punzones hasta alcanzar las dimensiones buscadas.

En la figura 4.35 se presenta la distribución de densidades, donde se vuelven a advertir algunas zonas con valores de densidades puntualmente más altos o más bajos que en el promedio, que tienden a ser en magnitud y ubicación, prácticamente coincidentes a los del caso 1). Nuevamente, tales singularidades se atribuyen a las propias geométricas de la pieza, donde se inducen a raíz del movimiento de los punzones mayores acumulaciones o salidas de material.

Con respecto a los valores de las densidades, la global es de $6,853 \text{ gr/cm}^3$, mientras su valor por zonas viene dado en el cuadro 4.11. En él se observa que la densidad media de la zona 1 disminuye levemente acercándose más al valor experimental, en la zona 2 permanece prácticamente sin cambios y en la zona 3 disminuye considerablemente, quedando a cuatro décimas de su valor experimental. En cuanto a la zona 4, la densidad media coincide con la del caso 1 y la de la zona 5 aumenta levemente.

Como conclusión se puede afirmar que la incorporación de herramientas deformables en lugar de rígidas, tiende a mejorar la distribución final de las densidades medias por zonas. Lo cual podría atribuirse a que las deformaciones diferenciales de las herramientas durante la compactación, permiten que el flujo de material en el interior del molde se encuentre menos restringido y que se logre una distribución del material más cercana a la realidad.

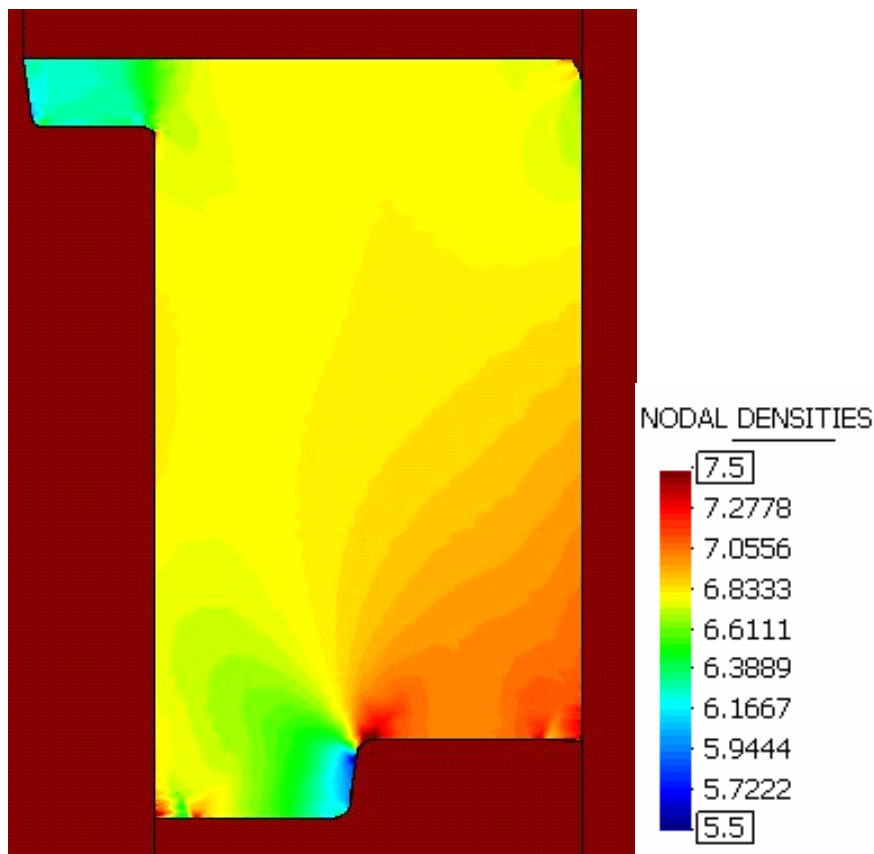


Figura 4.35: Distribución de densidades finales para la pieza 6091 con herramientas deformables

4.4.6. Recapitulación

En el presente capítulo se han aplicado: un modelo elastoplástico previamente utilizado en la simulación de procesos de compactación de pulvimetales [16], el modelo constitutivo de flujo desarrollado en este trabajo y la metodología de contacto ACIM, dentro del entorno del método PFEM, a varios de los procesos comprendidos por la pulvimetalurgia industrial. De los resultados obtenidos se pueden resaltar los siguientes comentarios y conclusiones:

- Es posible reproducir numéricamente y de forma cualitativa el proceso de llenado de moldes con materiales en polvo. A lo largo de tal proceso se logran identificar con una alta correspondencia, los patrones de flujo de material asociados a los datos experimentales existentes.
- La distribución de densidades en el interior del molde, una vez que este se encuentra lleno de material, puede ser caracterizada cualitativamente al identificar en los resultados numéricos, la existencia de zonas con mayor o menor presencia y dispersión de partículas. En zonas de gran dispersión se logran reconocer espacios vacíos que representan una densidad local muy baja y hasta la posible existencia de huecos de material en el seno del molde.

Zona	Dens. Exp. [gr/cm^3]	Dens. Numérica [gr/cm^3]
1	6.57	6.74
2	6.89	6.84
3	6.73	6.77
4	6.86	6.84
5	6.95	6.87

Cuadro 4.11: Densidades por zonas numéricas y experimentales - caso 2 (herramientas deformables)

- En los procesos de transferencia, es posible observar el transporte y el flujo de material durante la traslación de una cámara de control de volumen constante y predefinido. Del estudio de balances de masa local y global llevado a cabo se concluye que cuanto mayor es la dimensión transversal de la cámara transportada (ancho de los punzones que definen la cámara móvil), mayor es la eficiencia del proceso de transferencia. Por lo tanto, la curva de eficiencia del proceso de transporte resultante, permite optimizar el diseño de los procesos de transporte y transferencia de polvos en el interior de moldes y condiciona las dimensiones geométricas de las cámaras transportadas y de los punzones que impulsan el proceso.
- En el proceso de compactación, cuya simulación numérica goza de una mayor tradición, se ha utilizado un modelo constitutivo elastoplástico, ver [16][73][17]. De la simulación del proceso de se ha podido observar una alta correspondencia con respecto a los resultados experimentales, los cuales se centran específicamente en las distribuciones de densidades de la pieza compactada.
- El hecho de considerar herramientas deformables en el modelado numérico del proceso de compactación, permite ajustar la cinemática de los punzones de forma más realista en los procesos industriales. Por lo tanto, al considerar la influencia de la deformación de los punzones durante el proceso de compactación, es posible predecir más exactamente la distribución de densidades en la pieza ya compactada, lo cual redundaría en mayores posibilidades de lograr un diseño virtual óptimo del proceso industrial para cada geometría.

Apéndice A

Modelo Constitutivo de Flujo

A.1. Introducción

La existencia de materiales que presentan comportamientos físicos ambiguos, como son los materiales pulverulentos bajo diversas situaciones de carga, ofrecen serias dificultades en su definición, caracterización y modelado constitutivo. Dichos materiales tienen un comportamiento asimilable a un sólido cuando permanecen en reposo bajo una condición de equilibrio estático¹, mientras que se asemejan a un fluido cuando sus granos o conjuntos de estos experimentan desplazamientos relativos considerables entre sí (flujo de material). Ambas situaciones se presentan de forma frecuente en los procesos asociados a la pulvimetalurgia, cuyas fenomenologías se caracterizan por los grandes movimientos y deformaciones que experimentan las partículas de los materiales involucrados. Esto resulta evidente al considerar procesos tales como:

- Llenado de un molde, durante el cual el material que se encuentra en una tolva móvil se introduce en el interior de un molde como consecuencia de la acción de la gravedad o arrastrado por un flujo de aire.
- Transferencia, que conlleva al reposicionamiento de las partículas de material en el interior del molde por la acción del movimiento de los punzones.
- Compactación, durante la cual el material aumenta su densidad como consecuencia de la compresión ejercida por los punzones de una prensa.

Los materiales utilizados en tales procesos se caracterizan por presentar deformaciones elásticas casi despreciables [16], por lo que cada deformación experimentada por el material resulta ser irreversible. Dichas características permiten que esta clase de materiales sean concebidos, desde el punto de vista del modelado constitutivo, como fluidos no-newtonianos con un comportamiento cercano al de un rígido plástico [78]. En particular, con frecuencia han sido considerados en la bibliografía como fluidos de Bingham² [10][107][59]. Dichos fluidos presentan, a diferencia de los newtonianos, una tensión

¹Se hace referencia a un estado de equilibrio bajo la acción de cargas: gravitatoria por un lado y de interacción entre los granos que lo constituyen (fricción interna) por otro.

²El modelo de fluido de Bingham pertenece a la variedad de los no-newtonianos, es un modelo ampliamente utilizado por las industrias química y nuclear para predecir el comportamiento de una gran cantidad de pastas y suspensiones finas [11].

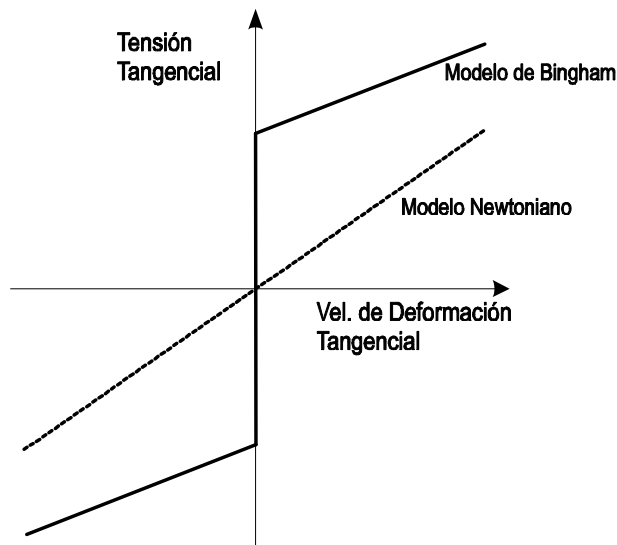


Figura A.1: Esquema general de los modelos de fluidos no newtonianos (Bingham) y newtonianos en el espacio tensión-deformación incremental

umbral que caracteriza su comportamiento rígido plástico a partir de la cual comienzan a deformarse con una determinada velocidad de deformación tangencial, ver el esquema de la figura A.1.

Los materiales que responden a un comportamiento rígido-plástico, en el que las deformaciones plásticas son casi coincidentes con las totales, permiten establecer una analogía exacta entre las ecuaciones que rigen la teoría de la elasticidad infinitesimal no lineal y un modelo rígido plástico en general. En este tipo de modelos, las tensiones pueden ser expresadas en función de la velocidad de deformación tangencial [107]. La formulación resultante de esta reinterpretación de las ecuaciones provenientes la mecánica de sólidos, se denomina comúnmente formulación o modelo de flujo, de acuerdo con las referencias [78][3].

La simulación numérica de los procesos asociados a la pulvimetalurgia, que comprende los comportamientos mecánicos de los materiales previamente descritos, resulta ser especialmente compleja en el entorno general de los métodos numéricos estándares como el FEM, y en particular al aplicar modelos constitutivos pertenecientes a la plasticidad de sólidos. En consecuencia, se han desarrollado metodologías alternativas, en las que las partículas del material son modeladas como cuerpos discretos (DEM - Discrete Element Method) [54][88], y el comportamiento físico entre las partículas se define por medio de relaciones elásticas, disipativas (fricción seca y viscosa) y de contacto que fuerzan la interacción y la impenetrabilidad entre las mismas. Las ventajas de este tipo de metodologías vienen dadas por la simplicidad de las formulaciones constitutivas y de su implementación numérica. Las desventajas surgen de la gran cantidad de partículas o elementos discretos que son necesarios introducir en una simulación para que los resultados sean representativos del fenómeno físico y de la dificultad inherente a la caracterización y calibración de los parámetros asociados a las relaciones constitutivas.

Teniendo en cuenta dichas limitaciones se considera necesario desarrollar una solución que comprenda una metodología global (PFEM), que permita resolver el problema de los grandes desplazamientos y deformaciones presentes en este tipo de procesos, y un modelo constitutivo de medios continuos que sea capaz de reproducir el comportamiento físico de los materiales involucrados.

Los objetivos del presente apartado son los siguientes:

- Desarrollar una formulación constitutiva tendiente a modelizar el comportamiento de los materiales pulverulentos y granulares, en particular el de aquellos utilizados en la pulvimetalurgia. Para ello se presenta un modelo constitutivo de flujo dependiente del tiempo, encuadrado dentro de la teoría general de la plasticidad, que es capaz de reproducir el comportamiento del material en un amplio rango de situaciones físicas posibles, que van desde el flujo casi fluido a bajas densidades, durante los procesos de llenado de moldes y transferencia, hasta la deformación de un sólido cuando el material se encuentra en proceso de consolidación o ya compactado.
- Exponer el desarrollo y la implementación del modelo dentro del entorno de la metodología PFEM, cuyas propiedades y características han sido descritas en capítulos previos.

El apartado está organizado de la siguiente forma, en primer lugar se desarrolla en detalle la formulación constitutiva, haciendo énfasis en la interpretación fenomenológica del modelo. Allí se definen las funciones potenciales y de fluencia que forman parte del mismo y se describen las reglas de flujo utilizadas en cada uno de los posibles casos de carga. Posteriormente, se presentan la metodología de integración de la ecuación constitutiva y los algoritmos utilizados en su implementación. Finalmente, se desarrolla la calibración de los parámetros característicos del modelo constitutivo y del modelo de fricción (modelo de Northon-Hoff). Para ello se utilizan un conjunto de ensayos numéricos específicos para cada uno de los parámetros analizados.

A.2. Formulación constitutiva

Para llevar a cabo el desarrollo del modelo constitutivo se describen en primer lugar los aspectos y las variables que caracterizan la fenomenología y el comportamiento físico de los materiales granulares y pulverulentos utilizados en la pulvimetalurgia. Más tarde se presentan los componentes teóricos y matemáticos que integran al modelo constitutivo, intentando poner en evidencia en todo momento el paralelismo existente entre la formulación del modelo de flujo y la fenomenología que se intenta describir.

A.2.1. La densidad como variable fenomenológica del material

Como se ha podido advertir en el apartado precedente, un indicador físicamente medible de los diferentes estadios por los que atraviesa el material, y que es de relevancia en el modelado constitutivo, es la densidad. Esta, guarda una estrecha relación con el aumento de la resistencia del material granular o en polvo, de forma que cuando la densidad aumenta, también lo hacen sus propiedades mecánicas.

El análisis de los procesos asociados a la pulvimetalurgia y su relación directa con la densidad del material en cada uno de ellos, presenta las siguientes características:

- Durante los procesos de *llenado de moldes*, la densidad del material permanece prácticamente constante. Esto en general es así en la mayor parte del material, con excepción de las pequeñas porciones del mismo donde se producen aumentos locales y puntuales de la densidad como consecuencia del impacto del material con el molde. Este fenómeno se observa cuando el polvo fluye, y cae desde el cargador hacia el interior del molde. Durante dicho proceso, el material impacta contra los contornos del molde, de forma que la energía cinética adquirida durante la caída se disipa por deformación plástica con el consecuente aumento local de la densidad del material.

Las tensiones dominantes durante el proceso de llenado son las de cizalladura, ya que las diferentes capas de granos del material deslizan unas sobre otras. La única fuerza interna que se opone a dichas cargas es la fricción intergranular, que depende de las propiedades físicas del material y de la presión hidrostática traducida en fuerzas normales de contacto entre los granos. Por lo tanto, cuando prevalece un comportamiento dinámico en el material, luego de que las cargas externas de cizalladura desequilibran a la internas de fricción intergranular para una determinada densidad del material, prevalece en el mismo un régimen de flujo que se asemeja en gran medida a un fluido.

Debe notarse que en este proceso, la mayor parte de la deformación del material en polvo es plástica, sin embargo el aumento generalizado de la densidad sólo se produce en aquellos procesos en los que se aplica una cantidad considerable de energía sobre el material, en forma dinámica (impacto) o en forma cuasi-estática (compactación) donde se reduce de manera forzada el volumen que lo contiene.

- Los procesos de *transferencia*, que son previos a los de compactación, implican el reposicionamiento del material dentro de molde. Dichos procesos son, en la mayoría de los casos, isócoros. No tienen por objeto un aumento de densidad en el material, sino que buscan homogeneizar la distribución de la masa dentro del molde por medio del movimiento de las partículas, a fin de facilitar la posterior compactación cuando se tienen geometrías complejas. Por lo tanto, la densidad del material permanece casi constante durante los procesos de transferencia, a excepción de los efectos locales que se producen como consecuencia del movimiento de los punzones sobre ciertas *zonas singulares* del material.

En los procesos de transferencia, las tensiones que prevalecen son de cizalladura, al igual que para el proceso de llenado. Sin embargo, las diferencias existentes son debidas al mayor nivel de tensiones volumétricas que son propias del proceso y que tienden a impedir el libre flujo de las partículas de material, generando un flujo confinado de material en el interior del molde.

- La *compactación* de los pulvimateriales es un proceso que tiene como objetivo el aumento de la densidad del material, lo cual se logra mediante la reducción en el volumen de una cámara inicial llena de material. El incremento de la densidad produce el aumento de la cohesión intergranular, la mejora de sus propiedades mecánicas, y por ende el endurecimiento del material. Por lo tanto, la densidad evoluciona de forma paralela con las propiedades mecánicas, lo que la transforma en un indicador fenomenológico del estado mecánico del material.

Durante la compactación, las cargas que caracterizan al proceso son volumétricas. Para el caso ideal, donde se supone que sólo se produce una reducción en el volumen

sin cambio de forma o sin distorsión del material, no se genera fricción sino que se incrementan las áreas de contacto entre las partículas. Dicho incremento de la superficie de contacto, puede ser la explicación del hecho de que a medida que se reduce el volumen de material se incrementan las fuerzas que son necesarias para seguir aumentando su densidad.

A.2.2. Análisis de la densidad material

Como se comentó anteriormente, la densidad material juega un papel muy importante en la formulación de las diferentes fases de los procesos pertenecientes a la pulvimetalurgia. Sin embargo, para el análisis de la densidad material es necesario tener en cuenta también otros conceptos como los que se presentan a continuación.

Por lo general, resulta más conveniente expresar la densidad de manera relativa con respecto a un determinado valor de referencia. La densidad relativa se define a partir de la siguiente relación [16][98]:

$$\eta(\mathbf{x}, t) := \frac{\rho_t(\mathbf{x}, t)}{\rho_{ref}} \quad (\text{A.1})$$

donde $\rho_t(\mathbf{x})$ y ρ_{ref} son la densidad aparente del punto \mathbf{x} en el instante t y la densidad del material sólido ya compactado o consolidado respectivamente. El significado físico de la densidad ρ está asociado a la relación masa-volumen del material poroso definida como:

$$\rho = \frac{\text{masa total}}{\text{volumen total}} \quad (\text{A.2})$$

donde ($\text{masa total} = \text{masa huecos} + \text{masa mat sólido}$) y ($\text{vol total} = \text{vol huecos} + \text{vol mat sólido}$). La misma relación se diferencia, para los siguientes casos:

1. Densidad aparente: ρ_t , cuando existen en el material huecos o vacíos ($\text{vol huecos} > 0 \Rightarrow \text{vol total} = \text{vol huecos} + \text{vol mat sólido}$).
2. Densidad de referencia: ρ_{ref} , cuando no hay presencia de huecos en el material ($\text{vol huecos} = 0 \Rightarrow \text{vol total} = \text{vol mat sólido}$).

Obviamente, la densidad aparente depende del punto de análisis y del instante de tiempo considerado, mientras que la densidad de referencia indica una situación de material totalmente compactado que no depende del punto en el espacio y del tiempo, se trata de una situación ideal de compactación total.

A partir del principio de conservación de la masa, la evolución de la densidad se puede describir en su forma espacial como:

$$\dot{\rho} + \rho \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{A.3})$$

donde $\rho(\mathbf{x}, t)$ representa la densidad material y \mathbf{v} la velocidad espacial. En su forma material, el principio de conservación de masa se puede expresar como [9]:

$$\rho_t := \frac{\rho_0}{\text{Det } \mathbf{F}} \quad (\text{A.4})$$

donde \mathbf{F} representa al tensor gradiente material de la deformación.

En el modelo propuesto, la evolución de la densidad se expresa por medio de la segunda descripción expuesta con un formato de densidades relativas, de acuerdo con:

$$\eta_t := \frac{\eta_0}{\text{Det } \mathbf{F}}.$$

Observaciones

- Como consecuencia de la aplicación de cargas, a medida que el material se consolida, $\eta \rightarrow 1$ y el volumen de huecos tiende a anularse.
- Teniendo en cuenta los aspectos fenomenológicos antes descritos, la densidad relativa η y su evolución durante la consolidación del material, se presenta como un parámetro capaz de reflejar numéricamente el comportamiento físico del material. Por lo tanto, esto permite considerarla como una variable íntimamente relacionada con el control del endurecimiento del material.

A.2.3. La máxima densidad histórica como variable interna

Así como la densidad relativa representa un indicador directo del estado mecánico del material, se define a la variable máxima densidad relativa histórica $\bar{\eta}$ a fin de introducir en el modelo constitutivo la irreversibilidad en la evolución de las propiedades mecánicas del material. Dicha variable se define mediante la siguiente expresión:

$$\bar{\eta}(\mathbf{x}, t) := \text{máx } \eta(\mathbf{x}, \tau) \text{ con } 0 \leq \tau \leq t \quad (\text{A.5})$$

que depende del punto y del tiempo en el que se lleva a cabo el análisis, y como se observa en la figura A.2, $\bar{\eta}$ es una variable interna irreversible que le otorga al modelo la capacidad de conservar el valor de la resistencia del material adquirida mediante un determinado proceso de cargas, reflejado en el incremento neto de la densidad material.

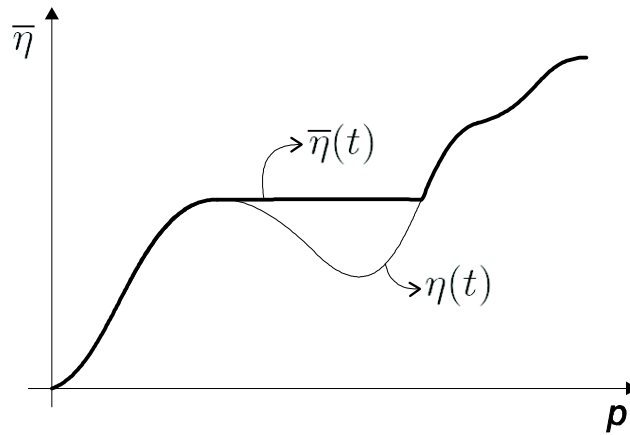


Figura A.2: Curvas típicas de evolución de las variables densidad relativa y máxima densidad relativa en función de la tensión media para un determinado punto \mathbf{x}

Observación

- La variable interna $\bar{\eta}$ es utilizada en el modelo constitutivo de flujo como un parámetro de endurecimiento que controla la evolución de las superficies de fluencia durante los

diferentes estados por los que pasa el material cuando es sometido a diferentes tipos de cargas.

A.2.4. Relación cinemática - Velocidad de deformación

Por lo general, en los modelos constitutivos de flujo es posible establecer una relación funcional entre las tensiones y la velocidad de deformación. Dicha relación, encierra una analogía conceptual entre un modelo constitutivo de flujo que describe el comportamiento de un sólido y un típico modelo de fluidos [107]. En consecuencia, y como punto de partida para la descripción del modelo propuesto, es necesario definir una relación cinemática que involucre a la velocidad de un determinado punto del material. La relación que habitualmente se utiliza para ello, corresponde a la parte simétrica del tensor gradiente espacial de la velocidad, el cual es un tensor de 2^{do} orden comúnmente denominado tensor velocidad de deformación [65], que se define como:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) := \nabla^s [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{A.6})$$

en donde $\nabla^s(\cdot) = \frac{1}{2} [(\cdot) \otimes \nabla + \nabla \otimes (\cdot)]$ es el operador gradiente simétrico, mientras que $\mathbf{v}(\mathbf{X})$ es el vector velocidad en un determinado punto $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$. Dicha velocidad se relaciona con su expresión material según: $\mathbf{V}(\mathbf{X}, \mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) = \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{X}, t), t)$.

Descomposición aditiva de la velocidad de deformación

La velocidad de deformación analizada desde el enfoque de la plasticidad en grandes deformaciones, admite la descomposición aditiva en una parte elástica o recuperable y otra plástica o irre recuperable [69].

Dicha descomposición puede expresarse por medio de la siguiente relación:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{d}^e(\mathbf{x}, t) + \mathbf{d}^p(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.7})$$

donde $\mathbf{d}^e(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{d}^p(\mathbf{x}, t)$ representan la parte elástica y plástica respectivamente de la velocidad de deformación $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ en el punto \mathbf{x} e instante t , [9].

Lo expuesto previamente en la introducción del apéndice, pone de manifiesto que en el caso del polvo metálico las deformaciones recuperables son despreciables. En consecuencia, para que la formulación del modelo refleje el comportamiento físico del material, es necesario asumir la hipótesis de que la parte elástica o recuperable de la velocidad de deformación es prácticamente nula, $\mathbf{d}^e(\mathbf{x}) \approx \mathbf{0}$. O análogamente, que la velocidad de deformación total es cuasi-coincidente con la componente plástica, lo cual se expresa como:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{d}^p(\mathbf{x}) \quad (\text{A.8})$$

A.2.5. Funciones de fluencia

Con los modelos de flujo en general y en el que se propone aquí en particular, la función de fluencia delimita, en el espacio de las tensiones principales y más estrictamente en el plano $p-q$, los estados tensionales inactivos de los estados tensionales activos que inducen el flujo de material. Dependiendo ello de la distancia del vector de flujo correspondiente.

En el caso del polvo metálico, y continuando con los trabajos previos [16][73] la función de fluencia propuesta consta de dos superficies distintas en el plano $p - q$. La primera correspondiente a una elipse centrada, permite controlar mediante dos parámetros el incremento de la resistencia del material. La segunda es una superficie del tipo Drucker-Prager por medio de la cual se desea controlar el flujo del material a bajas densidades.

- *Función de fluencia de tipo Drucker-Prager con flujo plástico no asociado de tipo desviador*: esta superficie refleja un comportamiento físico de flujo, por el cual el material se asemeja a un fluido. Además reproduce, de forma macroscópica, la existencia de fuerzas internas de cohesión que pone de manifiesto la fenomenología de fricción intergranular que es inherente a los materiales friccionales, dentro de los cuales están clasificados los materiales en polvo. Ambos ingredientes logran que el material tenga el comportamiento ambivalente que lo caracteriza, es decir que si las fuerzas de cohesión y de fricción intergranular no son superadas por una fuerza antagonista, el material permanece en equilibrio estático, y por tanto inmóvil. En caso contrario, si la resultante de fuerzas rompe el equilibrio estático, situación a la que se llega cuando el estado tensional alcanza el valor límite definido por la superficie de fluencia, el material fluye como un fluido. Cabe destacar que dicho límite determinado por la superficie de Drucker-Prager no es constante, tal como podría pensarse en el caso de un fluido newtoniano de baja viscosidad como el agua en condiciones normales, sino que es una función lineal del estado de carga hidrostático al que se encuentra sometido el material. Esto se traduce físicamente en que cuanto mayor es la presión volumétrica compresiva aplicada al material, mayor es la fuerza de cohesión y de fricción interna intergranular, y por lo tanto más grande debe ser la fuerza antagonista que rompa el equilibrio estático del material. La pendiente que rige el crecimiento de los estados tensionales límites en una superficie de fluencia de Drucker-Prager, suele estar íntimamente asociada al comúnmente denominado ángulo de rozamiento interno, que es un parámetro típico de los materiales friccionales. Finalmente, puede agregarse que el flujo totalmente desviador garantiza la incompresibilidad del material bajo un rango previamente establecido de cargas volumétricas, por lo tanto, las únicas deformaciones admisibles dentro del radio de acción de la superficie de Drucker-Prager, son de deslizamiento y surgen como consecuencia de cargas de cizalladura o corte.
- *Función de fluencia de tipo casquete elíptico (elipse centrada en el origen) con flujo plástico asociado*: mediante esta superficie se controla el incremento de la resistencia del material debido al trabajo en frío realizado durante el proceso de compactación. Para ello, la dirección del flujo plástico resultante tiene una componente en menor o mayor medida volumétrica, por lo que los estados tensionales que se sitúan sobre la superficie tienden a modificar la densidad del material, y en particular, a aumentarla. El grado de compresibilidad de los materiales en polvo no es constante, sino que depende directamente de la densidad del material. Es decir que, tal como lo indica la experiencia práctica, la presión necesaria para comprimir a un material que se encuentra a baja densidad es menor que la que se necesita para reducir su volumen cuando este se encuentra a mayor densidad. Esta evidencia física se refleja en una dependencia directa entre las propiedades geométricas del casquete elíptico, que evolucionan durante el proceso de compactación del material, y de forma paralela a su densidad. La relación funcional entre la densidad y la propiedad geométrica de la

elipse que representa el endurecimiento del material, debe estar correlacionada con la curva de compresibilidad típica que lo caracteriza.

Superficie de Drucker-Prager

El criterio de fluencia de Drucker-Prager puede ser considerado como la resultante de una aproximación regularizada del criterio de Mohr-Coulomb y como una generalización del criterio de Von Mises destinada a incluir la incidencia de la presión en el modelo [74]. Por tal razón, los parámetros que alimentan a dicho modelo son el primer invariante del tensor de tensiones \mathbf{I}_1 y el ángulo de rozamiento interno α para incluir los efectos de las cargas volumétricas o hidrostáticas, y el segundo invariante del tensor desviador de tensiones \mathbf{J}_2 para considerar los efectos de las cargas de cizallamiento.

La función de fluencia de Drucker-Prager, que establece una línea de estados críticos o superficie de fallo [31], puede ser escrita en el espacio de tensiones³ $p - q$ como:

$$\phi_1(\boldsymbol{\tau}, \bar{\eta}) = \|\text{dev } \boldsymbol{\tau}\| + b_1(\bar{\eta}) \frac{\text{Tr } \boldsymbol{\tau}}{3} - b_2(\bar{\eta}) \quad (\text{A.9})$$

$$= q + b_1(\bar{\eta}) p - b_2(\bar{\eta}) \quad (\text{A.10})$$

donde $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff, $q = \|\text{dev } \boldsymbol{\tau}\|$ es la norma del tensor desviador de tensiones y los parámetros b_1 y b_2 son característicos del material y se definen a partir de su caracterización experimental. El parámetro $b_1 = \tan(\alpha)$ representa el ángulo de fricción interna, mientras que b_2 indica dos aspectos del comportamiento mecánico del material. Uno inmediato, que caracteriza las tensiones de corte (componente desviadora) que el material es capaz de admitir sin que se produzca deslizamiento en ausencia de presión (componente volumétrica nula). El otro aspecto, indica la máxima cohesión existente entre los granos del material, es decir la máxima resistencia del material ante tracciones, ver la fig. A.3.

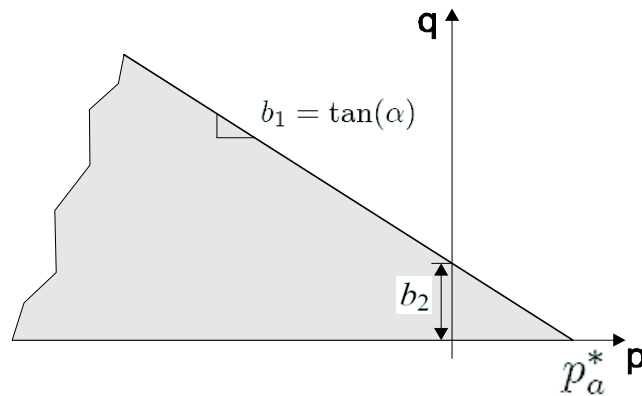


Figura A.3: Función de fluencia de tipo Drucker-Prager perteneciente al modelo de flujo y espacio de tensiones admisibles abierto

³Se consideran las siguientes definiciones: $p = \frac{\mathbf{I}_1}{3}$ y que $q = \sqrt{2\mathbf{J}_2} = \sqrt{2\tau_{ij}\tau_{ij}}$

Observación

- El criterio de fluencia se cumple con la condición $\phi_1 = 0$, que sitúa a los puntos que representan un estado tensional general ($\phi_1(\boldsymbol{\tau}, \eta) \geq 0$), sobre la superficie de fluencia. De manera inversa, la condición $\phi_1 < 0$ indica que los estados tensionales involucrados no inducen un proceso de flujo en el material.

Superficie elíptica - casquete elíptico

El espacio de tensiones admisibles se cierra en la zona de las presiones de compresión (negativas) por medio de un casquete elíptico, de acuerdo a lo que se puede observar en la figura A.4. La estrategia de considerar un espacio definido por una superficie del tipo Drucker-Prager cerrado por un casquete, a fin de capturar el comportamiento compresivo, es frecuentemente utilizado en el modelado de materiales granulares. Tal afirmación se demuestra en los conceptos y formulaciones que se encuentran en referencias como: [30] [32] con aplicaciones pertenecientes a la mecánica de suelos y [17][18] con aplicaciones relativas a procesos de pulvimetalurgia.

La función de fluencia elíptica se define, al igual que la de Drucker-Prager, en el plano $p - q$ como:

$$\phi_2(\boldsymbol{\tau}, \bar{\eta}) = \|\text{dev } \boldsymbol{\tau}\|^2 + \frac{s_2^2(\bar{\eta})}{2} \left[\frac{\text{Tr } \boldsymbol{\tau}}{3} \right]^2 - [s_1(\bar{\eta}) s_2(\bar{\eta})]^2 \quad (\text{A.11})$$

$$= q^2 + \frac{s_2^2(\bar{\eta})}{2} p^2 - [s_1(\bar{\eta}) s_2(\bar{\eta})]^2 \quad (\text{A.12})$$

donde $s_1(\bar{\eta}) := r_1(\bar{\eta})$ es el radio principal de la elipse, $s_2(\bar{\eta}) := \frac{r_2(\bar{\eta})}{r_1(\bar{\eta})}$ es la relación de aspecto de la elipse y $p_b^* \leq 0$ es el punto sobre el eje p de las presiones medias de compresión donde se proyecta verticalmente la intersección entre las funciones de Drucker-Prager y de la elipse, ver la figura A.4. Los parámetros s_1 y s_2 dependen directamente de la variable interna $\bar{\eta}$, y cada uno de ellos presenta una ley de evolución de acuerdo a la caracterización mecánica del material tratado.

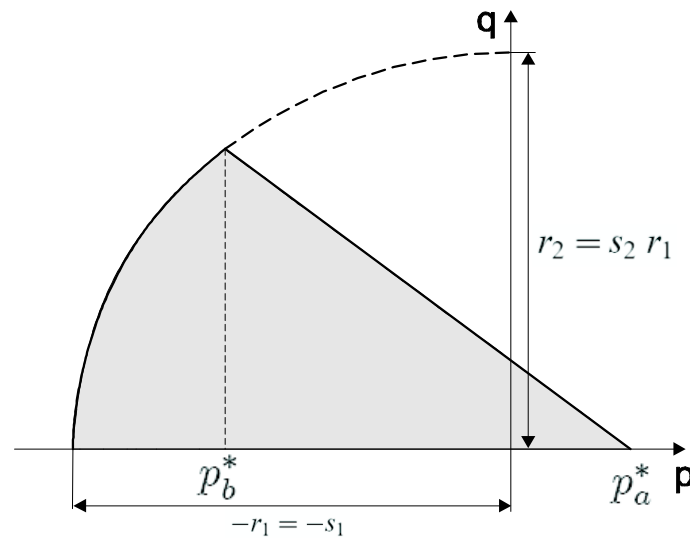


Figura A.4: Esquema del espacio de tensiones admisibles, delimitado por la superficie de Drucker-Prager y el casquete elíptico

Observaciones

- Los parámetros $r_1(\bar{\eta}) = s_1$ y $r_2(\bar{\eta}) = s_2 r_1$ hacen referencia a los que son propios de una elipse centrada en el origen de coordenadas del plano $p - q$, es decir a sus semiejes mayor y menor respectivamente.
- Las diversas combinaciones de valores de r_1 y r_2 definen geoméricamente la excentricidad de la elipse, lo cual desde un punto de vista físico, se traduce en una variación de la dirección y magnitud de los vectores de flujo plástico y de los límites de fluencia del material para cada valor de $\bar{\eta}$. De forma tal que a medida que crece $\bar{\eta}$, lo hace la excentricidad de la elipse, haciéndose cada vez más plana y tendiendo a una función de fluencia del tipo de Von Mises, que es propia de un material metálico, sólido, incompresible y consolidado.

A.2.6. Regla de flujo

La similitud que se intenta establecer entre los comportamientos físicos de los materiales sólidos pulverulentos y los fluidos se materializa, tanto conceptual como matemáticamente, en la descripción cinemática de ambos fenómenos por medio de la velocidad de deformación. Sin embargo, debido a que es necesario definir una relación constitutiva de sólidos entre la tensión y la velocidad de deformación, se recurre para ello al bagaje conceptual de la teoría de la plasticidad.

Sobre la base de dicha teoría, la relación entre la velocidad de deformación plástica y las tensiones viene dada mediante la adopción de una regla de flujo, que puede ser asociada o no asociada, según se utilice para su cálculo a la propia función de fluencia o a una función potencial de flujo plástico. De manera general, el flujo plástico se define como:

$$\mathbf{d}^p := \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (\text{A.13})$$

donde $\dot{\lambda}$ es un escalar no negativo denominado multiplicador plástico o parámetro de consistencia, Φ es una función que depende de las tensiones y de un conjunto de variables internas \mathbf{q} que contienen la información histórica de deformaciones plásticas del material. En el caso de que Φ sea coincidente con la función de fluencia, se trata de un flujo plástico asociado, mientras que si no lo es, se denomina flujo plástico no asociado [63].

Por otra parte, tanto la superficie de fluencia como el parámetro de consistencia se encuentran regidos por las comúnmente denominadas condiciones de carga-descarga o de Kunh-Tucker [93], que se escriben de forma continua como:

$$\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\dot{\lambda} \phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{A.16})$$

donde la primera condición restringe la admisibilidad del estado tensional, la segunda mantiene la irreversibilidad de las variables plásticas y la última exige que si $\phi < 0$ entonces $\dot{\lambda} = 0$, limitando así la evolución de las variables plásticas. Adicionalmente, debe cumplirse la condición de persistencia $\dot{\lambda} \phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = 0$, [93].

Observaciones

- La primera condición impuesta por la ecuación A.14, representa en la formulación, la tensión umbral a partir de la cual se producen deformaciones plásticas en el material para un determinado estado de evolución de las variables históricas del modelo.
- En el caso particular del presente modelo de flujo aplicado a la descripción de materiales en polvo, y sobre la base de los aspectos fenomenológicos previamente discutidos, el conjunto de variables internas \mathbf{q} queda reducido a una única variable escalar, la densidad relativa máxima histórica, $\bar{\eta}(\mathbf{x}, t) \therefore \mathbf{q} \equiv \bar{\eta}$.
- El multiplicador plástico es el parámetro de la variable interna $\bar{\eta}$ que rige su evolución y le otorga su carácter irreversible.

A.2.7. Flujo plástico

Fujo plástico sobre la superficie de Drucker-Prager

El vector de flujo plástico controla de que forma se desarrollará el movimiento una vez que se active la superficie de fluencia. En el caso del Drucker-Prager, la evidencia experimental afirma que el movimiento se desarrolla sin que se produzcan variaciones importantes de volumen, o de manera equivalente de la densidad [31][32]. Esto pone de manifiesto que el vector de flujo debe tener sólo componente desviadora, lo cual impide cualquier cambio de volumen. La presencia de cualquier componente volumétrica produciría dilatación que se entiende como un incremento en el volumen bajo la acción de tensiones de cizalladura.

Durante el procedimiento de cálculo, algunos de los estados tensionales del dominio analizado podrían estar situados en la zona vecina al vértice de la superficie de Drucker-Prager. En este caso singular, puede darse el caso que el vector de flujo sea indeterminado, pero ante dicha situación se introduce una regularización del flujo en el vértice tal como se observa en la figura A.5. La zona de flujo regularizado se define en el intervalo: $0 < p < p_a^*$ cuyos valores se deben determinar.

Para valores de $p > P_a$, los vectores de flujo plástico se definen a partir de una superficie potencial de regularización de la forma:

$$\varphi_1(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2} \|\text{dev } \boldsymbol{\tau} + \langle p - p_a \rangle \mathbf{1}\|^2 \quad (\text{A.17})$$

donde $\langle \rangle$ son los paréntesis de Macaulay y p_a es un parámetro del modelo que indica el inicio de la zona regularizada, ver la figura A.5. El efecto producido por la superficie potencial en los vectores de flujo plástico es el de regularizar el vértice formado por la intersección de la superficie de Drucker-Prager y el eje de las presiones medias (zona dentro de la circunferencia punteada en la figura A.5). La regularización se basa en que la dirección de los vectores de flujo plástico en los alrededores del vértice ($p_a \leq p \leq p_a^*$), convergen radialmente hacia el centro definido por p_a , suavizando así la transición entre un flujo puramente desviador para $p \leq p_a$ y un flujo dilatante para $p \geq p_a^*$, (líneas punteadas en la figura A.5). Al mismo tiempo, la superficie potencial garantiza la continuidad de los vectores de flujo plástico entre las dos situaciones extremas antes referidas.

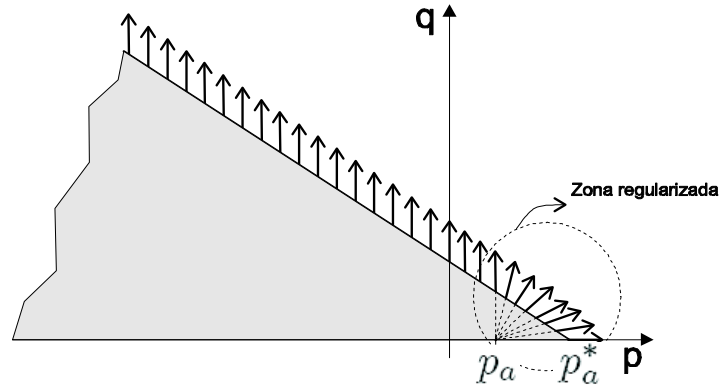


Figura A.5: Esquema de los vectores de flujo plástico sobre la superficie de Drucker-Prager y regularización de la zona de transición

El valor de p_a se calcula a partir de un factor de interpolación lineal γ , de la forma:

$$p_a = (1 - \gamma) \frac{b_2}{b_1} = (1 - \gamma) p_a^* \quad (\text{A.18})$$

donde $0 \leq \gamma \leq 1$, de modo que si $\gamma = 0 \Rightarrow p_a = p_a^*$ y si $\gamma = 1 \Rightarrow p_a = 0$, lo cual controla el grado de regularización ejercido por la función potencial de la ecuación A.17, que es máxima si $\gamma = 1$ y mínima si $\gamma = 0$.

La dirección del flujo plástico \mathbf{n}^{DP} para el intervalo ($p \leq p_a$) se define mediante una regla de flujo no asociada y totalmente desviador (ver la figura A.5) de la forma:

$$\mathbf{n}^{DP} = dev \boldsymbol{\tau} \quad (\text{A.19})$$

Para la zona regularizada ($p > p_a$), el vector de flujo plástico \mathbf{n}^{DP-reg} se define mediante una regla de flujo asociada como

$$\mathbf{n}^{DP-reg} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \boldsymbol{\tau}} = dev \boldsymbol{\tau} + (p - p_a) \mathbf{1} \quad (\text{A.20})$$

En consecuencia, el tensor velocidad de deformación plástica \mathbf{d}^p se escribe como:

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} dev \boldsymbol{\tau} \quad \forall p \leq p_a \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} [dev \boldsymbol{\tau} + (p - p_a) \mathbf{1}] \quad \forall p > p_a \quad (\text{A.22})$$

Observación

- La función potencial utilizada para regularizar el flujo plástico en la zona del vértice formado por la superficie de Drucker-Prager y el eje de las presiones medias $\varphi(\boldsymbol{\tau})$, no depende de la variable de interna. Por lo tanto φ no evoluciona a lo largo del proceso, sino que su efecto de regularización es a nivel numérico-matemático y no debe considerarse como parte de los parámetros que definen el comportamiento mecánico del material.

Flujo plástico sobre la superficie elíptica

El flujo plástico sobre la superficie elíptica surge a partir de la adopción de una regla de flujo asociada, es decir que los vectores de flujo plástico son normales a la función elíptica en cada uno de sus puntos. Como consecuencia de ello, la dirección de los vectores pasa de ser completamente desviadora en el punto de intersección entre las superficies de fluencia de Drucker-Prager y elíptica a ser totalmente volumétrica compresiva en el punto formado por la intersección del casquete elíptico con el eje de las presiones medias, ver la figura A.6.

Para lograr una transición suave entre el flujo plástico totalmente desviador y no asociado de la superficie de Drucker-Prager $\phi_1(\boldsymbol{\tau}, \bar{\eta})$ y el que resulta de la superficie elíptica $\phi_2(\boldsymbol{\tau}, \bar{\eta})$, el modelo incorpora una superficie potencial de regularización similar a la anteriormente utilizada en la intersección del eje p y la superficie de Drucker-Prager. Dentro del mismo contexto ya presentado en los apartados precedentes, la superficie potencial de regularización puede escribirse como:

$$\varphi_2(\boldsymbol{\tau}, \bar{\eta}) = \frac{1}{2} \left\| dev \boldsymbol{\tau} + s_2^2 \langle -p - p_b^* \rangle \mathbf{1} \right\|^2 \quad (\text{A.23})$$

donde p_b^* indica por un lado el punto de intersección de las superficies de fluencia, y por otro lado el cambio de comportamiento físico del material, a partir del cual comienza a densificarse. Como consecuencia del paréntesis de Macaulay, la regularización tiene validez para valores de la presión media $p \leq p_b^*$, mientras que para valores por debajo de p_b , recobra protagonismo el flujo asociado que resulta de la función de fluencia elíptica $\phi_2(\boldsymbol{\tau}, \bar{\eta})$. En resumen, lo dicho implica que la zona regularizada queda limitada a presiones medias dentro del intervalo $p_b \leq p < -p_b^*$, ver la figura A.6.

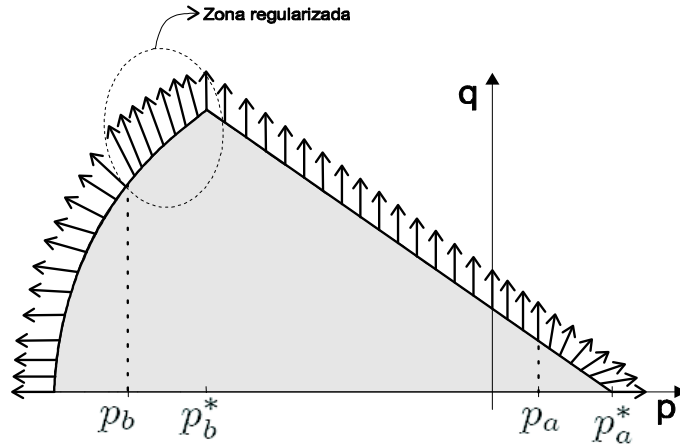


Figura A.6: Vectores de flujo plástico a lo largo del espacio de tensiones admisibles

El valor de p_b se calcula a partir del factor de interpolación lineal ξ , de forma que:

$$p_b = (1 - \xi)p_b^* + \xi(-s_1 - p_b^*) \quad (\text{A.24})$$

donde $0 \leq \xi \leq 1$, de modo que si $\xi = 0 \Rightarrow p_b = p_b^*$ y si $\xi = 1 \Rightarrow p_b = -s_1 - p_b^*$, controlando así la extensión de la zona de regularización afectada por la función potencial de la ecuación A.23, que es máxima si $\xi = 1$ y nula si $\xi = 0$.

La dirección del flujo plástico en la zona de la superficie elíptica no regularizada es, por lo tanto:

$$\mathbf{n}^E = \frac{\partial \phi_2}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \text{dev } \boldsymbol{\tau} + \frac{s_2^2}{3}(p + p_b^*)\mathbf{1} \quad (\text{A.25})$$

donde ϕ_2 es la propia superficie de fluencia, $s_2(\bar{\eta})$ es uno de los parámetros que definen su tamaño y forma y P_b^* es la presión que coincide con la intersección de la función elíptica y la de Drucker-Prager. Por su parte, en la zona regularizada, el flujo plástico se define como:

$$\mathbf{n}^{E-reg} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \text{dev } \boldsymbol{\tau} + s_2^2(p + p_b)\mathbf{1} \quad (\text{A.26})$$

donde φ_2 es la superficie potencial asociada a la función elíptica y p_b es el punto donde termina la zona de regularización y comienza la zona con regla de flujo asociado sobre la función elíptica.

Como consecuencia de lo expuesto, el tensor velocidad de deformación plástica \mathbf{d}^p se escribe, en el intervalo $p \leq p_b^*$, como:

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} [\text{dev } \boldsymbol{\tau} + s_2^2(p + p_b)\mathbf{1}] \quad \forall p_b \leq p \leq p_b^* \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \left[\text{dev } \boldsymbol{\tau} - \frac{s_2^2}{3}(p + s_3)\mathbf{1} \right] \quad \forall p < p_b \quad (\text{A.28})$$

Funciones de Fluencia	
-Superficie de Drucker-Prager	
$\phi_1(\boldsymbol{\tau}, \bar{\eta}) = q + b_1(\bar{\eta}) p - b_2(\bar{\eta})$	
-Superficie elíptica	
$\phi_2(\boldsymbol{\tau}, \bar{\eta}) = q^2 + \frac{s_2^2(\bar{\eta})}{2} [p + p_b^*]^2 - [s_1(\bar{\eta})s_2(\bar{\eta})]^2$	
Funciones Potenciales	
$\varphi_1(\boldsymbol{\tau}) = \ \text{dev } \boldsymbol{\tau} + \langle p - p_a \rangle \mathbf{1}\ ^2$	$p_a < p \leq p_a^*$
$\varphi_2(\boldsymbol{\tau}, \bar{\eta}) = \frac{1}{2} \ \text{dev } \boldsymbol{\tau} + s_2^2(\bar{\eta}) \langle -p - p_b^* \rangle \mathbf{1}\ ^2$	$p_b < p \leq p_b^*$
-Tensor Velocidad de Deformación Plástica	
$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \text{dev } \boldsymbol{\tau}$	$\forall p_b^* < p \leq p_a$
$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} [\text{dev } \boldsymbol{\tau} + (p - p_a)\mathbf{1}]$	$\forall p > p_a$
$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} [\text{dev } \boldsymbol{\tau} + (p + p_b)\mathbf{1}]$	$\forall p_b \leq p < p_b^*$
$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \left[\text{dev } \boldsymbol{\tau} - \frac{s_2^2}{3}(p + p_b^*)\mathbf{1} \right]$	$\forall p \leq p_b$

Cuadro A.1: Revisión de las funciones de fluencia, potencial y del flujo plástico

A.2.8. Síntesis de la formulación del modelo de flujo

Como síntesis de lo desarrollado en los últimos apartados, el cuadro A.1, presenta una revisión de las funciones de fluencia, de las funciones potenciales y del tensor de velocidad de deformación plástica utilizados en el modelo de flujo.

A.3. Integración de la ecuación constitutiva

A.3.1. Cálculo del multiplicador plástico - formulación continua

El multiplicador plástico se calcula al imponer la condición de consistencia en cada una de las superficies de fluencia de acuerdo al intervalo al que pertenezca el valor de la tensión media p . Concretamente, la consistencia se impone al forzar, mediante el reemplazo de las respectivas expresiones de las componentes desacopladas de las tensiones (partes volumétrica y desviadora), en las funciones de fluencia. El cumplimiento de la condición se define genéricamente como: $\phi(\boldsymbol{\tau}, \bar{\eta}) = 0$, la cual junto a la regla de flujo que rige en cada intervalo, se calcula el valor del parámetro $\dot{\lambda}$ que garantiza el cumplimiento de la condición. Siguiendo la misma metodología utilizada en los apartados precedentes, a continuación se obtienen las expresiones continuas de los multiplicadores plásticos para cada uno de los intervalos de p previamente definidos.

Para $p > p_a^*$, en la zona regularizada de la superficie de Drucker-Prager, el multiplicador plástico se calcula de acuerdo con la regla de flujo no asociada: $\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \varphi_1(\boldsymbol{\tau})}{\partial \boldsymbol{\tau}}$. En consecuencia, la función de fluencia, la función potencial y el multiplicador plástico resultante de aplicar la metodología son:

$$\phi_1(\boldsymbol{\tau}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) = q + b_1 p - b_2 = 0 \quad \forall p > p_a^* \quad (\text{A.29})$$

$$\varphi_1(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2} \|\text{dev } \boldsymbol{\tau} + (p - p_a) \mathbf{1}\|^2 \quad (\text{A.30})$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\|\text{dev}(\mathbf{d})\| + \frac{b_1}{3} \text{tr}(\mathbf{d})}{b_2 - b_1 p_a} \quad (\text{A.31})$$

Por otra parte, para el intervalo definido por: $p_b^* < p \leq p_a$ (zona no regularizada de la superficie de Drucker-Prager), el multiplicador plástico se calcula por medio de la aplicación de la regla de flujo asociada dada por: $\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi_1(\boldsymbol{\tau}, \bar{\boldsymbol{\eta}})}{\partial \boldsymbol{\tau}}$, con lo cual se obtiene:

$$\phi_1(\boldsymbol{\tau}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) = q + b_1 p - b_2 = 0 \quad \forall p_b^* < p \leq p_a \quad (\text{A.32})$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\|\text{dev}(\mathbf{d})\|}{b_2 - b_1 p} \quad (\text{A.33})$$

Se puede observar que si se considera la expresión geométrica $b_1 = b_2/p_a^*$ (ver la figura A.3), se opera convenientemente buscando el valor límite admitido para p en la definición de $\dot{\lambda}$, se llega a la relación $b_2 - b_1 p = b_1(p_a^* - p)$, y finalmente a la expresión: $\dot{\lambda} = \frac{\|\text{dev}(\mathbf{d})\|}{b_1(p_a^* - p)}$.

Por lo tanto, para cumplir con la condición $\dot{\lambda} \geq 0$, se requiere que: $p \leq p_a$.

Análogamente, sobre la superficie del casquete elíptico, donde se verifica la condición: $p \leq p_b^*$, se diferencian dos zonas, una regularizada y otra no regularizada. En la zona regularizada, que se encuentra dentro del intervalo $p_b < p \leq p_b^*$, el multiplicador plástico se calcula utilizando la siguiente regla de flujo no asociada: $\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \varphi_2(\boldsymbol{\tau}, \bar{\boldsymbol{\eta}})}{\partial \boldsymbol{\tau}}$. En este caso, la función de fluencia, la función potencial y el multiplicador plástico resultantes son:

$$\phi_2(\boldsymbol{\tau}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) = q^2 + \frac{s_2^2(\bar{\boldsymbol{\eta}})}{2} [p + p_b^*]^2 - [s_1(\bar{\boldsymbol{\eta}}) s_2(\bar{\boldsymbol{\eta}})]^2 \quad \forall p_b < p \leq p_b^* \quad (\text{A.34})$$

$$\varphi_2(\boldsymbol{\tau}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) = \frac{1}{2} \|\text{dev } \boldsymbol{\tau} + s_2^2(\bar{\boldsymbol{\eta}}) \langle -p - p_b^* \rangle \mathbf{1}\|^2 \quad (\text{A.35})$$

$$\dot{\lambda} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{A.36})$$

$$a = (s_2 p_b^*)^2 - (s_1 s_2)^2 \quad (\text{A.37})$$

$$b = -2 \frac{p_b}{p_b^*} (p_b - p_b^*) \text{tr}(\mathbf{d}) \quad (\text{A.38})$$

$$c = \|\text{dev}(\mathbf{d})\|^2 + \frac{(p_b - p_b^*)^2}{p_b^{*2}} \text{tr}^2(\mathbf{d}) \quad (\text{A.39})$$

Mientras tanto, en la zona no regularizada, donde $p \leq p_b$, la regla de flujo asociada aplicable es: $\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi_2(\boldsymbol{\tau}, \bar{\boldsymbol{\eta}})}{\partial \boldsymbol{\tau}}$, y lo que resulta de aplicar la metodología es lo siguiente:

$$\phi_2(\boldsymbol{\tau}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) = q^2 + \frac{s_2^2(\bar{\boldsymbol{\eta}})}{2} [p + p_b^*]^2 - [s_1(\bar{\boldsymbol{\eta}}) s_2(\bar{\boldsymbol{\eta}})]^2 \quad \forall p \leq p_b \quad (\text{A.40})$$

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{s_1 s_2} \sqrt{\|\text{dev}(\mathbf{d})\|^2 + \frac{\text{tr}^2(\mathbf{d})}{s_2^2}} \quad (\text{A.41})$$

A.3.2. Cálculo de las tensiones - formulación continua

Las tensiones en su forma continua se obtienen al reemplazar en la correspondiente regla de flujo, la relación adecuada obtenida para el multiplicador plástico. A continuación se definen las tensiones de manera desacoplada (componentes volumétrica y desviadora) para cada uno de los intervalos de tensiones medias predefinidos.

Para la zona regularizada de la superficie de Drucker-Prager que obedece a la condición ($p > p_a$) las expresiones resultantes son:

$$dev(\mathbf{d}) = \dot{\lambda} dev(\boldsymbol{\tau}) \quad (\text{A.42})$$

$$tr(\mathbf{d}) = 3\dot{\lambda}(p - p_a) \quad \forall p > p_a \quad (\text{A.43})$$

de donde luego de operar se obtienen las tensiones:

$$dev(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{\dot{\lambda}} dev(\mathbf{d}) \quad (\text{A.44})$$

$$p = \frac{1}{3\dot{\lambda}} tr(\mathbf{d}) + p_a \quad \forall p > p_a \quad (\text{A.45})$$

Mientras tanto, para la región de la superficie de Drucker-Prager con flujo puramente desviador, (zona no regularizada delimitada por el intervalo $p_b^* < p \leq p_a$, se tiene:

$$dev(\mathbf{d}) = \dot{\lambda} dev(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall p_b^* < p \leq p_a \quad (\text{A.46})$$

En este caso, la componente volumétrica de las tensiones está indeterminada como consecuencia de la estructura intrínseca del modelo. Físicamente, dicha indeterminación significa que para situaciones de flujo puramente desviador, no existen tensiones volumétricas que definan el comportamiento hidrostático del material. Por lo tanto, para resolver dicha indeterminación, se define una regularización elástica por medio de una presión incremental $\dot{p}(\kappa, \mathbf{d})$ y haciendo uso del parámetro κ , que puede ser interpretado como el módulo de compresibilidad elástico del material⁴. Desde un punto de vista físico, el efecto producido por $\dot{p}(\kappa, \mathbf{d})$ es otorgarle al material la resistencia volumétrica necesaria para que permanezca incompresible ante cargas comparables con su propio peso (equilibrio estático). Por otra parte, la existencia de $\dot{p}(\kappa, \mathbf{d})$ le permite al modelo alcanzar, desde un punto de vista numérico-matemático, las situaciones de: flujo cuando el estado tensional se sitúa sobre la superficie de Drucker-Prager (material fluido durante procesos de transferencia) y de compresión (densificación del material durante procesos de compactación) cuando lo hace sobre el casquete elíptico, ambos durante estados de carga creciente. Por otra parte, en los estados de descarga, $\dot{p}(\kappa, \mathbf{d})$ permite la introducción de una descarga elástica en el modelo, lo cual lo vuelve bien definido para velocidades de deformación nulas.

De acuerdo a lo explicado, las tensiones se definen como:

⁴Se hace referencia al módulo de compresibilidad definido normalmente, en función del módulo elástico y del coeficiente de Poisson, como: $\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}$

$$dev(\boldsymbol{\tau}) = \frac{dev(\mathbf{d})}{\dot{\lambda}} \quad (\text{A.47})$$

$$\dot{p} = \kappa tr(\mathbf{d}) \quad \forall p_b^* < p \leq p_a \quad (\text{A.48})$$

Para la zona regularizada sobre la superficie elíptica (zona delimitada por el intervalo $p_b < p \leq p_b^*$, se tiene:

$$dev(\mathbf{d}) = \dot{\lambda} dev(\boldsymbol{\tau}) \quad (\text{A.49})$$

$$tr(\mathbf{d}) = 3\dot{\lambda}(p - p_b^*) \quad \forall p_b < p \leq p_b^* \quad (\text{A.50})$$

y las tensiones que resultan luego de operar son:

$$dev(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{\dot{\lambda}} dev(\mathbf{d}) \quad (\text{A.51})$$

$$p = \frac{1}{3\dot{\lambda}} tr(\mathbf{d}) - p_b^* \quad \forall p_b < p \leq p_b^* \quad (\text{A.52})$$

Finalmente, para la zona no regularizada del casquete elíptico, definida por la condición $p \leq -P_b$, las relaciones resultantes son:

$$dev(\mathbf{d}) = \dot{\lambda} dev(\boldsymbol{\tau}) \quad (\text{A.53})$$

$$tr(\mathbf{d}) = s_2^2 \dot{\lambda} (P + P_b^*) \quad \forall p \leq P_b \quad (\text{A.54})$$

donde las tensiones son:

$$dev(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{\dot{\lambda}} dev(\mathbf{d}) \quad (\text{A.55})$$

$$p = \frac{1}{s_2^2 \dot{\lambda}} tr(\mathbf{d}) - P_b^* \quad \forall p \leq P_b \quad (\text{A.56})$$

Observación

- La componente volumétrica $\dot{p} = \kappa tr(\mathbf{d})$ tiene, a pesar de la concepción esencial del modelo de flujo, un carácter elástico. Dicha condición peculiar introduce en la formulación una regularización elástica que ofrece la posibilidad de permitir situaciones de carga donde la velocidad del material es despreciable o nula (sin flujo), lo que logra definir condiciones volumétricamente indeterminadas para las formulaciones de flujo estándar. Dichas condiciones deben ser consideradas como de carga y de descarga de acuerdo a si se producen antes o después del flujo.

El cuadro A.2 presenta una síntesis de las tensiones que resultan de la formulación del modelo constitutivo de flujo.

<p>-Tensiones totales: $\boldsymbol{\tau} = dev(\boldsymbol{\tau}) + \frac{tr(\boldsymbol{\tau})}{3}\mathbf{1}$</p> <p>-Tensiones desviadoras: $dev(\boldsymbol{\tau}) = \frac{dev(\mathbf{d})}{\lambda} \quad \forall p$</p> <p>-Zona Regularizada de la Superficie de Drucker-Prager ($p > p_a$)</p> $p = \frac{tr(\mathbf{d})}{3\lambda} + p_a$ <p>-Zona Sobre de la Superficie de Drucker-Prager ($p_b^* < p \leq p_a$)</p> $\dot{p} = \kappa tr(\mathbf{d})$ <p>-Zona Regularizada Sobre la Superficie Elíptica ($p_b < p \leq p_b^*$)</p> $p = \frac{tr(\mathbf{d})}{3\lambda} - p_b^*$ <p>-Zona Sobre de la Superficie Elíptica ($p \leq p_b$)</p> $p = \frac{tr(\mathbf{d})}{s_2^2\lambda} - p_b^*$
--

Cuadro A.2: Resumen de las tensiones definidas en el modelo de flujo

A.3.3. Algoritmo de integración y de actualización de las variables

La integración de la versión discreta del modelo constitutivo de flujo se lleva a cabo mediante el método IMPL-EX [71][72], que combina de manera conveniente las ventajas de los esquemas de integración implícitos y explícitos. El aporte fundamental de la metodología propuesta es que, a diferencia de los métodos explícitos o implícitos que resuelven el modelo constitutivo y calculan las tensiones de acuerdo a $\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \Psi(\boldsymbol{\tau}_n, \mathbf{q}_n)$ ó $\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \bar{\Psi}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1})$, el IMPL-EX lo hace de acuerdo a las siguientes pautas [72]:

1. Las tensiones se evalúan de manera explícita $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = \Psi(\boldsymbol{\tau}_n, \mathbf{q}_n)$ y las demás variables que dependen de las tensiones se calculan de forma combinada, de acuerdo con: $\tilde{\mathbf{q}}_{n+1} = \tilde{\Psi}(\boldsymbol{\tau}_n, \mathbf{q}_{n+1}^*)$, donde \mathbf{q}_{n+1}^* representa a las variables del modelo que son de tipo deformación y que se extrapolan a partir de la solución implícita del incremento anterior.
2. El modelo se resuelve de forma implícita, donde la condición de equilibrio definida por la expresión: $\mathbf{F}^{int} - \mathbf{F}^{ext} = \mathbf{M}\mathbf{a}$, se impone utilizando las tensiones extrapoladas $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}$ en lugar de hacerlo con las tensiones calculadas de forma implícita $\boldsymbol{\tau}_{n+1}$ como en un esquema implícito puro. Adicionalmente, durante la resolución del modelo, se calculan todas las demás variables de forma implícita. Luego, las mismas son extrapoladas y se utilizan en el siguiente incremento.

Las ventajas que presenta el método IMPL-EX con respecto a los esquemas de integración clásicos son las siguientes⁵:

- Hereda la estabilidad de los algoritmos implícitos y la robustez de los explícitos.
- El tensor algorítmico tangente es simétrico, definido semi-positivo y constante por no depender de las variables asociadas a la deformación. Por lo tanto, la linealización

⁵Para mayores detalles acerca de la metodología IMPL-EX, ver la referencia [72].

arroja una matriz tangente constante y el esquema iterativo sólo debe resolver un problema incrementalmente lineal.

De acuerdo a lo dicho, el algoritmo asociado al método IMPL-EX tiene que resolver en cada incremento de tiempo, y de manera paralela, dos partes bien diferenciadas, una explícita y otra implícita. A continuación se presentan cada una de dichas partes en algoritmos separados, que cuando se resuelven de forma simultánea conforman el algoritmo global del método IMPL-EX.

En el cuadro A.3 se sintetizan los pasos de la parte explícita del algoritmo IMPL-EX. Las variables dato $\widetilde{\Delta\lambda}_{n+1}$ y $\widetilde{\Delta p}_{n+1}$ se extrapolan del incremento previo. La primera de ellas es la variable del modelo tipo deformación que contiene la evolución del modelo plástico de flujo, mientras que $\widetilde{\Delta p}_{n+1}$ es una variable algorítmica de linealización que al ser extrapolada y luego aplicar el método IMPL-EX, logra que el operador tangente se simplifique y sea totalmente constante durante el incremento. La variable $\widetilde{p}_{n+1}^{trial}$ tiene una componente de tensiones iniciales p_n y una componente extrapolada, por lo tanto no depende del incremento actual. El cálculo de las tensiones en cada intervalo de p depende de valores explícitos y extrapolados, por lo tanto la matriz constitutiva tangente que resulta del modelo se compone de valores constantes y el sistema de ecuaciones a resolver es lineal en el incremento.

Paralelamente se resuelve la parte implícita del algoritmo, del cual se listan sus pasos en el cuadro A.4. En este caso, las tensiones de prueba que sitúan el correspondiente intervalo de p se calculan por medio de la ley de Hooke generalizada en función de la velocidad de deformación. Por su parte, las tensiones y el multiplicador plástico se calculan de forma exacta, sin embargo esto no afecta a la matriz tangente del problema, porque de acuerdo con el método IMPL-EX, la condición de equilibrio se evalúa en función de las tensiones explícitas y las mismas no varían a lo largo del incremento.

Observaciones

- *El hecho de utilizar la metodología IMPL-EX y extrapolar variables del modelo de un incremento a otro, introduce un error de aproximación en la integración del modelo (un estudio sobre error y estabilidad numérica del método puede hallarse en [72]), sin embargo su efecto negativo se compensa al introducir en la resolución del problema una mayor cantidad de incrementos sin iteraciones incrementales y con una alta velocidad de cálculo.*
- *La extrapolación adicional de la variable $\widetilde{\Delta p}_{n+1}$ no es obligatoria para implementar el método IMPL-EX, ya que la simple extrapolación de la variable $\widetilde{\Delta\lambda}_{n+1}$, alivia considerablemente la no linealidad material intrínseca del problema. Sin embargo, la estrategia seguida en el desarrollo del modelo constitutivo ha sido la de linealizar al máximo el problema a fin de evitar iteraciones incrementales. Se advierte, como una posible línea de investigación y estudio futuro, efectuar linealizaciones parciales del problema y analizar: la influencia de ello en la complejidad de los operadores tangentes resultantes y el error introducido por cada una de las diferentes aproximaciones.*

-Inicio del incremento, datos: $\widetilde{\Delta\lambda}_{n+1}$; $\widetilde{\Delta p}_{n+1}$

$$\widetilde{\Delta\lambda}_{n+1} = \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} \Delta\lambda_n ; \widetilde{\Delta p}_{n+1} = \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} \Delta p_n$$

-Si $\Delta\lambda_n \leq 0 \rightarrow$ Estado elástico

Tensiones trial: $\widetilde{p}_{n+1}^{trial} = p_n + \widetilde{\Delta p}_{n+1}$

$$dev(\widetilde{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}) = \frac{dev(\mathbf{d}_{n+1})}{\widetilde{\Delta\lambda}_{n+1}} \quad \forall p$$

-Si $\Delta\lambda_n > 0 \rightarrow$ Flujo activo

-Si $\widetilde{p}_{n+1}^{trial} > p_a$ (Drucker-Prager + flujo regularizado)

$$\widetilde{p}_{n+1} = p_a$$

$$\widetilde{K}_{n+1} = \frac{1}{3\widetilde{\Delta\lambda}_{n+1}}$$

$$\widetilde{p}_{n+1} = \widetilde{K}_{n+1} tr(\mathbf{d}_{n+1}) + p_a$$

-Si $-p_b^* < \widetilde{p}_{n+1}^{trial} \leq p_a$ (Drucker-Prager + flujo desviador)

$$\widetilde{p}_{n+1} = p_n$$

$$\widetilde{K}_{n+1} = \kappa$$

$$\widetilde{p}_{n+1} = \widetilde{p}_{n+1}^{trial}$$

-Si $p_b < \widetilde{p}_{n+1}^{trial} \leq -p_b^*$ (Elipse - Drucker-Prager + regularización)

$$\widetilde{p}_{n+1} = -p_b^*$$

$$\widetilde{K}_{n+1} = \frac{1}{s_2^2 \widetilde{\Delta\lambda}_{n+1}} \frac{(p_b - p_b^*)}{p_b}$$

$$\widetilde{p}_{n+1} = \widetilde{K}_{n+1} tr(\mathbf{d}_{n+1}) - p_b^* + p_b$$

-Si $\widetilde{p}_{n+1}^{trial} \leq p_b$ (Elipse + flujo asociado)

$$\widetilde{p}_{n+1} = p_b^*$$

$$\widetilde{K}_{n+1} = \frac{1}{s_2^2 \widetilde{\Delta\lambda}_{n+1}}$$

$$\widetilde{p}_{n+1} = \widetilde{K}_{n+1} tr(\mathbf{d}_{n+1}) - P_b^*$$

-Cálculo implícito

Cuadro A.3: Algoritmo IMPL-EX - parte explícita

-Tensiones trial: $p_{n+1}^{trial} = p_n + \kappa \text{tr}(\mathbf{d}_{n+1})$; $dev(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}) = dev(\boldsymbol{\tau}_n) + 2\mu dev(\mathbf{d}_{n+1})$

-Superficies trial

$$\text{Drucker-Prager: } \phi_1^{trial} = \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial})\| + b_1 p_{n+1}^{trial} - b_2$$

$$\text{Elipse: } \phi_2^{trial} = \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial})\|^2 + \frac{s_2^2}{2} [p_{n+1}^{trial} + p_b^*]^2 - [s_1 \ s_2]^2$$

$$\Delta p_{n+1} = p_{n+1} - p_n$$

-Si $\phi_1^{trial} < 0$ y si $\phi_2^{trial} < 0 \rightarrow$ Estado elástico

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}; \Delta \lambda_{n+1} = 0$$

-Si $\phi_1^{trial} > 0 \rightarrow$ Flujo activo sobre superficie de Drucker-Prager

-Si $p_{n+1}^{trial} > p_a^*$ (Drucker-Prager + flujo regularizado)

$$\Delta \lambda_{n+1} = \frac{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1})\| + \frac{1}{3} b_1 \text{tr}(\mathbf{d}_{n+1})}{b_1 \gamma p_a^*}$$

$$p_{n+1} = \frac{\text{tr}(\mathbf{d}_{n+1})}{3\Delta \lambda_{n+1}} + p_a$$

$$dev(\boldsymbol{\tau}_{n+1}) := \frac{dev(\mathbf{d}_{n+1})}{\Delta \lambda_{n+1}}$$

-Si $p_b^* < p_{n+1}^{trial} \leq p_a$ (Drucker-Prager + flujo desviador)

$$\Delta \lambda_{n+1} = \frac{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{n+1})\|}{b_1 (p_a^* - p_{n+1})}$$

$$p_{n+1} = p_{n+1}^{trial}$$

$$dev(\boldsymbol{\tau}_{n+1}) := \frac{dev(\mathbf{d}_{n+1})}{\Delta \lambda_{n+1}}$$

-Si $\phi_2^{trial} > 0 \rightarrow$ Flujo activo sobre superficie elíptica

-Si $p_b < p_{n+1}^{trial} \leq p_b^*$ (Elipse + flujo regularizado)

$$\Delta \lambda_{n+1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; p_{n+1} = \frac{\text{tr}(\mathbf{d}_{n+1})}{s_2^2 \Delta \lambda_{n+1}} \left(\frac{p_b - p_b^*}{p_b} \right); dev(\boldsymbol{\tau}_{n+1}) = \frac{dev(\mathbf{d}_{n+1})}{\Delta \lambda_{n+1}}$$

$$a = (s_2 p_b^*)^2 - (s_1 s_2)^2; b = -2 \frac{p_b}{p_b^*} (p_b - p_b^*) \text{tr}(\mathbf{d}_{n+1})$$

$$c = \|\text{dev}(\mathbf{d}_{n+1})\|^2 + \frac{(p_b - p_b^*)^2}{p_b^* s_2^2} \text{tr}^2(\mathbf{d}_{n+1})$$

-Si $p_{n+1}^{trial} < p_b$ (Elipse + flujo asociado)

$$\lambda_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2s_1 s_2}} \sqrt{\|\text{dev}(\mathbf{d}_{n+1})\|^2 + \frac{\text{tr}^2(\mathbf{d}_{n+1})}{s_2^2}}$$

$$p_{n+1} = \frac{\text{tr}(\mathbf{d}_{n+1})}{s_2^2 \Delta \lambda_{n+1}} - p_b^*$$

$$dev(\boldsymbol{\tau}_{n+1}) = \frac{dev(\mathbf{d}_{n+1})}{\Delta \lambda_{n+1}}$$

$\Delta \lambda_{n+1}$ y p_{n+1} extrapolados al próximo incremento como:

$$\widetilde{\Delta \lambda}_{n+1} = \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} \Delta \lambda_{n+1}; \widetilde{\Delta p}_{n+1} = \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} \Delta p_{n+1}$$

-Final

Cuadro A.4: Algoritmo IMPL-EX - parte implícita

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathbb{C}}_{n+1} := 2\tilde{\mu}_{n+1}\mathbb{I} + \tilde{\lambda}_{n+1}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \text{ (matriz pseudo-elástica)} \\
& \text{-Si } \Delta\lambda_n \leq 0 \longrightarrow \text{Estado elástico} \\
& \quad \tilde{\mu}_{n+1} := \mu ; \tilde{\lambda}_{n+1} := \lambda \\
& \text{-Si } \Delta\lambda_n > 0 \longrightarrow \text{Flujo activo} \\
& \quad \tilde{\Delta}\lambda_{n+1} := \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} \Delta\lambda_n \quad \forall p \\
& \quad \tilde{\mu}_{n+1} := \frac{1}{2\tilde{\Delta}\lambda_{n+1}} ; \tilde{\lambda}_{n+1} := \frac{\tilde{K}_{n+1} - 2\tilde{\mu}_{n+1}}{3} \\
& \text{-Si } p_{n+1}^{trial} > p_a^* \text{ (Drucker-Prager + flujo regularizado)} \\
& \quad \tilde{K}_{n+1} := \frac{1}{3\tilde{\Delta}\lambda_{n+1}} \\
& \text{-Si } p_b^* < p_{n+1}^{trial} \leq p_a \text{ (Drucker-Prager + flujo desviador)} \\
& \quad \tilde{K}_{n+1} := \kappa \\
& \text{-Si } p_b < p_{n+1}^{trial} \leq p_b^* \text{ (Elipse + flujo regularizado)} \\
& \quad \tilde{K}_{n+1} := \frac{1}{s_2^2 \tilde{\Delta}\lambda_{n+1}} \frac{(p_b - p_b^*)}{p_b} \\
& \text{-Si } p_{n+1}^{trial} < p_b \text{ (Elipse + flujo asociado)} \\
& \quad \tilde{K}_{n+1} := \frac{1}{s_2^2 \tilde{\Delta}\lambda_{n+1}} \\
& \text{-Final}
\end{aligned}$$

Cuadro A.5: Matriz tangente del material - modelo de flujo

Tensor constitutivo tangente

Completando lo antes mencionado, la metodología IMPL-EX permite que la estructura del tensor constitutivo tangente sea incrementalmente comparable con la matriz de coeficientes constantes de un típico material elástico lineal. Esto resulta como consecuencia de que la condición de equilibrio se evalúa utilizando las tensiones tilde (explícitas y extrapoladas) en lugar de hacerlo con las tensiones reales (implícitas) del incremento, ver el punto 2 del apartado A.3.3. Por lo tanto, la no dependencia con los desplazamientos del incremento hace que los coeficientes de la matriz constitutiva algorítmica permanezcan constantes a lo largo del mismo.

De acuerdo a lo dicho, la matriz constitutiva tangente se define como la derivada de las tensiones con respecto a la velocidad de las deformaciones en el tiempo $t = n + 1$:

$$\tilde{\mathbb{C}}_{n+1} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}}{\partial (\mathbf{d}_{n+1})} \quad (\text{A.57})$$

Lo que resulta de tal operatoria es una matriz pseudo-elástica $\tilde{\mathbb{C}}$, que contiene los coeficientes pseudo-elásticos constantes: $\tilde{\mu}_{n+1}$ y $\tilde{\lambda}_{n+1}$. Para cada uno de los intervalos de tensiones medias p definidos en el modelo se tendrán los correspondientes valores de las constantes $\tilde{\mu}_{n+1}$ y $\tilde{\lambda}_{n+1}$, tal como se puede apreciar en el cuadro A.5.

A.4. Calibración de los parámetros del modelo constitutivo

A.4.1. Introducción

El modelo de flujo cuenta con cuatro parámetros cuya calibración define la caracterización del material. Los parámetros b_1 y b_2 están relacionados con la superficie de fluencia de Drucker-Prager, mientras que los parámetros $s_1(\bar{\eta})$ y $s_2(\bar{\eta})$ lo están con la superficie elíptica. La interpretación gráfica de los parámetros b_1 y b_2 se puede observar en la figura A.3, mientras que sus significados físicos vienen dados por la fricción interna y por la cohesión del material respectivamente.

La caracterización de las propiedades mecánicas y constitutivas de los materiales en polvo a baja densidad, presentan serios problemas en su implementación experimental. Sin embargo, en la ref. [51] se desarrollan algunas técnicas tendientes al estudio de las propiedades físicas y mecánicas de materiales en polvo a baja presión bajo diversos regímenes de flujo.

En lo que respecta al presente modelo, el parámetro de fricción interna b_1 se puede caracterizar a partir de uno de los ensayos numéricos-experimentales que se describen en detalle en los apartados posteriores. Mientras que, el parámetro b_2 que está relacionado con las fuerzas de cohesión, tiende a presentar valores nulos cuando el material en polvo se halla a bajas densidades. En consecuencia, y dado que las fuerzas de cohesión son despreciables, resulta previsible que el material falle aún cuando es sometido a valores de tracción prácticamente nulos. Desde el punto de vista numérico, existe la restricción intrínseca del modelo por la cual, para un valor nulo de cohesión, se induce su indeterminación numérica. Por lo tanto, como resulta necesario adoptar un valor mínimo de cohesión para permitir la operatividad del código, y sin que ello implique su total paralelismo con el comportamiento físico del material, se establece: $b_2 = 10 \text{ Pa}$.

Por otra parte, los parámetros relacionados con la superficie de fluencia elíptica s_1 y s_2 dependen funcionalmente de $\bar{\eta}$, lo cual induce a un comportamiento caracterizado por unas curvas o leyes de evolución que son generalmente conocidas y aceptadas. La evolución del parámetro s_1 en función de $\bar{\eta}$ presenta, cualitativamente, la forma dada por la figura A.7, de forma que el camino seguido por el vector de flujo plástico durante un proceso típico de compactación, coincide con el esquema de la figura A.8. Donde al aumentar $\bar{\eta}$, se incrementa de forma irreversible el tamaño de la elipse y los vectores de flujo plástico avanzan por un camino similar al seguido por la línea punteada. Paralelamente se observa en la misma figura, que la superficie de fluencia de Drucker-Prager permanece invariable a lo largo del proceso como consecuencia de que no existe una dependencia funcional de los parámetros b_1 y b_2 con $\bar{\eta}$.

A.4.2. Calibración de los parámetros pertenecientes a la superficie elíptica

Dado que la calibración de los parámetros pertenecientes a la superficie de fluencia elíptica debe efectuarse sobre la base de un ensayo de compactación pura, es necesario aislar el fenómeno de fricción entre el material y las herramientas con las que interactúa. Sin embargo, como dicha fricción siempre se encuentra presente, la única opción válida para llevar a cabo el ensayo es minimizar su influencia. Para ello, se recurre a un ensayo que tenga las siguientes características:

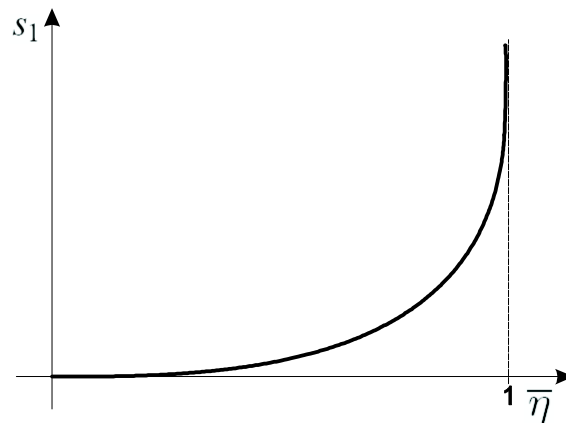


Figura A.7: Esquema cualitativo de la evolución del parámetro s_1 en función de $\bar{\eta}$

1. Que la pieza a compactar sea geoméricamente simple y de esbeltez reducida, a fin de minimizar la superficie de contacto del material con el medio que lo contiene.
2. Que el proceso de compactación, caracterizado por la velocidad de avance de los punzones, sea lento para reducir la componente de velocidad del modelo de fricción⁶.

La pieza destinada al ensayo de calibración es cilíndrica y su relación de esbeltez, definida como el cociente entre su altura inicial y su radio cumple con la condición: $\mathcal{E} = \frac{H_0}{R} \approx 1$. En el cuadro A.9 se detallan las dimensiones geométricas y los parámetros característicos del ensayo de compactación pura. Se puede advertir también en el mismo cuadro, que el rango de densidades barrido por el ensayo permite la caracterización completa de la curva de compactación del material. En el ensayo se utiliza un material en polvo que es una aleación de hierro denominada Sint. D-10, la cual se emplea habitualmente en la fabricación de componentes mecánicos a nivel industrial.

El ensayo consiste en compactar muy lentamente (48 s) un pequeño cilindro de material en polvo, de forma tal que su densidad pasa de unos 3.4 gr/cm^3 iniciales a aprox. 7.45 gr/cm^3 finales. Durante el proceso el punzón superior se desplaza hacia abajo 9.08 mm , mientras que el resto de las herramientas permanece en reposo. Las mediciones experimentales que se extraen a lo largo del ensayo son: la presión axial, la presión radial y los desplazamientos del punzón superior.

Desde el punto de vista numérico, el ensayo se modela en 2D (geometría axisimétrica) bajo las siguientes hipótesis:

- Los campos de tensiones y de deformaciones son homogéneos e independientes de la fricción.

⁶Se considera que para los procesos asociados a la pulvimetalurgia, el modelo de fricción aplicable es el de Northon-Hoff, ver el capítulo 3.4.

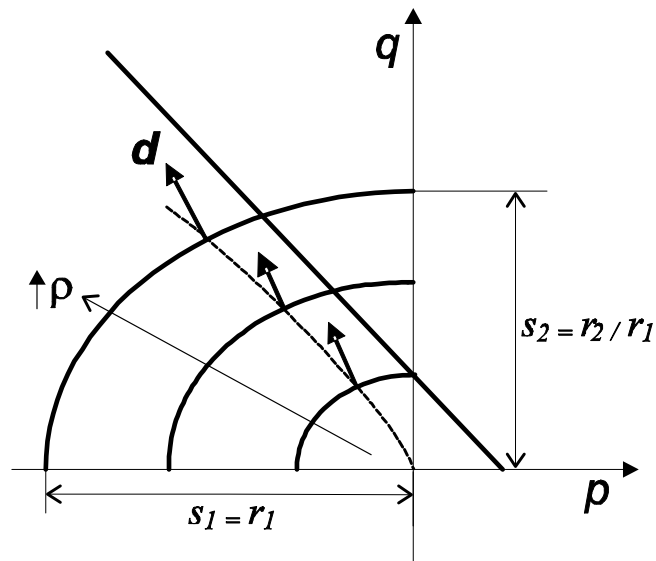


Figura A.8: Esquema del típico camino recorrido por el vector de flujo plástico y evolución de la superficie elíptica durante el proceso de compactación

- La componente radial de la deformación plástica es nula, al igual que las demás componentes elásticas.

La metodología de cálculo de los parámetros se efectúa luego de encontrar una relación que los exprese en función de las presiones que surgen del estado tensional del material. Para ello se recurre a la función de fluencia elíptica, y aplicando las hipótesis antes definidas, se obtienen las relaciones: $s_1(\bar{\eta}) = F(P_{axial}, P_{radial})$ y $s_2(\bar{\eta}) = F(P_{axial}, P_{radial})$, ver la referencia [17].

Los valores cuantitativos surgidos del ensayo de compactación son: la función $s_1(\bar{\eta}) = 0,0075(\bar{\eta}\rho_{ref})^{5,2}$ [MPa] de la figura A.10 para el parámetro $s_1(\bar{\eta})$ que define la dimensión del eje principal de la elipse, y la función constante $s_2(\bar{\eta}) = 1$ para el parámetro que rige la relación de forma de la elipse. Esto último implica que los dos ejes de la elipse son coincidentes, lo que conlleva a que el espacio de tensiones se cierre con un casquete circular.

La calibración de los parámetros s_1 y s_2 se verifica luego de contrastar los resultados numéricos con los experimentales. En particular se comparan los valores de las presiones ejercidas por los punzones superior e inferior a lo largo del proceso de compactación, tal como se presenta en la figura A.11. De su análisis se observa una fuerte coincidencia entre las curvas numéricas y las experimentales, además se puede concluir que la influencia de la fricción en el ensayo es mínima, ya que las presiones de los punzones superior e inferior son prácticamente coincidentes a lo largo de todo el proceso. Es posible llegar a la misma conclusión luego de observar el campo homogéneo de densidades que resulta del ensayo, y que demuestra que la influencia de la fricción no llega a producir densidades diferenciales en la pieza, ver la figura A.12.

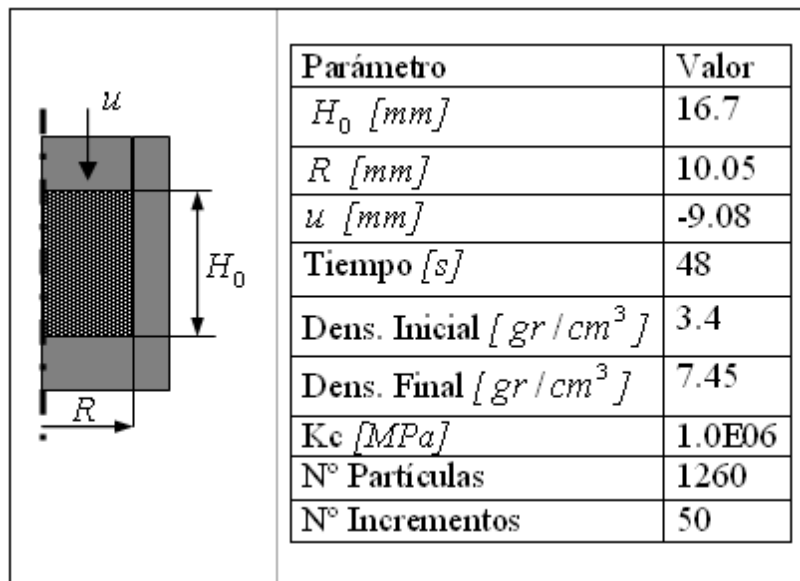


Figura A.9: Parámetros geométricos y características del ensayo de compactación pura

A.4.3. Calibración de los parámetros pertenecientes a la superficie de Drucker-Prager

Parámetro de fricción interna

El parámetro de fricción interna b_1 es el que le otorga al material su carácter granular o friccional, por lo tanto de su correcta calibración depende la principal característica física del material a bajas densidades. Dicho parámetro pertenece a la zona que delimita el dominio elástico en la superficie de fluencia de Drucker-Prager. Sobre la misma, se ubican aquellos estados tensionales caracterizados por cargas de tracción, es decir aquellas que tienden a separar los granos de material. La respuesta del material a dicho tipo de cargas es la cohesión, que es una manifestación macroscópica e indirecta de la fricción interna intergranular.

Los ensayos de llenado, por sus características físicas se caracterizan por producir cargas de tracción a bajas densidades, por lo tanto son de utilidad para calibrar ciertos parámetros del modelo. El ensayo adoptado [49] tiene por objeto analizar el patrón de flujo dentro de un cargador de dimensiones: $L = 100$ mm, $h = 50$ mm y $b = 50$ mm, luego de que este se pone en movimiento⁷ con una velocidad de $100 \frac{mm}{s}$. El cargador contiene en su interior polvo de hierro de densidad $\rho_{fe} \simeq 3 \frac{gr}{cm^3}$ dispuesto de forma cuadrículada, ver la figura A.13.

El grupo de imágenes de la figura A.14, muestra diferentes etapas del ensayo cuyo tiempo total es de 1 segundo. En la columna de la izquierda se pueden apreciar los resultados experimentales, mientras que en la de la derecha los numéricos. Si se observa detenidamente la evolución del material cercano a la superficie libre en la parte superior del cargador, se puede notar que este permanece casi inalterado cuando cambia su estado

⁷En el apartado 4.2 del capítulo 4 se brindan mayores detalles acerca del ensayo experimental de llenado.

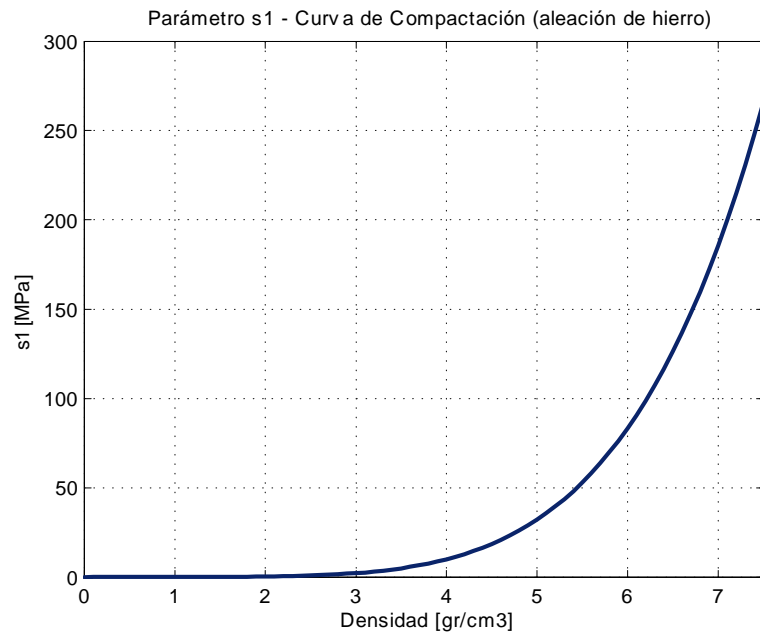


Figura A.10: Parámetro s_1 de la superficie de fluencia elíptica

de movimiento al inicio de la carrera del cargador. En consecuencia es posible concluir que los efectos de la inercia son prácticamente despreciables.

Durante la primera etapa del ensayo, cuando el material comienza a pasar sobre el hueco de entrada del molde, figuras 1a-b), el primer cuadrado gris de material cae libremente hacia el interior del mismo. Este proceso se sucede de manera continua afectando a toda la primera columna, luego se va propagando parcialmente hacia las columnas más próximas de la izquierda, de manera que el material que se ve afectado por la transmisión del efecto, fluye libremente hacia el interior del molde. Luego del proceso transitorio descrito, se llega a un estado estacionario en el que se ve claramente que el material que permanece en el cargador presenta un ángulo de deslizamiento constante, figuras 2a-b), 3a-b) y 4a-b). La condición que se ha encontrado en el ensayo, permite calibrar el parámetro de fricción interna b_1 del modelo constitutivo de flujo, que se interpreta físicamente como aquel que regula la activación y la propagación del flujo de material ante cargas de tracción. Otra interpretación es que se trata del parámetro que define la relación entre las cargas de tracción y las de fricción interna del material (pendiente de la recta de fallo).

Con la ayuda de los resultados experimentales (columna izquierda de la figura A.14), y mediante una metodología de prueba y error, ha sido posible ajustar el valor del parámetro de fricción interna: $b_1 \cong 2,2$, por lo tanto el ángulo de fricción interna $\alpha \cong 65,55^\circ$. Con los valores de los cuatro parámetros del modelo ya definidos, se han obtenido los resultados numéricos que se observan en la columna derecha de la figura A.14. Los mismos presentan un notable ajuste con los resultados experimentales de la columna izquierda.

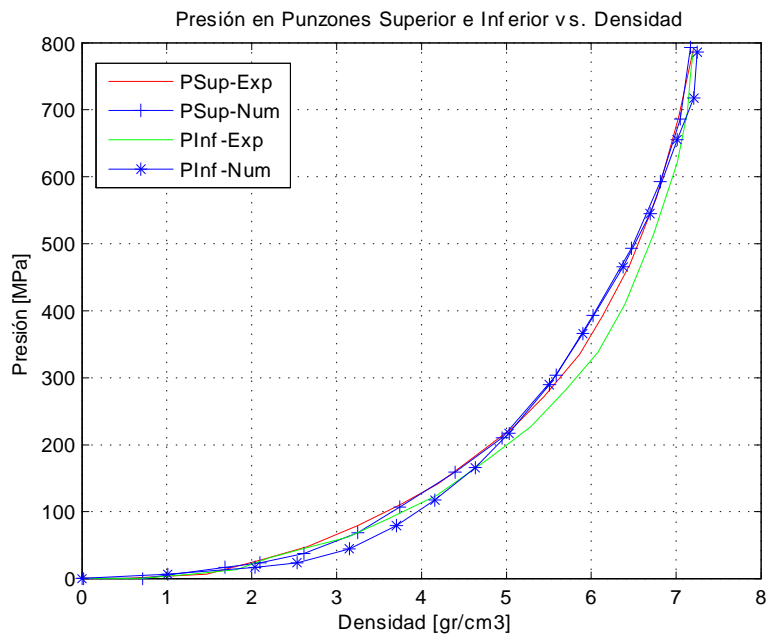


Figura A.11: Ensayo de compactación - Curvas de presiones superior e inferior en función de la densidad

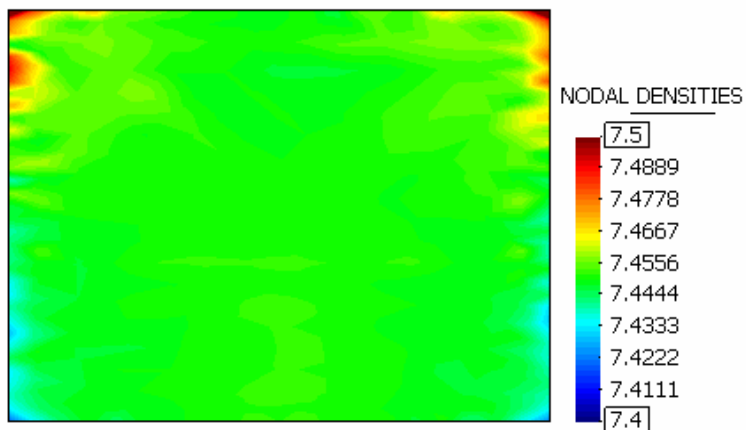


Figura A.12: Campo de densidades que resultan del ensayo de compactación pura

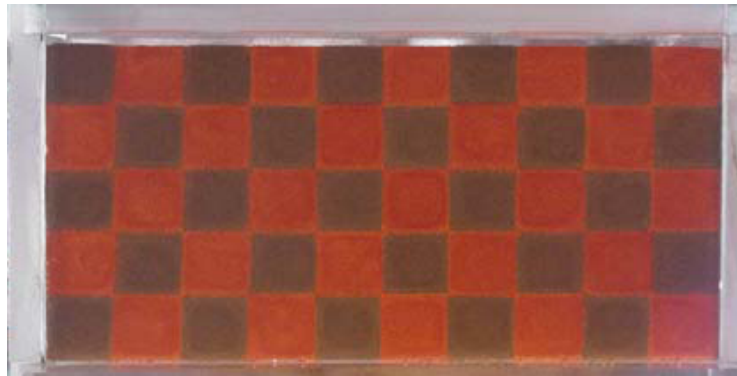


Figura A.13: Vista del cargador con el material ubicado en su interior en cuadrados de $10\text{ mm} \times 10\text{ mm}$

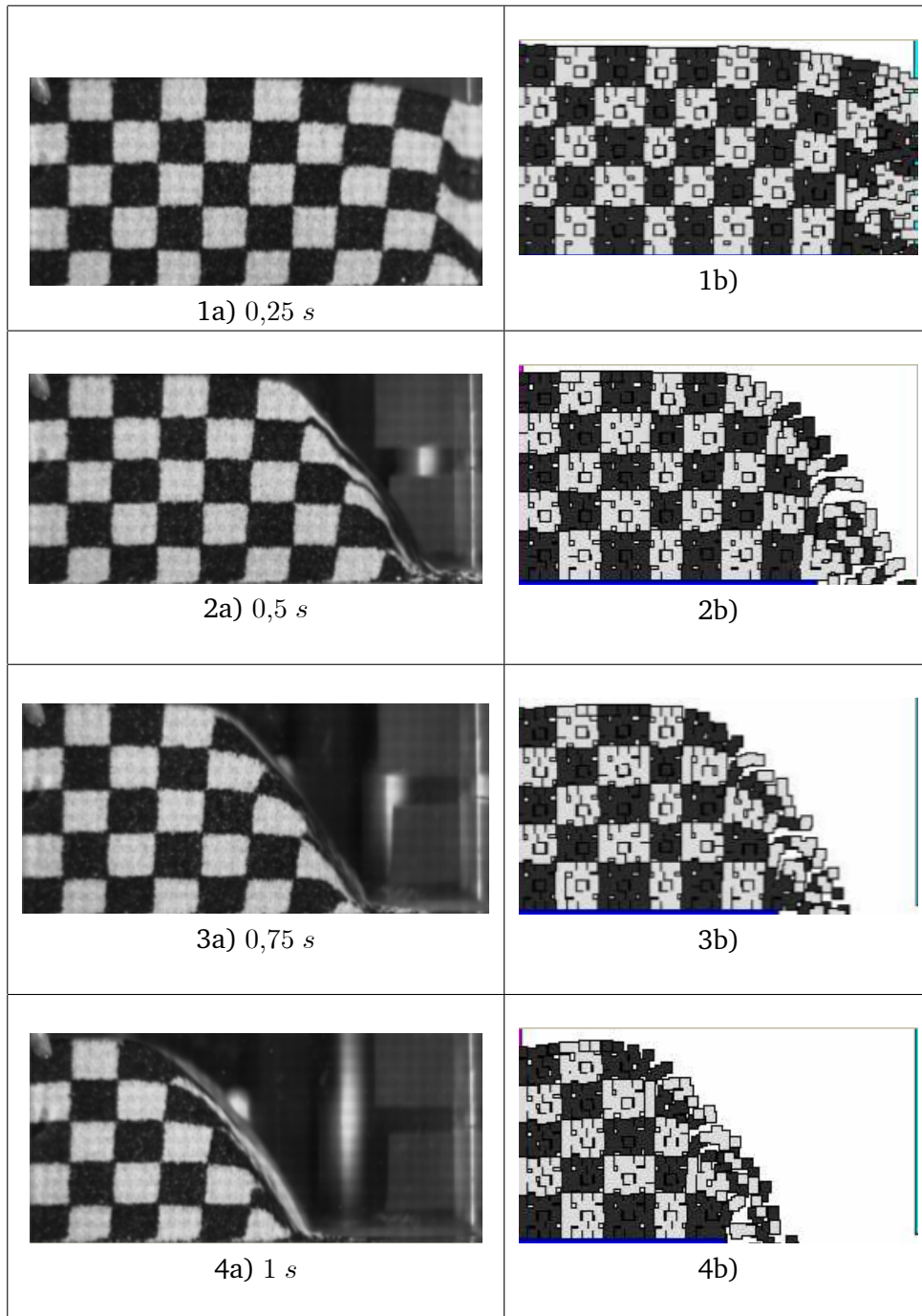


Figura A.14: Etapas del ensayo de llenado del molde - calibración del parámetro de fricción interna

A.5. Recapitulación

A lo largo del apéndice se expuso el desarrollo de un modelo constitutivo de flujo destinado a modelar matemáticamente el comportamiento de los materiales en polvo en general y de los polvos metálicos en particular. La aplicación inmediata del modelo es llegar a reproducir de manera macroscópica la fenomenología asociada a los procesos comprendidos por la pulvimetalurgia (llenado de moldes, transferencia y compactación de polvos metálicos).

Los aspectos de mayor relevancia tratados en el apartado son los siguientes:

- El modelo de flujo permite una reinterpretación de la clásica formulación de la teoría de la plasticidad perteneciente a la mecánica de sólidos, desde un enfoque típico de fluidos, lo que permite la ambivalencia fenomenológica de los materiales en polvo, y que obedece a que éstos se comportan como sólidos o como fluidos según sean las condiciones de carga a las que son sometidos.
- La formulación presenta una relación directa entre las tensiones y la velocidad de deformación del material, lo cual permite trazar un paralelismo entre el comportamiento de un material en polvo y el de un fluido no newtoniano (fluido de Bingham).
- El modelo admite un amplio rango de aplicación, dentro del cual existen diferentes comportamientos físicos como los siguientes:
 1. El material se encuentra a baja densidad, puede permanecer en equilibrio estático bajo la acción de cargas derivadas de la gravedad y de la fricción interna entre sus granos constitutivos (material inmóvil).
 2. El material es capaz de fluir como un fluido cuando las fuerzas de fricción interna y/o de cohesión son superadas por la presencia de otras cargas externas (procesos de llenado de molde y de transferencia en pulvimetalurgia).
 3. El material puede aumentar su densidad cuando se le aplican cargas volumétricas compresivas (proceso de compactación en pulvimetalurgia).
- La densidad, interpretada en función de la cantidad de huecos o vacíos presentes en el material, representa:
 1. La principal variable fenomenológica medible en los materiales en polvo.
 2. La variable objetivo durante la optimización de los procesos industriales de la pulvimetalurgia, ya que en cada uno de ellos el punto óptimo es llegar a tener una distribución homogénea de densidades en el interior del material que forma parte del componente o pieza mecánica.
 3. El parámetro de endurecimiento del material, por medio del cual es posible caracterizar el estado de evolución o consolidación en el cual se encuentra, que va de tener granos con baja cohesión hasta llegar a ser un material totalmente consolidado luego de la compactación. Respecto de ello y respondiendo a las exigencias fenomenológicas, el modelo constitutivo de flujo presenta una marcada sensibilidad a las variaciones de densidad experimentadas por el material ante diversos tipos de cargas.

- La implementación algorítmica del modelo es inherentemente incremental y las no linealidades materiales que presenta la formulación se logran evitar por la aplicación de la metodología de integración IMPL-EX. Con ésta, se lleva a cabo un cálculo implícito a través del uso de variables explícitas (extrapoladas incrementalmente), lo cual redundaría en una matriz constitutiva de coeficientes constantes a lo largo del incremento (análoga a la matriz constitutiva elástica) y en una linealización incremental del problema.
- El modelo de flujo presenta cuatro parámetros característicos que, para caracterizar al material, deben ser definidos o calibrados en función de sus propiedades físicas y/o mecánicas. La calibración de los parámetros b_1 , s_1 y s_2 se obtiene directamente de los ensayos numéricos y experimentales presentados en el apéndice, mientras que la calibración del parámetro b_2 se hace de forma indirecta al definir un valor mínimo de cohesión.

Bibliografía

- [1] D.D. Adams and W.L. Wood. Comparison of hilber-hughes-taylor and bossak alpha-methods for the numerical integration of vibration equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(5):765–771, 1983.
- [2] P.K. Agarwal, L. Arge, and K. Yi. I/o-efficient construction of constrained delaunay triangulations. *Triangle web page*: <http://www-2.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>, 2004.
- [3] C. Agelet. *Análisis por el método de los elementos finitos de los procesos de conformado de laminados metalicos*. PhD thesis, RMEE - UPC, 1990.
- [4] N. Akkiraju, H. Edelsbrunner, F. Facello, P. Fu, Mucke. E., and C. Varela. Alpha shapes: Definition and software. In *Proceedings of the 1st International Computational Geometry Software Workshop*. Web page: <http://www.geom.umn.edu/software/cglist/GeomDir/shapes95defs/>, pages 63–66, 1995.
- [5] T.M. Apostol. *Calculus I-II*. Reverté Ediciones, S.A, 1996.
- [6] R. Aubry, S.R. Idelsohn, and E. Oñate. Particle finite element method in fluid mechanics including thermal convection-diffusion. *Computers & Structures*, 83:1459–1475, 2005.
- [7] I. Babuska and K. Aziz. On the angle condition in the finite element method. *SIAM Journal on numerical analysis*, 13(2):214–226, 1976.
- [8] V. Belikov and A. Semenov. Non-sibsonian interpolation on arbitrary system of points in eulerian space and adaptive generating isolines algorithm. In *Proc. of the 6th Intl. Conf. Greenwich University*, 1998.
- [9] T. Belytschko, W. Liu, and B. Moran. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. J. Wiley & Sons, 2000.
- [10] M. Bercovier, M. Engelman, M. Fortin, and N. Goldenberg. Simulation of forming processes by fem with a bingham fluid model. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 6:197–218, 1986.
- [11] R.B. Bird, W.E. Stewart, and E.N. Lightfoot. *Fenómenos de Transporte*. Editorial Reverté S.A., Barcelona, España, 1992.
- [12] A.M. Bolarín. *Efecto de variables pulvimetalúrgicas en el proceso de compactación de polvos metálicos base hierro*. PhD thesis, Universidad de Barcelona, 1999.

- [13] WAM. Brekelmans, J.D. Janssen, Van de Ven AAF, and G. de With. A eulerian approach for die compaction processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31:509–524, 1991.
- [14] N. Calvo. *Generación de mallas tridimensionales por métodos duales*. PhD thesis, Universidad Nacional del Litoral, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH), 2005.
- [15] N. Calvo, S. Idelsohn, and E. Oñate. The extended delaunay tessellation. *Engineering Computations*, 20:583–600, 2003.
- [16] J.C. Cante. *Simulación numérica de procesos de compactación de pulvimateriales. Aplicaciones de técnicas de cálculo paralelo*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 1995.
- [17] J.C. Cante, J. Oliver, C. González, J.A. Calero, and F. Benítez. On the numerical simulation of powder compaction processes: powder transfer modelling and characterisation. *Powder Metallurgy*, 48(1):85–92, 2005.
- [18] J.C. Cante, J. Oliver, and S. Oller. Simulación numérica de procesos de compactación de pulvimateriales. parte 1: Modelo constitutivo, de contacto y fricción. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 14(1):67–99, 1998.
- [19] J.C. Cante, J. Oliver, and S. Oller. Simulación numérica de procesos de compactación de pulvimateriales. parte 2: Validación y aplicaciones industriales. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 14(1):101–116, 1998.
- [20] J.L. Chenot, F. Bay, and L. Fourment. Finite element simulation of metal powder forming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30:1649–1674, 1990.
- [21] A.N. Chernikov and N.P. Chrisochoides. Parallel 2d constrained delaunay mesh generation. *ACM Transactions on Mathematical Software*, V, 2007.
- [22] L.P. Chew. Constrained delaunay triangulations. In *SCG '87: Proceedings of the third annual symposium on Computational geometry*, pages 215–222. ACM Press, 1987.
- [23] L.P. Chew. Constrained delaunay triangulations. *Algorithmica*, 4(1):97–108, 1989.
- [24] Wu Chuan-Yu, A.C.F. Cocks, O.T. Gillia, and D.A. Thompsom. Experimental and numerical investigations of powder transfer. *Powder Technology*, 138:216–228, 2003.
- [25] MSC Software Corporation. *AMSC.MARC*. MARC Analysis Research Corporation, 1999.
- [26] O. Coube, A.C.F. Cocks, and C.Y. Wu. Experimental and numerical study of die filling, powder transfer and die compaction. *Powder Metallurgy*, 48(1):68–76, 2005.
- [27] M.A. Crisfield. Re-visiting the contact patch test. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(3):435–450, 2000.

- [28] A. Curnier. A theory of friction. *International Journal of Solids Structures*, 20(7):637–647, 1984.
- [29] J. Desrues. *La localisation de la déformation dans les matériaux granulaires*. PhD thesis, Inst. National Polytech. de Grenoble, Grenoble, France, 1984.
- [30] F.L. DiMaggio and I.S. Sandler. Material models for granular soils. *J. of Eng. Mech. Div. ASCE*, pages 935–950, 1971.
- [31] D.C. Drucker. Coulomb friction, plasticity and limit loads. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, 21:71–74, 1954.
- [32] D.C. Drucker, R.E. Gibson, and D.J Henkel. Soil mechanics and work hardening theories of plasticity. *Trans ASCE*, 122:338–346, 1957.
- [33] H. Edelsbrunner and Mücke. E. Three-dimensional alpha shapes. *ACM Trans.Graphics*, 43-72, 1994.
- [34] H. Edelsbrunner, D. Kirkpatrick, and R. Seidel. On the shape of a set of points in the plane. *IEEE Transactions on information theory*, 29(4):551–559, 1983.
- [35] F. Del Pin F. *The meshless finite element method applied to a lagrangian particle formulation of fluid flows*. PhD thesis, Universidad Nacional del Litoral, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH), Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC), 2003.
- [36] Q. Feng and N.K. Prinja. Nafems benchmark tests for finite element modelling of contact, gapping and sliding. *Committed to Professional Development for Engineering Analysis & Simulation*, Ref: - R0081, Issue: 1, 2001.
- [37] P. George. *Automatic mesh generation, Applications to finite methods*. J. Wiley & Sons, 1991.
- [38] O González. Exact energy and momentum conserving algorithms for general models in nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:1763–1783, 2000.
- [39] H.J. Herrmann. Structures in deformed granular packings. *Granular Matter*, 3:15–18, 2001.
- [40] H. Hertz. Über die berührung fester elastischer körper. *J. Reine Angew Mathm*, 92:156–171, 1881.
- [41] Karlsson & Sorensen Hibbit. *ABAQUS/Standard, Version 5.8-1*. HKS Inc., 1998.
- [42] H.M. Hilber, T.J.R. Hughes, and R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5:283–292, 1977.
- [43] T. Hisatsune, T. Tabata, and S. Masaki. A yield criterion for porous materials with anisotropy caused by geometry or distribution of pores. *Journal of Engineering Material Technology - ASME*, 113:425–429, 1991.

- [44] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1987.
- [45] S. Idelsohn, E. Oñate, and Del F. Pin. The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61:964–989, 2004.
- [46] S.R. Idelsohn, N. Calvo, and E. Oñate. Polyhedrization of an arbitrary 3d point set. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:2649–2667, 2003.
- [47] S.R. Idelsohn, E. Oñate, N. Calvo, and F. Del Pin. The meshless finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:893–912, 2003.
- [48] S.R. Idelsohn, E. Oñate, and F. Del Pin. A lagrangian meshless finite element method applied to fluid-structure interaction problems. *Computer & Structures*, 81:655–671, 2003.
- [49] A. Istúriz. *Estudio experimental del llenado de moldes pulvimetalúrgicos*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España, 2006.
- [50] C. Kane, J.E. Marsden, M. Ortiz, and M. West. Variational integrators and the newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49:1295–1325, 2000.
- [51] B.H. Kaye. Powder mixing. *Powder Technology Series*,, 1997.
- [52] A.R. Khoei. Numerical simulation of powder compaction processes using an inelastic finite element analysis. *Material & Design*, 23:523–529, 2002.
- [53] N. Kikuchi and J.T. Oden. Contact problem in elasticity: study of variational inequalities and finite element methods. *SIAM Stud. Appl. Math.*, New York, 1988.
- [54] J.T. Klosek. The integration of fluid dynamics with a discrete-element modeling system: algorithms, implementation and application. *MIT - Theses*, 1997.
- [55] A.W.A. Konter. Advanced finite element contact benchmarks. *FENET EU Thematic Network - RTD Durability&LifeExtension*, Report No: FENET-UNOTT-DLE-09 - Netherlands Institute for Metal Research, 2005.
- [56] S. Krenk. Energy conservation in newmark based time integration algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:6110–6124, 2006.
- [57] D. Kuhl and M.A. Crisfield. Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45:569–599, 1999.
- [58] W. Lai, D. Rubin, and E. Kremlpl. *Introduction to continuum mechanics*. Butterworth-Heinmann, 1993.
- [59] C.H. Lee and S. Kobagashi. New solutions to rigid-plastic deformation problems using a matrix method. *Eng. Ind. Trans. ASME*, 95:865, 1973.

- [60] A. Lew, J.E. Marsden, M. Ortiz, and M. West. An overview of variational integrators. *Finite Element Methods: 1970's and Beyond*, 2003.
- [61] R.W. Lewis and A.R. Khoei. Numerical modelling of large deformation in metal powder forming. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 159:291–328, 1998.
- [62] R.W. Lewis and A.R. Khoei. A plasticity model for metal powder forming processes. *International Journal of Plasticity*, 12:1659–1692, 2001.
- [63] J. Lubliner. *Plasticity Theory*. MacMillan, New York, 1990.
- [64] D.G Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, 1984.
- [65] L. Malvern. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Englewood Cliffs - Prentice-Hall, Inc, 1969.
- [66] N.M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, pages 67–94, 1959.
- [67] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, and S. Chiu. *Spatial tessellations: Concepts and applications of Voronoi diagrams*. Wiley, 2000.
- [68] M. Oldenburg and L. Nilsson. The position code algorithm for contact searching. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:361–386, 1994.
- [69] J. Oliver and C. Agelet. *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Ediciones UPC, 2000.
- [70] J. Oliver, J.C. Cante, R. Weyler, C. González, and J. Hernández. *Particle finite element methods in solid mechanics problems*, volume 1. Springer Verlag, 2007.
- [71] J. Oliver, A.E. Huespe, S. Blanco, and D.L. Linero. Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with the strong discontinuity approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:7093–7114, 2006.
- [72] J. Oliver, A.E. Huespe, and J.C. Cante. An implicit/explicit integration scheme to increase computability of non-linear material and contact/friction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:1865–1889, 2008.
- [73] J. Oliver, S. Oller, and Cante J.C. A plasticity model for simulation of industrial powder compaction processes. *International Journal of Solids and Structures*, 33:3161–3178, 1996.
- [74] S. Oller. *Fractura Mecánica. Un Enfoque Global*. CIMNE, Barcelona, España, 2001.
- [75] A. Orlando. *Analysis of adaptive finite element solution in elastoplasticity with reference to transfer operation techniques*. PhD thesis, University of Wales, Swansea, UK, 2002.
- [76] A. Orlando and D. Peric. Analysis of transfer procedures in elastoplasticity based on the error in the constitutive equations: Theory and numerical illustration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:1595–1631, 2004.

- [77] M. Ortiz and J.J. Quigley IV. Adaptive mesh refinement in strain localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 90:781–804, 1991.
- [78] E. Oñate. La formulación del flujo viscoplástico y sus diversas aplicaciones prácticas por el método de los elementos finitos. *Revista de Obras Públicas*, Febrero - Marzo:115–129, 1980.
- [79] E. Oñate, S.R. Idelsohn, F. Del Pin, and R. Aubry. The particle finite element method. an overview. *International Journal of Computational Methods*, 1(2):267–307, 2004.
- [80] E. Oñate, J. Rojek, M. Chiumenti, S.R. Idelsohn, F. Del Pin, and R. Aubry. Advances in stabilized finite element and particle methods for bulk forming processes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:6750–6777, 2006.
- [81] A. Pandolfi, C. Kane, J.E. Marsden, and M. Ortiz. Time-discretized variational formulation of non-smooth frictional contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:1801–1829, 2003.
- [82] E. Pavier. *Caracterisation du comportement d'une poudre de fer pour le procede de compression en matrice*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1998.
- [83] E. Pavier and P. Dorémus. Friction behaviour of an iron powder investigated with two different apparatus. *International Workshop on Modelling of Metal Powder Forming Processes - Grenoble*, pages 335–344, 1997.
- [84] D. Peric, Ch. Hochard, M. Dutko, and D.R.J. Owen. Transfer operators for evolving meshes in small strain elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 137:331–344, 1996.
- [85] E.G. Petöcz. *Formulation and analysis of stable time-stepping algorithms for contact problems*. PhD thesis, Stanford University, 1997.
- [86] M.A. Puso and T.A. Laursen. A mortar segment-to-segment frictional contact method for large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:4891–4913, 2004.
- [87] E. Rabinowicz. *Friction and wear of materials*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [88] N.V. Rege. *Computational modeling of granular materials*. MIT - Dept. of Civil and Environment Engineering, 1996.
- [89] M.D. Riera, A. Istúriz, J.M. Prado, J.C. Cante, J. Oliver, and C. González. Flow regime analysis during the filling stage in powder metallurgy processes: experimental study and numerical modelling. *Granular Matter*, in press.
- [90] J.W. Rudnicki and J.R. Rice. Condition for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23:371, 1975.
- [91] AMES S.A. Empresa industrial de componentes mecánicos sinterizados. *Ctra. Nac. 340 Km 1242, Pol. Ind. Les Fallulles, 08620 San Vicenc dels Horts, España*.

- [92] J.R. Shewchuk. Triangle: Engineering a 2d quality mesh generator and delaunay triangulator. In M.C. Lin and D. Manocha, editors, *Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering*, volume 1148 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 203–222. Springer-Verlag, 1996. From the First ACM Workshop on Applied Computational Geometry.
- [93] J.C. Simo and T.J.R. Hughes. Elastoplasticity and viscoplasticity, computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48:101–119, 1985.
- [94] J.C. Simo and T.A. Laursen. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers & Structures*, 42(1):97–116, 1992.
- [95] J.C. Simó and O. González. *Recent results of the numerical integration of infinite-dimensional hamiltonian systems*. Recent Developments In Finite Element Analysis, CIMNE, 1994.
- [96] A. Sluzalec. Yield function in simulation of powder metal forming. *Computational Plasticity II: Models, Software and Applications*, Swansea: Pineridge Press, pages 995–1005, 1989.
- [97] C.T. Veje, D.W. Howell, and R.P. Behringer. Kinematics of a two-dimensional granular couette experiment at the transition to shearing. *Physical Review E*, 59(1):739–745, 1999.
- [98] R. Weyler. *Simulación numérica de procesos de compactación y extrusión de materiales pulverulentos. Aplicación a la pulvimetalurgia industrial*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería, 2000.
- [99] B. Wikman, H.A. Haggblad, and M. Oldenburg. Modelling the powder-wall friction for simulation of iron powder pressing. *International Workshop on Modelling of Metal Powder Forming Processes - Grenoble*, pages 149–157, 1997.
- [100] W.L. Wood, M. Bossak, and O.C. Zienkiewicz. An alpha modification of newmarks's method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15:1562–1566, 1980.
- [101] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. John Wiley & Sons, LTD, 2002.
- [102] P. Wriggers and K. Fischer. Recent new developments in contact mechanics. *4th European LS-DYNA Users Conference. Plenary Session I*, A-I:51–71, 2003.
- [103] X.L. Xu and K. Harada. Automatic surface reconstruction with alpha-shape method. *Visual Computer*, 19:431–443, 2003.
- [104] Z.H. Zhong and L. Nilsson. A contact searching algorithm for general 3-d contact-impact problems. *Computers & Structures*, 34(2):327–335, 1990.
- [105] Zhi-Hua Zhong and J. Mackerle. Static contact problems - a review. *Engineering Computations - Feature & Review Articles*, 9:3–37, 1992.
- [106] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *El Método de los Elementos Finitos*. McGraw-Hill, 2000.

- [107] O.C. Zienkiewicz and P.N. Godbole. Flow of plastic and visco-plastic solids with special reference to extrusion and forming processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8:3–16, 1974.