Vol. 17, 4, 427–445 (2001)

Revista Internacional de
Métodos Numéricos para
Cálculo y Diseño en Ingeniería

Estudio mediante elementos finitos del fenómeno de pandeo lateral en perfiles conformados en frío

Miguel Ángel Martínez, Manuel Doblaré y Luis Gracia

Departamento de Ingeniería Mecánica
Centro Politécnico Superior
Universidad de Zaragoza
María de Luna, 3, 50015 Zaragoza
Tel.: 34-976-761 912, Fax: 34-976-762 578
e-mail: miguelam@posta.unizar.es

Resumen

El pandeo lateral es un fenómeno de inestabilidad que adquiere especial importancia en perfiles esbeltos con pequeña rigidez torsional y pequeña rigidez a flexión en el plano perpendicular al de aplicación de la carga. Este es el caso de la mayoría de los perfiles conformados en frío.

Muchas normativas proponen de forma casi exclusiva fórmulas envolventes aproximadas en el caso de perfiles con simetrías y apoyos simples. Por ejemplo, en el Eurocódigo 3, Parte 5 o en la normativa americana, AISC, Parte 5, existen tablas que contemplan el efecto de diversos tipos de cargas exteriores o de diferentes condiciones de apoyo, pero sin embargo, no existe ninguna tabla o fórmula general que contemple toda la variedad existente de problemas de pandeo lateral.

En el presente artículo se analiza el fenómeno de pandeo lateral mediante su simulación por elementos finitos. Para ello se ha implementado un elemento barra no lineal geométricamente exacto, es decir, válido para grandes desplazamientos y rotaciones, que además incorpora un séptimo grado de libertad asociado al alabeo. También ha sido imprescindible desarrollar un algoritmo de continuación que permita establecer un control mixto de carga y desplazamientos para alcanzar y sobrepasar los puntos críticos, ya sean límite o de bifurcación. Para ello se ha elegido un algoritmo Newton-Raphson con control hiperelíptico.

Se ha estudiado una amplia casuística que abarca varios perfiles conformados en frío susceptibles de sufrir pandeo lateral, realizando el análisis para diferentes longitudes, distintos tipos de carga y condiciones de apoyo. Como resultado se han obtenido una serie de gráficas que permiten predecir la carga o momento crítico de pandeo para gran cantidad de situaciones. Estos datos sirven para corroborar la validez de la norma en los pocos casos que contempla y de inestimable ayuda al calculista a la hora de enfrentarse en la práctica con el diseño mediante estas tipologías de perfiles cada vez más utilizadas.

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF THE PROBLEM IN COLD FORMED PROFILES

Summary

Lateral-torsional buckling is an instability phenomenon which has special importance for slender beams, normally with thin-walled open cross-section, characterised by a small torsional stiffness and a small bending stiffness in the minor axis. This is the case of most of the cold-working profiles.

Most of the standards propose only formulae for cross-sections with simple or double symmetry and for uncomplicated load or boundary conditions cases. For example, in Eurocode 3, Part 5 or American standard AISC, Part 5, some tables include the effect of different kind of loads and boundary conditions, but a general formula for whatever condition of a lateral buckling problem is missed. The present article analyses this instability effect by finite element simulation. A fully non-linear geometrically exact beam formulation is employed, incorporates an additional degree of freedom associated with the warping amplitude. Also a continuation algorithm, able to incorporate a mixed load-displacement control has been employed in order to reach and snap-through the critic points. A Newton-Raphson scheme is used joined with a hiperelliptical arc-length control.

A wide collection examples has been studied; especially some cases that are not included in any standard

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Noviembre 1999

and where lateral buckling can be an important problem. The analysis incorporates different beam lengths, several loads and boundary conditions. The main result consists of a collection of graphs that predicts the exact critical load for these situations. These cases demonstrate that most of standards only establish approximate but conservative critical loads.

INTRODUCCIÓN

Las vigas sometidas a flexión con apoyos inadecuados y con rigidez a torsión y a flexión en el plano del pandeo pequeñas comparadas con la rigidez a flexión en el plano principal son susceptibles de padecer el efecto del pandeo lateral. Este fenómeno es consecuencia de la compresión inducida en el cordón comprimido de la viga que tiende a pandear en un plano perpendicular a esta cuando las compresiones alcanzan su valor crítico. Una vez alcanzado este, la pieza se deforma conjuntamente a flexión en el plano de menor inercia y a torsión.

Tanto la norma de aplicación en España para estructura metálica (NBE EA-95[9]), como las de aplicación en el ámbito europeo (Eurocódigo[5]), o americano (AISC[1]) únicamente contemplan la comprobación a pandeo lateral para casos relativamente simples (secciones con doble eje de simetría o simétricas respecto al eje menor, y con condiciones de apoyo y estado de cargas muy concretas) según una fórmula del tipo

$$M_{cr}^2 = C_b^2 \left(\frac{\pi^4}{(\beta L)^4} E^2 I_y I_a + \frac{\pi^2}{(\beta L)^2} EGI_y J \right)$$

Para el resto de casos es de aplicación la fórmula envolvente

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EGI_y J}$$

En el presente artículo se pretende elaborar un método alternativo capaz de predecir con mayor exactitud las cargas críticas para pandeo lateral para cualquier tipo de sección, tipo de cargas, o condiciones de apoyo.

Habitualmente se emplean dos clases de métodos para la obtención de cargas críticas de pandeo. Los primeros consisten en un análisis de autovalores del problema con no linealidades geométricas linealizado y requieren un paso previo de perturbación para la obtención de la matriz geométrica de la estructura. Este tipo de análisis requiere un menor tiempo computacional, pero únicamente permite obtener una estimación de los modos y cargas de pandeo, válida en el caso de que la geometría de la estructura en el momento de producirse el pandeo sea esencialmente la misma que en el instante inicial.

El segundo tipo de métodos consiste en la realización de un análisis geométricamente no lineal completo, de tal manera que la aparición de los puntos límite se puede detectar mediante un control de los pivotes en la descomposición de la matriz o con la gráfica de la trayectoria de equilibrio carga-desplazamiento. Estos métodos requieren un control especial del proceso incremental, de tal manera que se puedan alcanzar e incluso sobrepasar los puntos límite para su posterior detección. A la combinación de los métodos de obtención de solución en problemas no lineales conjuntamente con este tipo de control se les denominan algoritmos de continuación. Estos métodos son generalmente más costosos computacionalmente pero permiten la obtención exacta del punto de pandeo bajo hipótesis de grandes desplazamientos y deformaciones. Las primeras referencias a este tipo de algoritmos aparecen con Riks[10] y continúan con Crisfield,[2,3] Schweizerhof y Wriggers[11] y Felippa[6] entre otros muchos.

Un requisito previo a la aplicación de este tipo de métodos en la solución de problemas de pandeo como los que nos ocupan es la utilización de una formulación de barra que contemple hipótesis de grandes desplazamientos y rotaciones. Simo y Vu-Quoc[12,13,14] han desarrollado una formulación geométricamente exacta dentro de las hipótesis cinemáticas planteadas. Es posible también demostrar que la presencia o no del alabeo provoca resultados cuantitativamente muy diferentes como se puede observar en Sokolnikoff[15] y Timoshenko,[16] siendo necesario incluir este efecto dentro de la formulación de la barra, lo que se consigue mediante el empleo de un séptimo grado de libertad adicional (ver Simo y Vu-Quoc[14]).

El presente artículo comienza con una descripción de la formulación de la barra empleada, empezando por las hipótesis cinemáticas de partida y el espacio de configuraciones, pasando por la expresión de la variación de energía interna de deformación y relaciones de comportamiento, ecuaciones de equilibrio, hasta llegar a la formulación débil del problema. Para poder resolver el problema dentro de un contexto de elementos finitos es necesario realizar una doble discretización espacio-temporal, así como una linealización de las expresiones con respecto a los grados de libertad del problema. El apartado de ejemplos se divide en dos partes, en la primera se somete al método de detección de cargas de pandeo a una serie de ejemplos con resultados conocidos desde el punto de vista analítico con objeto de establecer la exactitud del mismo, y por último se elaboran una serie de gráficas de pandeo para casos no contemplados en la normativa donde se puede observar la potencia del método expuesto.

HIṔOTESIS CINEMÁTICAS. ESPACIO DE CONFIGURACIONES

Se considera una barra cuya configuración inicial denotaremos por $\mathbf{B} \subset \Re^3$. Asimismo se supone que la barra inicialmente es recta con una longitud L. Para obtener una parametrización adecuada se introduce un sistema de referencia ortogonal $\{O, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ con coordenadas asociadas $\{X_1, X_2, S\}$, de tal forma que el eje de la barra se encuentra inicialmente a lo largo del eje $\mathbf{E}_3$. Las secciones ocupan planos paralelos al formado por $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$ y las regiones del plano que ocupan se denotan por $\bar{\Omega} \subset \Re^2$ y su contorno por $\partial\Omega$. Por tanto, se puede considerar la parametrización de una barra recta de longitud L como $\mathbf{B} = \bar{\Omega} \times [0, L]$ y el vector de posición de un punto material (configuración inicial) $\mathbf{X}(X_1, X_2, S)$ como

$$\mathbf{X} = X_\alpha \mathbf{E}_\alpha + S\mathbf{E}_3 \quad \alpha = 1, 2; \quad (X_1, X_2) \in \bar{\Omega}; \quad S \in [0, L] \tag{1}$$

Se considera a su vez que el centro de gravedad de la sección tiene las coordenadas $(0, 0, S)$.

La hipótesis cinemáticas consideradas en el modelo son: "Las secciones rectas inicialmente planas y ortogonales a la línea de centros de gravedad, no tienen porqué permanecer planas ni ortogonales a dicha línea a lo largo de la deformación. A su vez, los desplazamientos de puntos de la sección en la dirección de la línea de centros de gravedad pueden ser diferentes de unas secciones a otras. La única restricción es que no aparecen deformaciones longitudinales en la dirección de los ejes $\mathbf{E}_1(S), \mathbf{E}_2(S)$. Finalmente pueden aparecer desplazamientos y rotaciones finitas".

Atendiendo a estas hipótesis, la configuración deformada queda definida de la siguiente forma:

a) La línea de centros de gravedad en la configuración deformada viene dada por la curva $\boldsymbol{\phi}_0 \colon [0, L] \to \Re^3$.

b) Una sección cualquiera, inicialmente plana y perpendicular a la línea de centros de gravedad, experimentará, en general, una rotación finita respecto a un sistema de ejes que pasan por un punto S, con vector de posición $\mathbf{S} = S_\alpha \mathbf{E}_\alpha + S_3 \mathbf{E}_3$, denominado Centro de Esfuerzos Cortantes (CEC), y un alabeo (desplazamientos fuera del plano de la sección).

b.1) La rotación finita de la sección queda determinada especificando la posición de una base ortogonal unida a dicha sección a lo largo de la deformación $\{\mathbf{t}_I(S)\}_{I=1,2,3}$, relativa a la base inicial material $\{\mathbf{E}_I(S)\}$. Esto es equivalente a describir una familia de transformaciones ortogonales $\mathbf{\Lambda}: [0, L] \rightarrow SO(3)$, que definen unívocamente la orientación de la referencia de la forma

$$\mathbf{t}_I(S) = \mathbf{\Lambda}(S)\mathbf{E}_I = \Lambda_{iI}(S)\mathbf{e}_i \tag{2}$$

con $\mathbf{t}_3(S)$ el vector unitario normal al plano de la sección en la configuración deformada, en ausencia de alabeo que, en general, no será tangente a la línea de centros de gravedad. También podemos establecer la relación anterior como $\mathbf{\Lambda}(S) = \mathbf{t}_I(S) \otimes \mathbf{E}_I = \Lambda_{iI}(S)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_I$

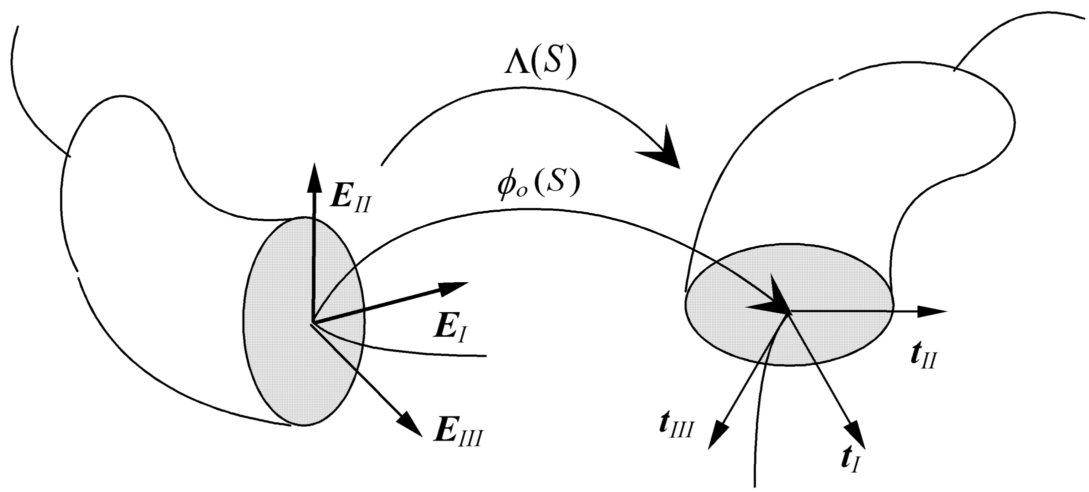

Figura 1. Transformación de la referencia inicial a la deformada

b.2) El alabeo, desplazamiento de los puntos de la sección fuera del plano de la misma es definido por medio de un desplazamiento en la dirección $\mathbf{t}_3(S)$ en la configuración deformada y viene dado por el producto de dos funciones: $f(X_1, X_2)$, $f: \Omega \rightarrow \Re$, llamada función de alabeo y dependiente sólo de la geometría de la sección, y $p(S)$, $p: [0, L] \rightarrow \Re$, denominada amplitud de alabeo y que representará el séptimo grado de libertad adicional considerado en la formulación aquí empleada.

Por tanto, si se denota como $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(X_1, X_2, S)$ el vector posición de un punto material en la configuración deformada, que inicialmente se encontraba localizado en $\mathbf{X} = (X_1, X_2, S)$, dicha posición vendrá determinada de forma unívoca por el conjunto de funciones descritas anteriormente $\{\boldsymbol{\phi}_0(S), \mathbf{\Lambda}(S), p(S)\}$, pudiendo escribirse

$$\boldsymbol{\phi}(X_1, X_2, S) = \boldsymbol{\phi}_0(S) + X_\alpha \mathbf{t}_\alpha(S) + f(X_1, X_2)p(S)\mathbf{t}_3(S) \tag{3}$$

Como la configuración tridimensional $\boldsymbol{\phi}($ está definida de forma única por la tripleta de funciones $\Phi \equiv (\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{\Lambda}, p)$ dada en $[0, L]$ y tomando valores en $\Re^3 \times SO(3) \times \Re$ a partir de ahora nos referiremos a

$$\mathbf{C} := \{\mathbf{\Phi} \equiv (\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{\Lambda}, p) : [0, L] \rightarrow \Re^3 \times SO(3) \times \Re\} \tag{4}$$

como la configuración espacial de la barra.

El siguiente paso es la obtención del gradiente de deformación, con objeto de hallar una expresión adecuada al modelo expuesto. Siguiendo el desarrollo presentado en Simo y Vu-Quoc[14] se puede obtener $\mathbf{F}(X) = D\boldsymbol{\phi}_t(X)$ escribiéndose

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Lambda}(1 + p\mathbf{E}_3 \otimes \boldsymbol{\nabla} f + [\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Lambda}^T(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_0) + (fp)'\mathbf{E}_3] \otimes \mathbf{E}_3) \tag{5}$$

donde $\mathbf{\Gamma}$ y $\mathbf{\Omega}$ representan la deformación y curvaturas materiales, que vienen dadas por las siguientes expresiones

$$\mathbf{\Gamma} := \mathbf{\Lambda}^T(\boldsymbol{\phi}_0' - \mathbf{t}_3) \equiv \mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{\phi}_0' - \mathbf{E}_3, \qquad \mathbf{\Omega} := \mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{\omega} \tag{6}$$

$$\frac{\partial\mathbf{\Lambda}(S,t)}{\partial S} = \hat{\boldsymbol{\omega}}(S,t)\mathbf{\Lambda}(S,t), \qquad \frac{\partial\mathbf{\Lambda}(S,t)}{\partial t} = \hat{\mathbf{w}}(S,t)\mathbf{\Lambda}(S,t) \tag{7}$$

siendo $\hat{\boldsymbol{\omega}}(S,t) \in SO(3)$ y $\hat{\mathbf{w}}(S,t) \in SO(3)$ dos tensores antisimétricos, con vectores de giro asociados $\boldsymbol{\omega}(S,t) \in \Re^3$ y $\hat{\mathbf{w}}(S,t) \in \Re^3$ que representan la curvatura y velocidad angular espaciales respectivamente.

POTENCIA MECÁNICA. RELACIÓN DE COMPORTAMIENTO

Se denota por $\mathbf{P}$ el primer tensor de Piola-Kirchhoff expresado en la base material $\{\mathbf{E}_I(S)\}$.

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_\alpha \otimes \mathbf{E}_\alpha + \mathbf{T}_3 \otimes \mathbf{E}_3 \tag{8}$$

de forma que $\mathbf{T}_3 = \mathbf{P}\mathbf{E}_3$ es el vector de fuerzas sobre la sección neta por unidad de área de referencia, actuando en la configuración deformada.

La potencia mecánica interna o variación respecto del tiempo de la energía de deformación interna almacenada en la barra se expresa en función de $\mathbf{P}$ como

$$\dot{V} := \int_{\Omega\times[0,L]} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} d\Omega dS \tag{9}$$

Aplicando las hipótesis cinemáticas antes descritas y siguiendo el desarrollo expuesto en Simo y Vu-Quoc[14] es posible llegar a la expresión en función de las deformaciones generalizadas

$$\dot{V} :\equiv \int_{[0,L]} [\mathbf{N}\cdot\mathbf{\Gamma} + \mathbf{M}\cdot\mathbf{\Omega} + N_f\dot{p} + M_f\dot{p}']dS \tag{10}$$

donde $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$, N_f, M_f son los esfuerzos actuantes sobre cada sección definidos como

$$\mathbf{N} := \Lambda^T\mathbf{n}, \quad \text{con } \mathbf{n} = \int_\Omega \mathbf{T}_3 d\Omega \tag{11a}$$

$$\mathbf{M} := \Lambda^T\mathbf{m}, \quad \text{con } \mathbf{m} = \int_\Omega (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_0) \times \mathbf{T}_3 d\Omega \tag{11b}$$

$$N_f := \mathbf{t}_3 \cdot \int_\Omega [f_{,\alpha}\mathbf{T}_\alpha + f\mathbf{T}_3 \times \boldsymbol{\omega} + f'\mathbf{T}_3]d\Omega \tag{11c}$$

$$M_f := \mathbf{E}_3 \cdot [\mathbf{\Lambda}\int_\Omega \lfloor f\mathbf{T}_3 d\Omega\rfloor \equiv \mathbf{t}_3 \cdot \int_\Omega f\mathbf{T}_3 d\Omega \tag{11d}$$

con $\mathbf{n} = n_i\mathbf{e}_i \equiv N_I\mathbf{t}_I$ y $\mathbf{m} = m_i\mathbf{e}_i \equiv M_I\mathbf{t}_I$ los esfuerzos y momentos actuantes sobre la sección en la configuración deformada, es decir, las minúsculas se reservan para la versión material y las mayúsculas para la versión convectiva sin más que observar que $\mathbf{E}_I \equiv \mathbf{\Lambda}^T\mathbf{t}_I$ con lo que $\mathbf{N} = N_I\mathbf{E}_I$ y $\mathbf{M} = M_I\mathbf{E}_I$. En estas expresiones se puede observar también cómo las deformaciones asociadas a los esfuerzos $\mathbf{N}$ y $\mathbf{M}$ son $\mathbf{\Gamma}$ y $\mathbf{\Omega}$ respectivamente.

Por último, N_f y M_f son los esfuerzos equivalentes en el caso de deformaciones finitas al bicortante y bimomento en la teoría lineal de torsión no uniforme. De hecho, la relación entre ellos es la misma que en la teoría lineal. La deformación asociada a N_f es la amplitud del alabeo p, mientras que para M_f es su derivada con respecto al parámetro de arco S, p'.

En función de los esfuerzos y deformaciones materiales la potencia mecánica puede reescribirse como

$$\dot{V} \equiv \int_{[0,L]} [\mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{m} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}} + N_f \dot{p} + M_f \dot{p}'] dS \tag{12}$$

donde el operador $(\tilde{\cdot})$ tiene en cuenta los efectos del sistema de referencia móvil $\{\mathbf{t}_I\}$ fijo a la sección y por tanto no inercial

$$(\tilde{\cdot}) := \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) - \mathbf{w} \times (\cdot) \tag{13}$$

Finalmente estamos en condiciones de plantear las ecuaciones de comportamiento entre esfuerzos y deformaciones generalizadas. Suponiendo un comportamiento hiperelástico, se postula la existencia de una función de energía almacenada $\Psi = \Psi(S, \boldsymbol{\phi}_0, \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\phi}_0', \boldsymbol{\Lambda}', p, p')$, dependiente de la configuración y de su primera derivada, de manera que imponiendo la invarianza frente a movimientos de sólido rígido, permite escribir

$$\Psi = \Psi(S, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Omega}, p, p') \tag{14}$$

y

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \quad \mathbf{M} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\Omega}} \quad N_f = \frac{\partial \Psi}{\partial p} \quad M_f = \frac{\partial \Psi}{\partial p'} \tag{15}$$

que, en el caso de deformaciones infinitesimales, conduce a las siguientes ecuaciones de comportamiento (el desarrollo completo se encuentra en Simo and Vu-Quoc[14])

$$\mathbf{N} = \lfloor GA\Gamma_\alpha - Ge_{\alpha\beta} S_\beta p \rfloor \mathbf{E}_\alpha + EA\Gamma_3 \mathbf{E}_3 \tag{16a}$$
$$\mathbf{M} = EJ_{\alpha\beta}\Omega_\beta \mathbf{E}_\alpha + G[Jp + J_0(\Omega_3 - p)]\mathbf{E}_3 \tag{16b}$$
$$N_f = G\lfloor e_{\alpha\beta} S_\beta \Gamma_\beta + (J - J_0)\Omega_3 + (J_S - J)p \rfloor \tag{16c}$$
$$M_f = E\Xi p' \tag{16d}$$

con módulo de Young E, módulo de rigidez transversal G y tensor de inercia respecto de los ejes $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$ $J_{\alpha\beta}$.

$$J_{\alpha\beta} := e_{\alpha\theta} e_{\beta v} \int_\Omega X_\theta X_v d\Omega \tag{17a}$$

donde J_0 es momento de inercia polar respecto al centro de gravedad.

$$\mathbf{J}(S) = J_{\alpha\beta} \mathbf{E}_\alpha \otimes \mathbf{E}_\beta + J_0 \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 \tag{17b}$$

donde J_S es momento de inercia polar respecto al CEC, J constante torsional de Saint-Venant y Ξ constante de alabeo de Vlasov.

ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Partiendo de la ecuación local de variación de la cantidad de movimiento y denotando por $\mathbf{T}_{I,I} = \text{Div}\mathbf{P}$, se escribe

$$\mathbf{T}_{I,I} + \rho_0 \mathbf{B} = \rho_0 \ddot{\boldsymbol{\phi}} \tag{18}$$

donde $\mathbf{B}(X)$ representa las fuerzas distribuidas por unidad de masa de referencia y ρ_0 la densidad en la referencia inicial. Denotando ahora por

$$\bar{M}_f := \mathbf{t}_3 \lfloor \int_{\partial\Omega} f \mathbf{T}_\alpha v_\alpha dL + \int_\Omega f \rho_0 \mathbf{B} d\Omega \rfloor \tag{19}$$

el bimomento por unidad de longitud distribuido a lo largo de la barra generado por las fuerzas volumétricas en todo el dominio y por las fuerzas superficiales en el contorno, es posible llegar a la siguiente ecuación de equilibrio que relaciona N_f con M_f.

$$M_f' - N_f + \bar{M}_f = \rho_0 \Xi \lfloor \ddot{p} - |\mathbf{w} \times \mathbf{t}_3|^2 p \rfloor \tag{20}$$

que recuerda en gran medida a su equivalente lineal.

De igual forma, si denominamos $\mathbf{l}(S,t)$ a la cantidad de movimiento y $\mathbf{h}(S,t)$ al momento cinético relativo a $\boldsymbol{\phi}_0(S,t)$ resultantes a lo largo de una sección, es decir

$$\mathbf{l} := \int_\Omega \rho_0 \dot{\boldsymbol{\phi}} d\Omega, \quad \mathbf{h} := \int_\Omega \rho_0 (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_0) \times \dot{\boldsymbol{\phi}} d\Omega \tag{21}$$

las ecuaciones de conservación quedan formuladas de la siguiente forma

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial S} + \bar{\mathbf{n}} = \rho_0 A \ddot{\boldsymbol{\phi}}_0, \quad \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial S} + \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_0}{\partial S} \times \mathbf{n} + \bar{\mathbf{m}} = \dot{\mathbf{h}} \tag{22}$$

donde $\bar{\mathbf{n}}$ y $\bar{\mathbf{m}}$ y son las fuerzas y momentos por unidad de longitud externos y donde la variación del momento angular viene dada por la siguiente expresión

$$\dot{\mathbf{h}} = \rho_0 \boldsymbol{\Lambda} \lfloor \mathbf{J}\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{W} \times \mathbf{J}\mathbf{W} + \Xi \{ p^2 \lfloor \mathbf{P}_{E_3} \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{W} \times \mathbf{P}_{\mathbf{E}_3} \mathbf{W} \rfloor + 2p\dot{p} \mathbf{P}_{\mathbf{E}_3} \mathbf{W} \} \rfloor \tag{23}$$

donde $\mathbf{P}_{\mathbf{E}_3}$ representa la proyección ortogonal paralela a $\mathbf{E}_3$ definidas por

$$\mathbf{P}_{\mathbf{E}_3} := [\mathbf{1} - \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3] \tag{24}$$

FORMULACIÓN VARIACIONAL

El siguiente paso de la formulación consiste en aplicar el principio de los trabajos virtuales (formulación débil) a las ecuaciones de equilibrio planteadas en el epígrafe anterior. En el siguiente desarrollo se ha considerado únicamente el caso estático, que es el de nuestro interés, sin que ello implique una pérdida de generalidad.

Variaciones admisibles. Formulación débil

La formulación débil se obtiene a través del producto escalar de las ecuaciones (20, 22) por variaciones admisibles, es decir elementos del espacio tangente a la configuración $T_\phi \mathbf{C}$ definido como

$$T_{\boldsymbol{\phi}}\mathbf{C} := \{(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\Lambda}, q) | (\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, q) \in V\} \tag{25}$$

e integrando por partes el resultado sobre la longitud de la barra. Para ello en primer lugar expresamos las ecuaciones (20, 22) de la siguiente forma compacta

$$\mathbf{B}^*(\Phi)\mathbf{r} - \bar{\mathbf{f}} = 0 \quad \text{en } [0, L] \tag{26}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de esfuerzos, $\bar{\mathbf{f}}$ es la resultante de fuerzas exteriores y $\mathbf{B}^*$ es un operador diferencial dependiente de la configuración definido como

$$\mathbf{B}^*(\Phi)\mathbf{r} := \left\{ \begin{array}{c} -\mathbf{n} \\ -\mathbf{m} - \boldsymbol{\phi}_0 \times \mathbf{n} \\ -M_f' + N_f \end{array} \right\}_{7\times1}, \quad \mathbf{r} := \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{n} \\ \mathbf{m} \\ N_f \\ M_f \end{array} \right\}_{8\times1}, \quad \bar{\mathbf{f}} := \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{n}} \\ \bar{\mathbf{m}} \\ \bar{M}_f \end{array} \right\}_{7\times1} \tag{27}$$

Para obtener las variaciones en el espacio anteriormente definido, es preciso definir una curva en el espacio de configuraciones $\tau \to \Phi_\tau^\eta \in \mathbf{C}$, tomando como configuración de partida $\Phi \in \mathbf{C}$ y en la dirección de variación admisible $\eta \in V$ con

$$V := \{\boldsymbol{\eta} := (\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, q) : [0, L] \to \Re^3 \times \Re^3 \times \Re \,|\boldsymbol{\eta}|_{s=0,L} = (0, 0, 0)\} \tag{28}$$

$$\Phi_\tau^\eta := (\boldsymbol{\phi} + \tau\mathbf{u}, \exp\lfloor\tau\hat{\boldsymbol{\theta}}\rfloor\boldsymbol{\Lambda}, p + \tau q) \in \mathbf{C}, \quad \text{con} \quad \Phi_\tau^\eta|_{\tau=0} = \Phi \tag{29}$$

es decir $\lfloor d\Phi_\tau^\eta / d\tau \rfloor_{\tau=0}$ representa la derivada Gateâux de $\Phi \in \mathbf{C}$ en la dirección $\boldsymbol{\eta} \in V$. Multiplicando (26) por una variación admisible $\boldsymbol{\eta}$ arbitraria e integrando como se ha indicado, se obtiene la siguiente expresión del trabajo virtual

$$G(\Phi, \eta) := \int_0^L \mathbf{B}(\Phi)\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{r} dS - \int_0^L \boldsymbol{\eta} \cdot \bar{\mathbf{f}} dS = 0 \quad \text{para todo } \boldsymbol{\eta} \in V \tag{30}$$

DISCRETIZACIÓN

Dentro del contexto de un algoritmo de continuación se deben establecer las correspondientes actualizaciones de las variables del problema. La actualización de la configuración del sólido del paso n al paso $n+1$ se realiza en función de los incrementos $\Delta\mathbf{u}_n$, $\Delta\boldsymbol{\theta}_n$, Δq_n mediante

$$\boldsymbol{\phi}_{n+1} = \boldsymbol{\phi}_n + \Delta\mathbf{u}_n \tag{31}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{n+1} = \exp(\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)\boldsymbol{\Lambda}_n \tag{32}$$

$$p_{n+1} = \Delta q_m + p_n \tag{33}$$

mientras que para realizar la actualización de las variables entre dos iteraciones de un mismo paso, antes de llegar al equilibrio, viene dada por

$$\Delta\mathbf{u}_n^{k+1} = \Delta\mathbf{u}_n^k + \Delta(\Delta\mathbf{u}_n^{k+1}) \tag{34}$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_n^{k+1} = \exp\lfloor\Delta(\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{k+1})\rfloor\Delta\boldsymbol{\theta}_n^k, \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{k+1} = \exp\lfloor\Delta(\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}_n^{k+1})\rfloor\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^k \tag{35}$$

$$\Delta q_n^{k+1} = \Delta q_n^k + \Delta(\Delta q_n^{k+1}) \tag{36}$$

La discretización completa del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales resultante función de $\Delta\mathbf{u}_n$, $\Delta\boldsymbol{\theta}_n$, Δq_n, se obtiene por medio de un proceso de interpolación estándar de elementos finitos. Así en función de los valores en los nudos se puede escribir

$$\boldsymbol{\eta} = \sum_A N_A \boldsymbol{\eta}^A, \quad \boldsymbol{\mu} = \sum_A N_A \boldsymbol{\mu}^A, \quad \xi = \sum_A N_A \xi^A \tag{37}$$

$$\Delta\mathbf{u}_n = \sum_A N_A \Delta\mathbf{u}_n^A, \quad \Delta\boldsymbol{\theta}_n = \sum_A N_A \Delta\boldsymbol{\theta}_n^A, \quad \Delta q_n = \sum_A N_A \Delta q_n^A \tag{38}$$

donde $\boldsymbol{\zeta} := (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\mu}, \xi) \in V$ son las variaciones admisibles que aparecen en la formulación débil y $\Delta\Phi := (\Delta\mathbf{u}, \Delta\boldsymbol{\theta}, \Delta q)$ son las variaciones incrementales de las variables del problema, grados de libertad básicos del mismo. De esta forma, la expresión de la formulación variacional queda

$$\begin{aligned} G(\Phi,\boldsymbol{\zeta}) :=& \int_0^L \{[(\mathbf{N}_B^\eta)' - \mathbf{N}_B^\mu \otimes \boldsymbol{\phi}_{n+1}] \bullet \mathbf{n}_{n+1} + (\mathbf{N}_B^\mu)' \bullet \mathbf{m}_{n+1} + (\mathbf{N}_B^\xi)' \bullet N_{f_{n+1}} + \mathbf{N}_B^\xi \bullet M_{f_{n+1}}\} dS - \\ &- \int_0^L [\mathbf{N}_B^\eta \bullet \bar{\mathbf{n}}_{n+1} + \mathbf{N}_B^\mu \bullet \bar{\mathbf{m}}_{n+1} + \mathbf{N}_B^\xi \bullet \bar{M}_{f_{n+1}}] dS - \\ &- [\mathbf{N}_B^\eta \bullet \mathbf{n}_{n+1} + \mathbf{N}_B^\mu \bullet \mathbf{m}_{n+1} + \mathbf{N}_B^\xi \bullet M_{f_{n+1}}]_{A_i}^{A_f} = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

con $\mathbf{N}_B^\eta$, $\mathbf{N}_B^\mu$, $\mathbf{N}_B^\xi$ las componentes de la función de forma asociada al nudo B y a sus siete grados de libertad y que satisface las condiciones de contorno cinemáticas homogéneas.

El sistema de ecuaciones algebraicas no lineales (39) se resuelve mediante un algoritmo tipo Newton-Raphson que implica la necesidad de linealizar tales ecuaciones con respecto a los grados de libertad, obteniéndose la matriz de rigidez tangente consistente. Así la linealización de la expresión débil $G(\Phi, \boldsymbol{\zeta})$ en la configuración $\Phi_n \in \mathbf{C}$ y en la dirección de la variación $\Delta\Phi := (\Delta\mathbf{u}, \Delta\boldsymbol{\theta}, \Delta q) \in V$ expresado en forma matricial es

$$DG(\Phi,\boldsymbol{\zeta}) \bullet \Delta\Phi := \int_0^L (\mathbf{B}_t\boldsymbol{\zeta})^T \mathbf{c} (\mathbf{B}_t \Delta\Phi) dS + \int_0^L (\mathbf{B}_g\boldsymbol{\zeta})^T \mathbf{D}_g (\mathbf{B}_g \Delta\Phi) dS \tag{40}$$

donde el primer término corresponde a la parte material de la matriz tangente de rigidez y el segundo a la parte geométrica.

$$\mathbf{B}_t := \begin{bmatrix} \frac{d}{dS}\mathbf{1}_3 & -\hat{\phi}_0' & \mathbf{0}_{3\times1} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \frac{d}{dS}\mathbf{1}_3 & \mathbf{0}_{3\times1} \\ \mathbf{0}_{2\times3} & \mathbf{0}_{2\times3} & \frac{d}{dS} \end{bmatrix}_{8\times7} \qquad \mathbf{B}_g := \begin{bmatrix} \frac{d}{dS}\mathbf{1}_3 & \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times1} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \frac{d}{dS}\mathbf{1}_3 & \mathbf{0}_{3\times1} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{1}_3 & \mathbf{0}_{3\times1} \end{bmatrix}_{9\times7} \tag{41}$$

$$\mathbf{D}_g := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & -\hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{0}_{3\times3} & -\hat{\mathbf{m}} \\ \hat{\mathbf{n}} & \mathbf{0}_{3\times3} & [\mathbf{n}\otimes\boldsymbol{\phi}_0' - (\boldsymbol{\phi}_0'\mathbf{n})\mathbf{1}] \end{bmatrix}_{9\times9} \qquad \mathbf{c} := \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}\mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^T \tag{42}$$

ALGORITMO DE CONTINUACIÓN

Los puntos donde las matrices de rigidez $\mathbf{K}$ o de flexibilidad $\mathbf{F}$ de una estructura llegan a ser singulares o discontinuas se denominan puntos críticos y tienen una gran importancia desde el punto de vista de la estabilidad estructural. El significado físico de estos puntos es la aparición de desplazamientos infinitos bajo un estado de carga constante dentro de un análisis lineal. Existen dos tipos de puntos críticos:

- puntos límite,
- puntos de bifurcación,
- puntos de retroceso.

En este artículo estamos interesados únicamente en la detección de los primeros. Para ello se ha empleado un algoritmo de continuación que permite trazar la trayectoria de equilibrio de la estructura bajo un estado de cargas determinado. La utilización de la formulación de barra geométricamente exacta bajo hipótesis de grandes desplazamientos y rotaciones permite una determinación mucho más precisa de las cargas y modos de pandeo que el empleo de búsqueda lineal tradicional. Aunque como contrapartida presenta un coste computacional más elevado.

En el presente artículo se han empleado el método de Newton-Raphson convencional (CNR) como solución de sistemas de ecuaciones no lineales y un algoritmo de longitud de arco hiperelíptico (HAL) como método de control mixto parámetro de carga-desplazamientos.

La ecuación de equilibrio para un análisis estructural estático y no lineal en cuanto a geometría puede expresarse en la forma

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = 0 \tag{43}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector residuo, $\mathbf{u}$ es el vector de estado (grados de libertad del problema) y $\mathbf{p}$ es el vector de parámetros de control.

Se define por matriz de rigidez de dicha estructura, como es bien sabido a

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \quad \text{o} \quad K_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial u_j} \tag{44}$$

Habitualmente es usual la reducción de todos los parámetros $\mathbf{p}$ que controlan la evolución de todo el problema a tan sólo un parámetro adimensional λ que se denomina parámetro de control de estado y que usualmente varía de 0 a 1 (carga proporcional) y, en cualquier caso, siempre es posible realizar este planteamiento subdividiendo el proceso de carga en distintas etapas.

Con ello, la ecuación no lineal de equilibrio puede reescribirse como

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \tag{45}$$

Un análisis no lineal requiere un proceso iterativo donde se produce una resolución sucesiva del sistema de ecuaciones y de actualizaciones de las variables del problema hasta alcanzar el estado de equilibrio:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta\mathbf{u}_n, \quad \lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta\lambda_n \tag{46}$$

Para que la solución avance a lo largo de la trayectoria de equilibrio es necesario establecer una estrategia de control incremental. Esta estrategia se expresa de forma general como una restricción del tipo

$$c(\Delta\mathbf{u}, \Delta\lambda) = 0 \tag{47}$$

Tipos de control habituales son el control en carga, el control en desplazamientos, y el control mixto de ambos parámetros mediante longitud de arco. En el caso que nos ocupa se ha empleado un control de arco hiperelíptico (HAL), que representa un caso más general de este último, y donde, geométricamente, la solución avanza al punto intersección de una linealización adecuada de la trayectoria con una hiperelipse en el hiperplano $(\mathbf{u}, \lambda)$, con centro en el último punto donde se ha alcanzado el equilibrio. La forma de la restricción es la siguiente

$$\frac{a^2}{v^2}\Delta\mathbf{u}_n^T\mathbf{S}\Delta\mathbf{u}_n + b^2(\Delta\lambda)^2 = l^2 \tag{48}$$

donde a, b son escalares que representan geométricamente los semiejes de la hiperelipse, l es la longitud de arco que se desea avanzar a lo largo de la trayectoria de equilibrio, $\mathbf{S}$ es una matriz simétrica definida positiva que tiene como misión homogeneizar las diferentes dimensiones de los grados de libertad del problema, usualmente se suele tomar $\mathbf{S} = \mathbf{K}_n$, $\mathbf{S} = \mathrm{diag}(\mathbf{K}_n)$ o $\mathbf{S} = \mathbf{I}$, y por último v es un valor de referencia con las dimensiones de $\sqrt{\Delta\mathbf{u}^T\mathbf{S}\Delta\mathbf{u}}$.

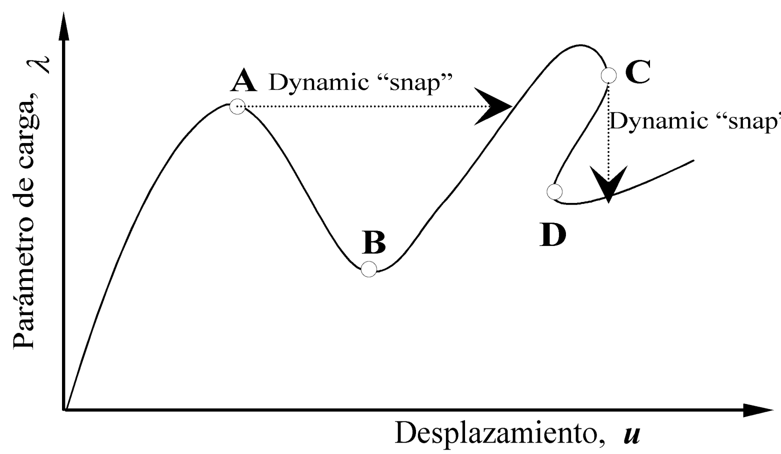

Figura 2. Puntos críticos en un análisis de continuación

Gracias a este tipo de control pueden realizarse análisis de las trayectorias de equilibrio de una estructura después de superar puntos críticos, tanto puntos límites (A, B) como puntos de retorno (C, D). A su vez, es posible obtener otros controles clásicos únicamente particularizando los parámetros. Así, si $a = 0$, $b = 1$, nos encontramos con control en carga, con $a = 1$, $b = 0$, $\mathbf{S} = \mathbf{I}$, $v = 1$ se trata de control en desplazamientos, y si $a = b = v = 1$ y $\mathbf{S} = \mathbf{I}$, se obtiene de la longitud de arco clásica.

En cuanto a la linealización de la trayectoria de equilibrio y dentro de los múltiples métodos existentes, se ha optado por elegir el método de Newton-Raphson convencional (CNR). Dicho método, como es de sobra conocido, tiene como principal ventaja su convergencia cuadrática en los puntos próximos a la solución, y como desventaja el coste computacional extra que supone la obtención y factorización de la matriz de rigidez tangente en cada iteración.

Tan sólo resta por exponer brevemente el algoritmo de Newton-Raphson al que se ha añadido un control mixto carga-desplazamientos de longitud de arco.

Dentro de una estrategia de control incremental en la que se quiere alcanzar un paso $n+1$ a partir de un paso n donde todo es conocido, cabe diferenciar entre la primera iteración denominada predicción, y el resto llamadas correcciones.

La corrección calcula el incremento de desplazamientos inicial a partir de

$$\Delta\mathbf{u}_n^{(0)} = \mathbf{K}_n^{-1}\mathbf{q}_n\Delta\lambda_n^{(0)} = \mathbf{v}_n\Delta\lambda_n^{(0)} \tag{49}$$

donde $\mathbf{v}_n$ es el vector de velocidad incremental definido por

$$\mathbf{v} := \mathbf{u}' \equiv \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\lambda} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{q} \tag{50}$$

con

$$\mathbf{q} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\lambda} \tag{51}$$

De la ecuación (49) queda por definir el valor del parámetro de control del estado inicial. Para ello, usualmente se suele tomar el resultado de la ecuación de la restricción sustituyendo $\mathbf{u}_n$ por $\mathbf{v}_n$ en la iteración inicial, de tal forma que

$$\Delta\lambda_n^{(0)} = \frac{l}{\pm\sqrt{\frac{a^2}{v^2}\mathbf{v}_n^T\mathbf{S}\Delta\mathbf{v}_n + b^2}} \tag{52}$$

donde el signo adecuado se obtiene al hacer que el trabajo externo $\mathbf{q}_n^T\mathbf{v}_n\Delta\lambda_n^{(0)}$ sea positivo para un proceso de carga o negativo para un proceso de descarga.

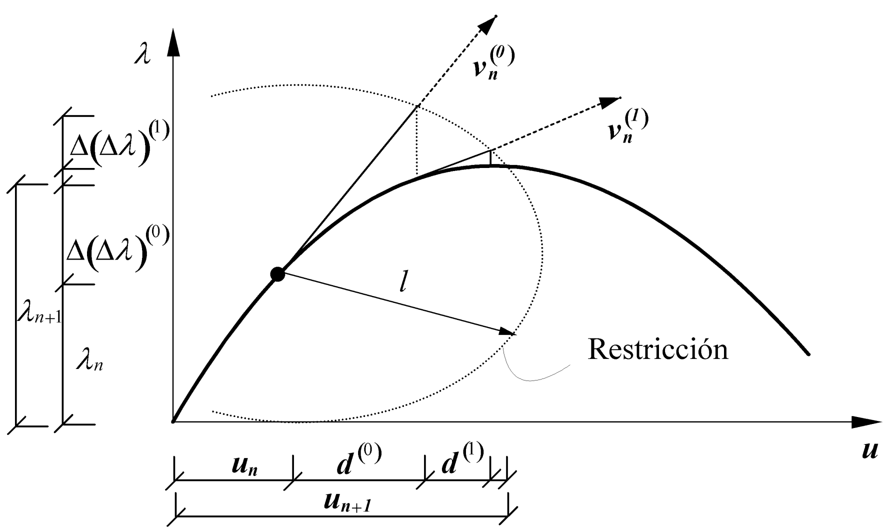

Figura 3. Esquema del algoritmo empleado

En la Figura 3 se representa un esquema del algoritmo desarrollado, donde también se observa la notación empleada.

El resto de iteraciones hasta alcanzar el equilibrio se denominan pasos correctores y vienen dados por

$$\begin{aligned} &\Delta\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{b}^{(k)} + \mathbf{v}^{(k)}\Delta(\Delta\lambda) \\ &\text{o} \\ &\Delta\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{b}'^{(k)} + \mathbf{v}^{(k)}\Delta\lambda^{(k+1)} \end{aligned} \tag{53}$$

con

$$\mathbf{b}^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k)}]^{-1}\mathbf{r}^{(k)} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}'^{(k)} = \mathbf{b}^{(k)} - \mathbf{v}^{(k)}\Delta\lambda^{(k)} \tag{54}$$

Queda por cumplir la restricción de la longitud de arco, por lo que sustituyendo (53) en (48) se obtiene una ecuación de 2° grado con coeficientes

$$\begin{gathered}(\Delta\lambda^{(k+1)})^2 + 2p\Delta\lambda^{(k+1)} - q = 0 \\ p = \frac{a^2\mathbf{b}'^T\mathbf{S}\mathbf{v}_n}{a^2\mathbf{v}_n^T\mathbf{S}\mathbf{v}_n + b^2v^2}, \quad q = \frac{l^2v^2 - a^2\mathbf{b}'^T\mathbf{S}\mathbf{b}'}{a^2\mathbf{v}_n^TS\mathbf{v}_n + b^2v^2}\end{gathered} \tag{55}$$

y por tanto las dos posibles raíces son

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{p^2 + q - p} \tag{56}$$

Dependiendo de las características de ambas raíces se debe elegir una u otra para continuar el proceso incremental dentro de la trayectoria de equilibrio:

- Dos raíces reales de signo opuesto: Ocurre cuando las iteraciones convergen normalmente. Se elige para $\Delta\lambda^{(k+1)}$ la raíz con el mismo signo que $\Delta\lambda^{(0)}$.
- Raíces de igual signo opuesto a $\Delta\lambda^{(0)}$. Ocurre al superar un punto límite. Se elige la raíz más próxima a 0.
- Raíces de igual signo idéntico a $\Delta\lambda^{(0)}$. Ocurre al superar un punto límite de retorno en desplazamientos. Se elige la raíz más próxima a 0.
- Raíces complejas. Suelen aparecer en el caso en que $\mathbf{b}'^{(k)}$ y $\mathbf{v}^{(k)}$ sean casi ortogonales como ocurre en puntos de bifurcación o comportamiento errático. El proceso debe ser controlado de una forma especial según la finalidad que se trate de obtener (seguir una u otra trayectoria de equilibrio en el punto de bifurcación, aplicar algoritmos especiales para comportamientos divergentes tales como "line-search", etc.)

EJEMPLOS DE VALIDACIÓN DE LA FORMULACIÓN Y DEL ALGORITMO

A continuación se presentan unos ejemplos simples comparando con resultados analíticos conocidos para validar los resultados obtenidos con la formulación empleada y la algorítmica expuesta.

Como primer ejemplo se ha elegido el caso de un problema de compresión centrada. Se somete una viga en voladizo de longitud $L = 3$ m, cuya sección es un perfil conformado C 100.2.0 y acero con $E = 2,1 \times 10^6$ kp/cm^2 a una carga de compresión centrada y se analiza el pandeo y trayectoria de pospandeo de la viga.

La carga crítica obtenida siguiendo el algoritmo propuesto y la teórica de Euler coinciden

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = 1996,62 \text{ kp} \tag{57}$$

A continuación se muestra una gráfica con la carga y el desplazamiento de flexión del extremo libre y la deformada de la viga sin magnificación. Se puede observar las posibilidades de la formulación empleada en la detección de puntos críticos y en la representación de la trayectoria de la viga en el postpandeo.

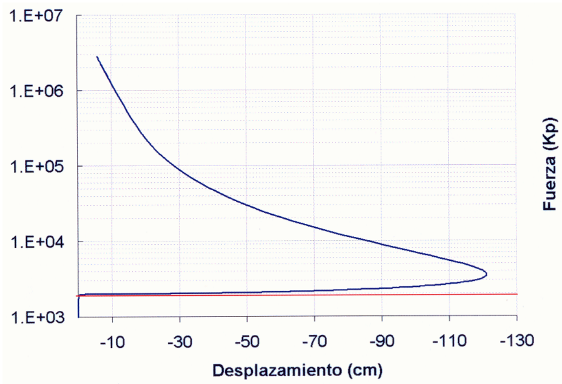

Figura 4. Gráfico de pospandeo en compresión simple

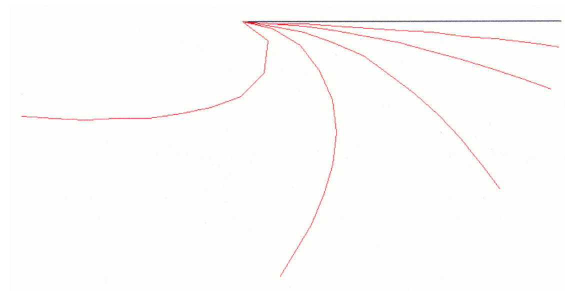

Figura 5. Deformada de la viga sin magnificación

El siguiente caso presentado consiste en someter a la misma viga del ejemplo anterior a una compresión excéntrica. Variando la excentricidad se obtienen las conocidas gráficas de pandeo (Figura 6). Los desplazamientos obtenidos en la zona previa al pandeo se pueden comparar con los dados de forma aproximada en diferente bibliografía, como puede ser en Timoshenko[16]

$$\delta = y_{\max} + e = \frac{1}{\cos\left[\sqrt{\frac{P}{EI_y}}L\right]}$$

o Domínguez[4]

$$\delta = \frac{4e}{\pi}\frac{1}{\frac{P_{\mathrm{cr}}}{P} - 1}$$

para cargas subcríticas

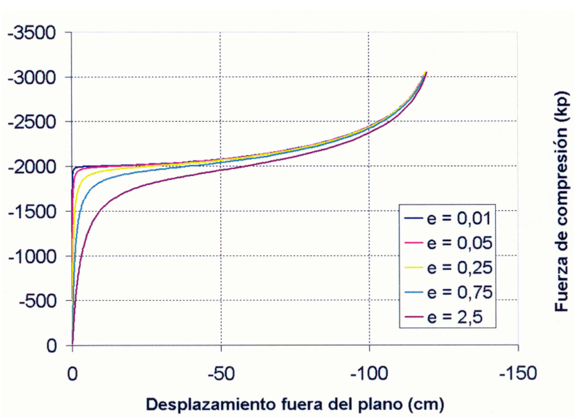

Figura 6. Gráfico de pandeo para diferentes excentricidades

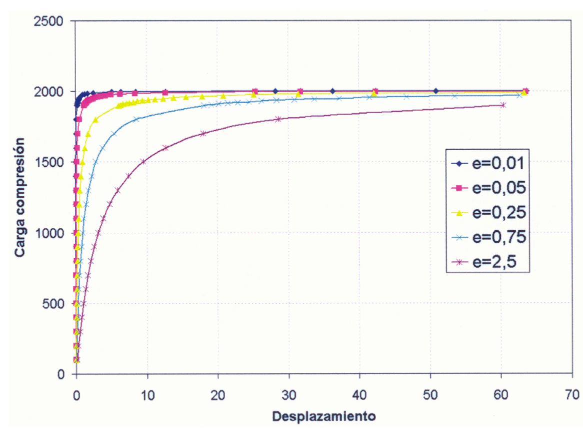

Figura 7. Gráfico analítica para cargas subcríticas

Se presenta a continuación un caso de comprobación de pandeo lateral y se compara con los valores de norma, se trata de una viga de longitud $L = 5$ m, apoyos en horquilla en ambos extremos y sometida a momentos en ellos. El perfil utilizado ha sido un IPE-100. La fórmula simplificada de las normativas y la completa incorporando el módulo de alabeo que aparece en la bibliografía, como por ejemplo en Timoshenko[16] son

$$M_{\rm cr} = \frac{\pi}{L}\sqrt{EGI_yJ} = 348,38 \text{ mkp}$$
$$M_{\rm cr} = (MEF, I_a = 0) = 349,87 \text{ mkp}$$
$$M_{\rm cr} = \frac{\pi}{L}\sqrt{EGI_yJ\left(1+\frac{EI_a}{GJ}\frac{\pi^2}{L^2}\right)} = 353,85 \text{ mkp}$$
$$M_{\rm cr} = (MEF, I_a = 351) = 366,64 \text{ mkp}$$

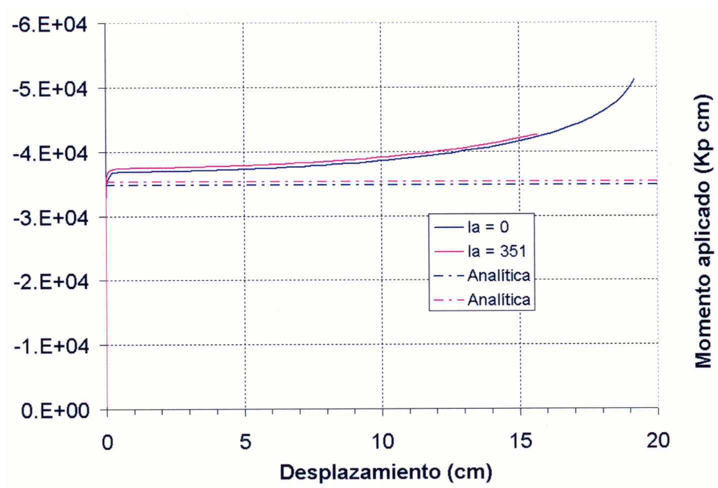

Figura 8. Gráfico de pandeo lateral, apoyo horquilla y perfil en I

El siguiente caso también viene contemplado en la norma. Es el mismo ejemplo que en el caso anterior pero con carga puntual en medio de la viga. La gráfica de pandeo obtenida concuerda con las obtenidas según Timoshenko,[16] norma EA-95[9] y Eurocódigo.[5]

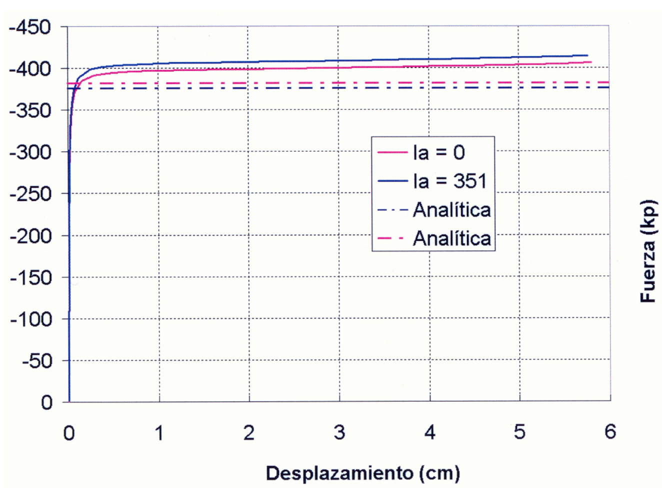

Figura 9. Gráfico de pandeo lateral carga centrada

P crítica (kp)	$I_a = 351$	$I_a = 0$
Norma EA-95	385,53	376,40
Eurocódigo	382,15	376,25
Timoshenko	381,48	–
MEF	388,76	380,25

Tabla I. Comparación de resultados

En estos ejemplos se ha comprobado como el algoritmo presentado presenta unos resultados muy aceptables, donde la mayor diferencia existente con los resultados analíticos no superan un 3 %. La justificación de estas pequeñas variaciones permite una doble lectura, por un lado estamos empleando el método de elementos finitos que generalmente obtiene soluciones algo más rígidas que las analíticas y en segundo lugar las soluciones analíticas expuestas siguen una teoría de 2º orden linealizada alrededor del parámetro de control, válida para puntos previos al pandeo, mientras que en elementos finitos se ha establecido un planteamiento completamente no lineal.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

A continuación se van a exponer varios ejemplos donde se ha calculado la carga crítica frente a pandeo lateral para una serie de vigas con diferentes longitudes, cargas y condiciones de apoyo y cuyas secciones son perfiles conformados en frío. Se ha elegido un perfil en C y donde la norma española EA-95[9] tan sólo contempla los dos primeros casos expuestos aquí (apoyos en horquilla), mientras que para los otros dos sólo es válida la fórmula envolvente de carácter general $M_{\text{cr}} = \frac{\pi}{L}\sqrt{EGI_yJ}$. Ni en el Eurocódigo,[5] ni en la norma americana AISC[1] existe expresión alguna válida para predecir el momento crítico de pandeo lateral para secciones con una simetría simple respecto al eje de inercia mayor.

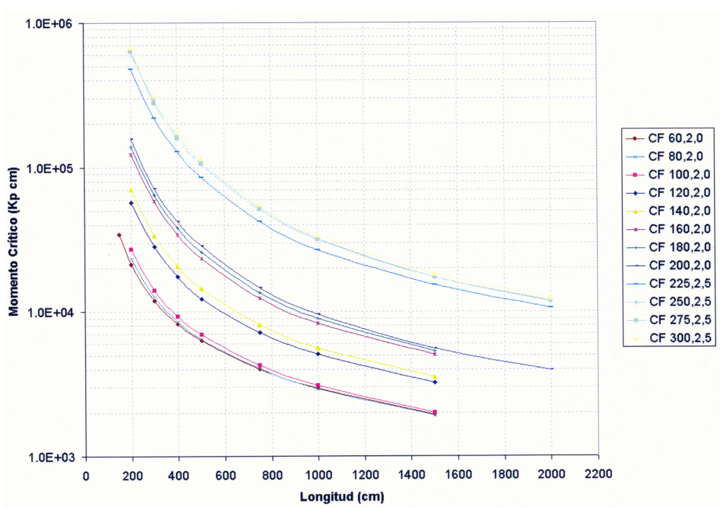

Figura 10. Momentos críticos para perfiles en C, apoyos en horquilla y momentos en los extremos

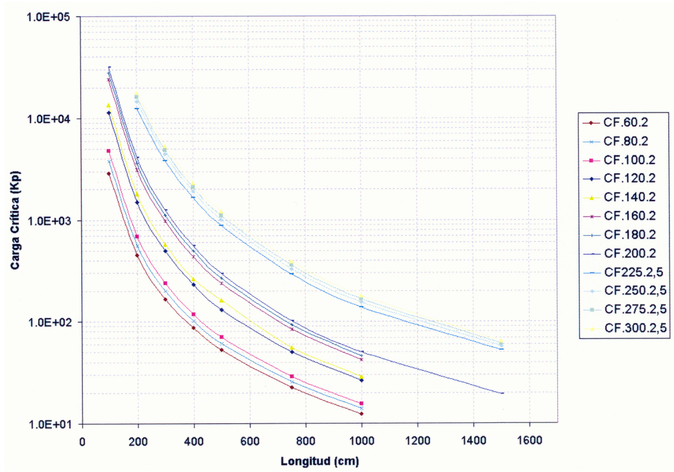

Figura 11. Cargas críticas para perfiles en C, apoyos en horquilla y carga puntual aplicada en el CEC

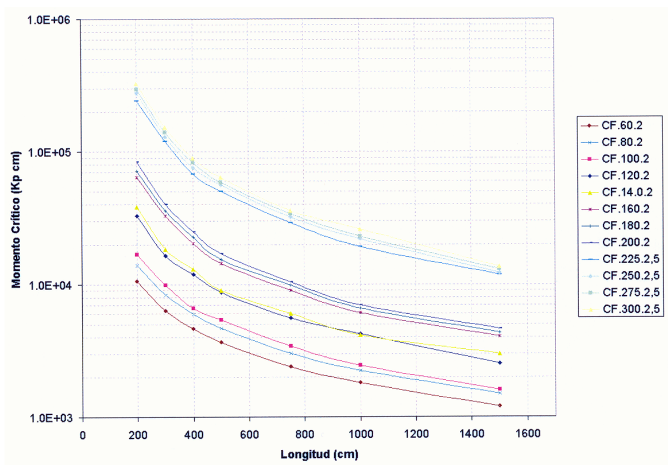

Figura 12. Momentos críticos para pandeo, perfiles en C, empotrada-apoyada, momento en el extremo

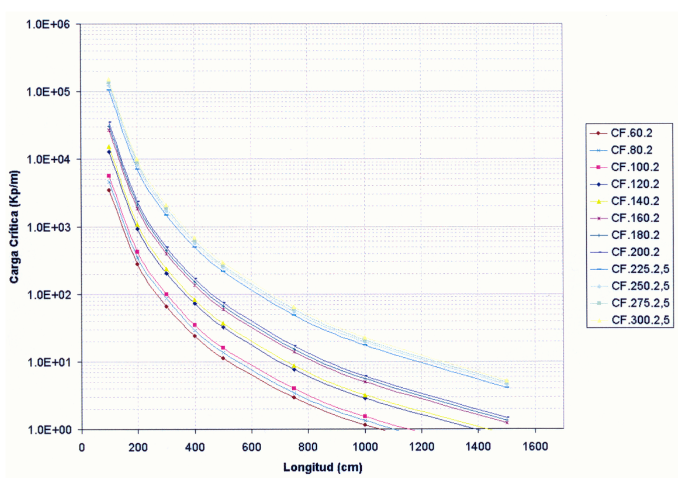

Figura 13. Cargas críticas para perfiles en C, empotrada-voladizo, carga distribuida aplicada en el CEC

Para el cálculo de la carga crítica se ha empleado la formulación de barra anteriormente presentada, y se ha analizado la trayectoria de equilibrio empleando como control incremental la longitud de arco hiperelíptico, por tanto, estamos dentro de una formulación geométricamente no lineal. Se ha considerado que se producía el pandeo cuando la pendiente sufría un brusco decremento respecto de la inicial, se ha tomado como cociente de referencia 10^3 permitiéndose, no obstante, pequeñas variaciones según los diferentes ejemplos.

Es posible advertir varios aspectos interesantes en estas gráficas. El primero y más inmediato es observar que las cargas de pandeo de los perfiles CF se encuentran más o menos agrupados en cuatro niveles. Esto es así porque los perfiles conformados en C poseen cuatro anchuras diferentes y las cargas críticas en pandeo lateral dependen enormemente de la inercia en el plano no principal y lógicamente de esta anchura.

Por otro lado es posible destacar que las curvas de pandeo poseen dos zonas diferenciadas. La primera corresponde a longitudes grandes de las vigas y en ella el momento o carga crítica es proporcional a la inversa de la longitud, mientras que para vigas cortas el momento es más o menos proporcional al cuadrado de la longitud. La justificación puede encontrarse de forma aproximada en la fórmula analítica $M_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi}{L}\sqrt{EGI_y J\left(1 + \frac{EI_a}{GJ}\frac{\pi^2}{L^2}\right)}$ para vigas con momentos en los extremos y apoyos en horquilla y donde, para vigas largas, la influencia del factor $\frac{EI_a}{GJ}\frac{\pi^2}{L^2}$ es despreciable frente a la unidad quedando una expresión del estilo $M_{\mathrm{cr}} = \frac{k}{L}\sqrt{EGI_y J}$. En cambio para longitudes pequeñas el factor anterior es muy superior a la unidad, con lo que el momento queda proporcional a la inversa del cuadrado de la longitud.

CONCLUSIONES

En el presente artículo se ha analizado el fenómeno de pandeo lateral en vigas que presentan una pequeña rigidez a torsión y a flexión en el plano secundario, como son algunos de los perfiles conformados, y en los cuales la consideración o no del alabeo puede llevar a resultados notablemente diferentes. Por todo ello se ha tomado una formulación de barras desarrollada en Simo y Vu-Quoc[12,13,14] que considera el fenómeno del alabeo y presenta un modelo válido para grandes desplazamientos y rotaciones, incluyendo deformaciones a cortante y torsión. A su vez se ha empleado una combinación de un método de resolución de problemas no lineales como es Newton-Raphson con un control mixto carga-desplazamientos como es longitud de arco, de tal manera que puedan ser detectados de manera precisa los puntos críticos dentro de un contexto geométricamente no lineal. De esta forma se pueden hallar los modos y valores de pandeo de forma exacta y no sólo una estimación como ocurre cuando se emplean los métodos lineales de búsqueda de valores propios.

En primer lugar se ha empleado el algoritmo a una serie de casos de prueba con valores y modos de pandeo hallados de forma analítica (en teoría de 2° orden). Comparando los resultados se puede observar como los hallados mediante el MEF son algo superiores a los teóricos, llegando como mucho a un 5 % de diferencia. Cabe una doble explicación. En primer lugar es habitual que las soluciones obtenidas con EF sean un poco más rígidas que las analíticas. En segundo lugar hay que tener en cuenta que estamos comparando una solución obtenida en hipótesis de grandes desplazamientos y con todas las variables (desplazamientos, deformaciones, y esfuerzos) en la geometría deformada (MEF), con una solución analítica donde únicamente se plantea la linealización respecto del parámetro de control.

También es interesante observar cómo los momentos o cargas críticas halladas son superiores en el caso de considerar el fenómeno del alabeo frente a aquellos casos en que no se ha considerado, esta diferencia depende lógicamente de la relación entre la rigidez a torsión y la de alabeo, y en los casos estudiados puede llegar a ser hasta diecisiete veces mayor para los perfiles más altos y vigas muy cortas. Por ello tiene una importancia notable la utilización de un modelo de barra que tenga en cuenta este efecto.

Por último se ha empleado este algoritmo para elaborar una serie de curvas de pandeo para diferentes perfiles conformados en frío, sometidos a diversas cargas y condiciones de apoyo. Se han tomado unos casos que no están contemplados en ninguna normativa de forma específica, de tal manera que pueden ser una buena ayuda para el calculista cuando tiene que enfrentarse a estas situaciones en la práctica.

REFERENCIAS

1 American Institute of Steel Construction, "*Manual of steel construction*", (1980).

2 M.A. Crisfield, "A fast incremental/iterative solution procedure that handles *snap-through*", *Computers and Structures*, Vol. **13**, pp. 55–62, (1980).

3 M.A. Crisfield, "An arc-length method including line searches and accelerations" *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **19**, pp. 1269–1289, (1983).

4 J. Domínguez, "Elementos para el cálculo de estructuras metálicas", Universidad Politécnica Las Palmas, (1982).

5 Eurocódigo 3, Parte 5 y Anexo F, "Proyecto de estructuras de acero", AENOR, (1996).

6 C.A. Felippa, "Solution of nonlinear equations", report no CU-CSSC-88-06 , en *AGRD Lectures on Nonlinear Structural Analysis*, (1988).

7 T.J.R. Hughes y T. Belytschko, "Course notes for recent avances in nonlinear finite element analysis", (1990).

8 M.A. Martínez, C. Ferreira y L. Gracia, "Formulación de un modelo de barra sometida a grandes desplazamientos y rotaciones incorporando deformaciones a cortante, torsión y alabeo", *Anales de Ing. Mecánica*, Vol. **3**, pp. 3–13, (1997).

9 NBE-EA-95, "Estructuras de acero en la edificación", Ministerio de Fomento, (1996).

10 E. Riks, "The application of Newton method to the problem of elastic stability", *J. Appl. Mech.*, Vol. **39**, pp. 1060–1066, (1972).

11 K.H. Schweizerhof y P. Wriggers, "Consistent linearization for path following method in nonlinear FE analysis", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **59**, pp. 261–279, (1986).

12 J.C. Simo, "A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem", Part I, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **49**, pp. 55–70, (1985).

13 J.C. Simo y L. Vu-Quoc, "A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational aspects", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **58**, pp. 76–116, (1986).

14 J.C. Simo y L. Vu-Quoc, "A geometrically-exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. **27**, pp. 371–393, (1991).

15 I.S. Sokolnikoff, "*Mathematical theory of elasticity*", (1956).

16 S. Timoshenko y J.M. Gere, "*Theory of elastic stability*", McGraw-Hill, (1961).