

DETERMINACION DE TENSIONES DE CONTACTO MEDIANTE EL M.E.C. EN PROBLEMAS MULTICUERPO CON SIMETRIA AXIAL

J. ZURITA
M. DOBLARE
y
L. GRACIA

*Departamento de Ingeniería Mecánica,
Centro Politécnico Superior, Universidad de Zaragoza,
María de Luna 3, 50015 Zaragoza, España.*

RESUMEN

Se presenta en este trabajo la formulación e implementación de elementos de contorno, del problema de contacto multicuerpo entre materiales elásticos ortótropos en situaciones de pequeños desplazamientos y deformaciones con simetría axial. Se incluye asimismo una breve descripción del programa de ordenador que [513] [514] incluye elementos isoparamétricos lineales y cuadráticos, impone de forma explícita las condiciones de contacto entre n sólidos, permite la consideración de diferentes coeficientes de rozamiento en distintas ecuaciones a resolver en cada uno de los pasos del proceso incremental de carga mediante la utilización de la técnica de subestructuración y condensación de las superficies de interés en procesos de punzonamiento y ajustes con apriete.

SUMMARY

The Boundary Element formulation and the computer implementation for the multibody contact problem between orthotropic elastic materials under small displacements and strains and axial symmetry are presented in this paper. A brief description of the computer program is also considered. The program includes isoparametric linear and quadratic elements, imposes explicitly the contact interface conditions among n different bodies, allows the consideration of different friction coefficients in different contact zones, even between two solids and gets the minimization of the number of equations to solve in each load increment by using a substructuring technique and the static condensation of the degrees of freedom outside of the tentative contact zone. Several interesting examples in punching processes and prestressed joints are finally presented.

Recibido: Julio 1991

INTRODUCCION

En la mayoría de las aplicaciones, las tensiones de contacto son muy localizadas y no influyen en el comportamiento general de la pieza. Sin embargo, en muchos casos, las tensiones de contacto son determinantes, pasando a ser las que condicionan el problema. Tal es el caso de elementos de unión, elementos sometidos a punzonamiento, o en problemas de cierre de grieta.

Hertz¹ fue el primero que desarrolló la formulación matemática para determinar la distribución de tensiones sobre la zona de contacto que se produce al comprimir dos cuerpos curvos entre sí, utilizando la función potencial de Newton. Ejemplos típicos de contacto hertziano se presentan en el contacto entre esferas y/o cilindros entre sí o con superficies planas. Pocos resultados de interés se han conseguido desde entonces en el ámbito analítico respecto de las zonas y tensiones de contacto entre sólidos, incluso en las situaciones más simples de materiales lineales bajo pequeñas deformaciones y desplazamientos (Tomasch et al², Belajef³, Goodman et al⁴ o Persson⁵ entre otros). Para una revisión en este sentido puede consultarse Gladwell⁶.

Sin embargo, la posibilidad de encontrar soluciones aproximadas a las ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento de los medios continuos y los métodos numéricos consiguientes han permitido la obtención de soluciones a muy distintos problemas dentro de este ámbito. La utilización del M.E.F., por ejemplo, ha permitido la eliminación de muchas de las restricciones encontradas en el planteamiento teórico, tanto las referentes al material (materiales elastoplásticos, anisótropos o viscoelastoplásticos⁷) como las referentes a geometrías (geometrías complejas, grandes desplazamientos y deformaciones⁸) o a la ley de fricción (leyes no lineales y no locales⁹ entre muchas otras referencias).

A pesar de estos avances, la necesidad de utilizar formulaciones híbridas o mixtas y la complejidad en el planteamiento de las condiciones de contacto hace que en una gran cantidad de problemas de interés, en el ámbito de las pequeñas deformaciones y desplazamientos, y para materiales elásticos lineales (situaciones de cierre de grieta en Mecánica de Fractura Lineal, uniones con apriete, ciertos problemas de punzonamiento, etc. son algunos de los que pueden citarse en los que estas limitaciones no son relevantes), el M.E.F. no sea especialmente apropiado como método de solución. En estas situaciones la única no linealidad del problema se plantea en la determinación de la zona y condiciones de contacto entre los distintos sólidos, siendo pues lógico pensar en la utilización de un método numérico cuya base sean precisamente las tensiones y desplazamientos en los contornos de los diferentes sólidos del problema. El Método de los Elementos de Contorno (M.E.C.) se presenta pues como una herramienta eficaz para la resolución de determinados problemas de naturaleza especial, entre los que aparece de una manera destacada el problema de contacto "lineal".

En este sentido, desde las primeras publicaciones de Andersson et al^{10,11,12} hasta las más recientes de Garrido¹³ y Garrido et al¹⁴, París et al^{15,16}, Doblare et al^{17,18} se plantean distintos avances y formulaciones dentro del problema de contacto plano y más recientemente en Garrido et al¹⁹ en problemas 3-D.

En este artículo se presentan por el contrario, la aplicación del M.E.C. a problemas de contacto elástico entre varios cuerpos con simetría axial, que plantea algunas

variantes respecto al caso bidimensional esencialmente en cuanto a la diferente solución fundamental a utilizar y el algoritmo de determinación de las constantes singulares que aparecen en el problema. Finalmente, se presentan varios ejemplos de interés, que permiten validar los resultados obtenidos.

FORMULACION DEL M.E.C. EN ELASTICIDAD AXISIMETRICA

El método de los elementos de contorno (M.E.C.) en Elasticidad lineal consiste básicamente en la resolución numérica del problema elástico planteado en su versión de representaciones integrales (Somigliana²⁰, por ejemplo) mediante la utilización de una técnica de aproximación de los desplazamientos y tensiones en el contorno más un paso posterior que permite la obtención de valores en puntos interiores si son necesarios. La discretización del contorno es pues la única necesaria y las tensiones en el mismo pasan a ser variables fundamentales del problema al mismo nivel que los desplazamientos y con aproximación propia e independiente de la de aquellos.

La ecuación de partida del M.E.C., en su formulación directa, es la conocida identidad de Somigliana que expresa el vector de desplazamientos $u_i(\mathbf{Q})$ en un punto $\mathbf{Q}$ de un dominio Ω como una función de las distribuciones de desplazamientos $u_i(\mathbf{P})$ y tensiones $t_i(\mathbf{P})$ en puntos $\mathbf{P}$ del contorno $\delta\Omega$ de dicho dominio, y de distribución de fuerzas por unidad de volumen $X_i(\mathbf{Q}')$ aplicada sobre Ω .

$$C_{ik}.u_i(\mathbf{Q}) = \int_{\delta\Omega} U_{ik}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})t_i(\mathbf{P})d\delta\Omega - \int_{\delta\Omega} T_{ik}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})u_i(\mathbf{P})d\delta\Omega + \\ + \int_{\Omega} U_{ik}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}')X_i(\mathbf{Q}')d\Omega \quad (1)$$

donde $U_{ik}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}')$ es la solución fundamental de la ecuación de Navier correspondiente al desplazamiento en la dirección i de un punto $\mathbf{Q}'$ del dominio Ω , cuando sobre otro punto $\mathbf{Q}$ de Ω se aplica una carga unidad en la dirección k , y $T_{ik}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ la componente i del vector tensión en un punto $\mathbf{P}$ del contorno debido a la misma carga.

En el caso axisimétrico, la ecuación (1) puede obtenerse como integración entre $\theta \in (0, 2\pi)$ de la solución tridimensional correspondiente a cargas uniformemente distribuidas a lo largo de θ , con resultante unidad en las direcciones r y z . Esta solución fundamental puede encontrarse en Cruse²¹, por ejemplo, y se incluye en el Apéndice por complitud.

Bajo determinadas condiciones (Doblaré²²), la integral de dominio de (1) puede expresarse como suma de dos integrales de contorno, con lo que es posible conocer los desplazamientos de cualquier punto del dominio en función únicamente de integrales de contorno. En este trabajo no se contempla la existencia de fuerzas por unidad de volumen, por lo que dicha integral no se considerará desde este momento.

Si se discretiza el contorno mediante Ne elementos (Figura 1), de forma que en el interior de los mismos se plantean aproximaciones independientes para desplazamientos y tensiones $C^0(\delta\Omega)$ en la forma habitual en elementos de contorno (véase²², por ejemplo), la ecuación (1) puede escribirse en el caso axisimétrico como

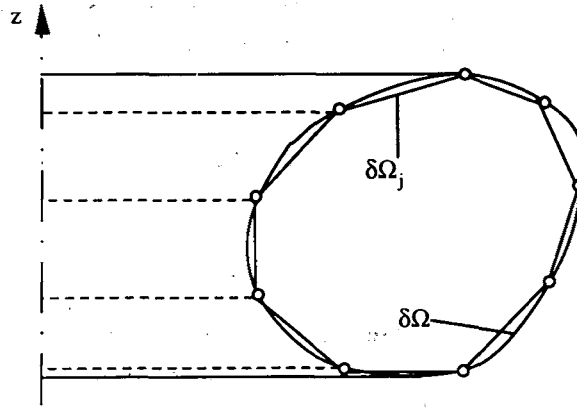


Figura 1. Discretización del contorno.

$$C_{ik}u_i(\mathbf{Q}) = \sum_{j=1}^{Ne} \sum_{m=1}^{Nn_j} B_{im}^{kj} \cdot (t_i^j)^m - \sum_{j=1}^{Ne} \sum_{m=1}^{Nn_j} A_{im}^{kj} \cdot (u_i^j)^m \quad (2)$$

con

$$A_{im}^{kj} = \int_{\delta\Omega_j} \varphi_m T_{ik} d\delta\Omega_j \quad B_{im}^{kj} = \int_{\delta\Omega_j} \varphi_m U_{ik} d\delta\Omega_j \quad (3)$$

y φ_i las funciones de aproximación utilizadas (lineales o cuadráticas según el tipo de elemento en el programa aquí incluido), y r la coordenada "r" de cada punto del dominio de integración.

La obtención de las integrales en (3) se realiza mediante una cuadratura estandar de Gauss cuando el punto de colocación $\mathbf{Q}$ no se encuentra situado en el elemento sobre el que se integra. En realidad es necesaria una cierta sofisticación para tener en cuenta el efecto de creciente gradiente de las integrales cuando se integra sobre elementos cercanos al punto de colocación. En este caso se incrementa el número de puntos de integración de una forma adaptativa por el programa, restringiendo el intervalo de integración a longitudes del orden de la distancia del punto al elemento como máximo²². En el caso de que el punto de colocación pertenezca al elemento de integración, la segunda integral de (3) es débilmente singular (de orden logarítmico), evaluándose mediante una cuadratura tipo Bertold-Zaborowski²³, mientras que las constantes "A" se evalúan de forma indirecta, en unión con las C_{ik} , mediante la consideración de estados de deformación particulares.

En general, y para elasticidad 2 y 3-D, la consideración de estados de deformación nula (sólido rígido) son suficientes para determinar las constantes "A" singulares. En el caso axisimétrico ello puede realizarse tan sólo para la determinación de constantes A_{zm}^{kj} , es decir las correspondientes a desplazamientos en la dirección del eje de simetría. Sin embargo, la situación de movimiento como sólido rígido en la dirección r no tiene

consideración de situaciones distintas a las de sólido rígido. En nuestro caso se han implementado y comparado las siguientes:

-Presión hidrostática

$$\begin{aligned} t_r &= n_r & t_z &= n_z \\ u_r &= \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)r & u_z &= \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)z \end{aligned} \quad (4)$$

-Deformación plana

$$\begin{aligned} t_r &= n_r & t_z &= 2\nu n_z \\ u_r &= \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}r & u_z &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

-Tensión plana

$$\begin{aligned} t_r &= n_r & t_z &= 0 \\ u_r &= \left(\frac{1-\nu}{E}\right)r & u_z &= \left(\frac{-2\nu}{E}\right)z \end{aligned} \quad (6)$$

Los resultados obtenidos con cualquiera de los tres campos anteriores son esencialmente idénticos, por lo que se ha optado finalmente por la inclusión del caso de deformación plana, que es el más simple.

FORMULACION DEL PROBLEMA DE CONTACTO ENTRE SOLIDOS CON PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS

El problema de contacto unilateral entre materiales elásticos con pequeños desplazamientos y deformaciones, no es más que un problema de elasticidad lineal, en cuanto a las ecuaciones básicas de equilibrio, compatibilidad y comportamiento, sometido a unas condiciones de contorno no-lineales, que dependen del nivel de carga y de la geometría de los sólidos en contacto.

Es de resaltar que una de las dificultades más importantes del problema de contacto, referente a la inclusión de las condiciones de contacto entre los dos sólidos, se plantea a la hora de determinar qué puntos van a estar realmente en contacto para cada etapa de carga, o de forma más precisa cuáles son los puntos de cada sólido entre los que se han de establecer las condiciones de contacto. Este problema es de orden menor en el caso que nos ocupa de pequeños desplazamientos y deformaciones, ya que en este caso, las zonas de contacto respectivas han de tener geometrías casi idénticas o el problema sería en realidad de grandes desplazamientos al tener que alterar sustancialmente las geometrías de las zonas de contacto desde la configuración inicial a las respectivas de equilibrio a lo largo del proceso de carga. Ello permite, por otro lado, considerar la posibilidad de establecer mallas conformes en las zonas susceptibles a contactar, es decir, mallas que incorporan de forma explícita los nudos de cada sólido entre los que se va a establecer el contacto (Figura 2). Con ello, los pares de posible contacto quedan

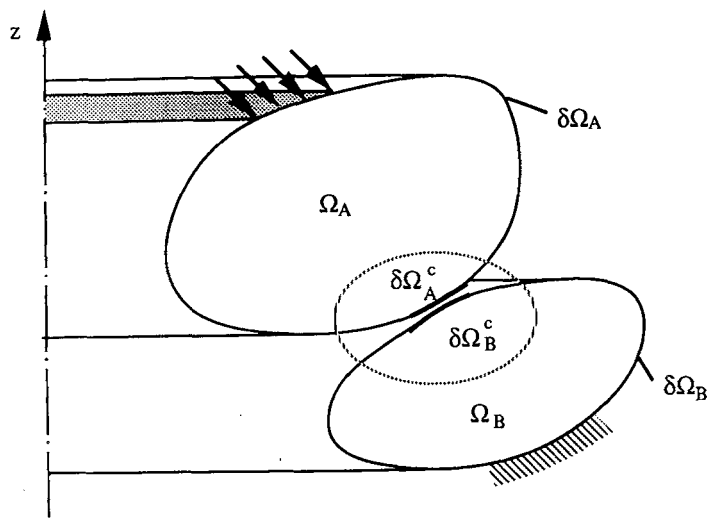


Figura 2. Planteamiento general del problema de contacto.

establecidos “a priori”, siendo pues necesario tan sólo establecer en cada etapa de cargas las condiciones de contacto para cada par de nudos de la malla.

Naturalmente, la consideración de mallas conformes restringe el campo de aplicación del problema de contacto. Sin embargo, son escasos los problemas de interés en los que se producen grandes desplazamientos y con ello la necesidad de considerar mallas no conformes a lo largo del proceso de carga y al mismo tiempo las deformaciones son pequeñas, siendo aplicable pues la ecuación (1) actualizada para cada geometría a lo largo del proceso de carga. La consideración de grandes deformaciones y presumiblemente comportamiento plástico del material implica la necesidad de incluir integrales de volumen en (1) que tengan en cuenta el efecto de deformaciones iniciales, complicándose el proceso y perdiendo el M.E.C. gran parte de las ventajas a él inherentes. De cualquier forma, este método puede aún ser competitivo en problemas de contacto con plasticidad muy localizada, de forma que las integrales de volumen, y con ellas la discretización del dominio, se extienden a zonas reducidas del mismo²⁴.

Establecido pues el hecho de utilización de mallas conformes y explicitados los posibles pares de contacto a lo largo del proceso de carga, las condiciones de contacto para cada par de contacto se expresan en la forma siguiente:

- a) **Condición de no penetración.** De nuevo en este caso y haciendo uso de que nos encontramos en pequeños desplazamientos puede considerarse la dirección de chequeo de la penetración entre cada dos nudos de un par como la normal promedio de las dos normales a las superficies respectivas de los dos nudos que componen el par. Con ello, la condición de no penetración se expresa como que la suma de las proyecciones de los desplazamientos de los dos nudos de un par de contacto en la dirección de la normal promedio no puede ser mayor que la distancia inicial entre ellos medida en esa misma dirección (Figura 3), o bien

$$u_A^n + u_B^n \leq d_{AB}^n \quad (7)$$

- b) **Condición de contacto unilateral con fricción.** En este caso, las tensiones de compresión aparecen tan sólo cuando se establece el contacto efectivo entre los dos nudos del par, mientras que la condición de fricción se establece en base al tipo de ley de fricción tipo rozamiento seco o de Coulomb, de tal forma que la condición de contacto con fricción se plantea como

$$\sigma_N \leq 0 \quad \tau \leq \mu \cdot \sigma_N \quad (8)$$

con μ el coeficiente de rozamiento.

En el proceso de implementación de las condiciones de contorno, y para cada nudo del contorno de cada sólido se consideran las siguientes zonas:

- a) **Zona fuera de contacto (zona 1).** Es aquella que nunca entrará en contacto. Las condiciones de contorno están impuestas de forma explícita y no se alteran a lo largo del proceso de carga. Las incógnitas son conocidas "a priori", pudiendo establecerse en el vector de incógnitas de forma explícita desde el principio.
- b) **Zona candidata a contactar (zona 2).** Es la zona que todavía no ha contactado pero puede contactar para un nivel de carga determinado. Las condiciones de contacto corresponden a una zona del contorno libre de tensiones y con desplazamientos incógnita (no se ha considerado el caso no habitual de contacto entre zonas del contorno cargadas). Las incógnitas para cada nudo del par son los 2 desplazamientos.
- c) **Zona en deslizamiento (zona 3).** En ella se cumple que $|\tau| = \mu \cdot \sigma_N$. Corresponde pues a pares de contacto en los que se ha establecido éste, la tensión normal es pues negativa, y además se ha llegado a la superficie de fricción, alcanzándose la condición de Coulomb. Las incógnitas básicas son pues la tensión normal, el desplazamiento normal igual para ambos nudos y los desplazamientos tangenciales, diferentes para cada uno de ellos.
- d) **Zona en adherencia (zona 4).** En ella no se ha alcanzado el cono de fricción y por tanto la tensión tangencial cumple $|\tau| < \mu \cdot \sigma_N$. Las incógnitas básicas son los desplazamientos normal y tangencial de los dos nudos, que son iguales, y las tensiones normal y tangencial que también lo son.
- e) **Zona de soldadura (zona 5).** Con objeto de dotar de generalidad al programa, de tal forma que pueda utilizarse en problemas sin contacto pero con subregionalización, situación que aparece por ejemplo en problemas de propagación de grietas, se considera esta última zona en la que se permite la aparición de tensiones de tracción permaneciendo unidos los dos nudos que componen el par de contacto. Con ello, las incógnitas básicas en el par serían los desplazamientos y las tensiones normal y tangencial, que son iguales para ambos nudos (excepto signos, dependiendo del sentido elegido para ambos).

Tal como se indica a continuación, el algoritmo de contacto utilizado establece el contacto sucesivo entre pares de contacto, de tal forma que los nudos de la discretización establecen la separación efectiva entre zonas de contacto. Ello es consecuencia de

utilizar elementos con aproximación continua en los que las variables a aproximar (desplazamientos y tensiones en el contorno) se establecen en función de los valores nodales con nudos en los extremos del elemento para salvaguardar la continuidad (al contrario por ejemplo de la aproximación discontinua de París et al¹⁶ y Garrido et al¹⁴). Según ello, a la hora de establecer condiciones de contacto en pares, pueden aparecer condiciones diferentes a la izquierda y derecha según el sentido de recorrido del contorno. Ello implica la posible discontinuidad de tensiones (no de desplazamientos) en los puntos de separación entre zonas.

Una alternativa para soslayar este problema, al margen de la utilización de elementos discontinuos consiste en la consideración de tensiones promedio en los pares en cuestión, lo que afecta a la precisión de resultados en las proximidades de los puntos de separación entre zonas. En nuestro caso, se ha optado por la consideración de incógnitas diferentes en tensión a izquierda y derecha, garantizando pues la precisión de los resultados en todo punto a costa de incrementar el número de ecuaciones e incógnitas a resolver en cada etapa de carga, máxime teniendo en cuenta que al no conocerse "a priori" los límites de cada zona no se conocen los nudos en los que las incógnitas se plantean en número superior al resto, complicándose sobremanera el algoritmo de montaje. Para evitar esto se ha considerado en la zona de contacto las tensiones a izquierda y derecha como diferentes para todos los nudos, manteniendo invariable el vector de incógnitas, modificándose tan sólo las condiciones de compatibilidad y equilibrio en cada etapa de carga para los nudos en la zona de contacto (12 incógnitas por par - 2 tensiones tangenciales, 2 normales y 2 desplazamientos por nudo del par son las aquí consideradas). Este incremento no es excesivo en problemas 2-D como los aquí contemplados con zonas de contacto reducida, pero evidentemente no es trasladable a problemas 3-D o con zonas de contacto muy grandes. En cualquier caso, el proceso de montaje se reduce ostensiblemente, compensando en parte el efecto aludido.

ORGANIZACION Y RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES

Dado el carácter no lineal del problema de contacto, e independientemente del método de solución elegido (incremental en general o iterativo en los casos que sea posible), es necesario montar y resolver un sistema de ecuaciones lineales un número elevado de veces. En este caso, y al igual que en [17] se ha optado por establecer un sistema de ecuaciones en base a las incógnitas de los nodos pertenecientes a pares de contacto, para lo cual previamente se realiza un proceso de condensación estática de las incógnitas correspondientes a nudos que se encuentran en todo momento ajenos al contacto y que por lo tanto no pertenecen a ningún par.

Para cada cuerpo S se realiza el proceso de integración de las ecuaciones de contorno de la forma habitual y se montan, de forma que una vez conseguido el sistema de ecuaciones, se procede a la división del mismo en dos subsistemas $(L)(C)$ correspondientes respectivamente a las incógnitas de nudos ajenos al contacto y de pares de contacto (actuales o previsibles). Con ello se tiene

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{LL}^S \mathbf{x}_L^S + \mathbf{K}_{LC}^S \mathbf{x}_C^S &= \mathbf{V}_L^S \\ \mathbf{K}_{CL}^S \mathbf{x}_L^S + \mathbf{K}_{CC}^S \mathbf{x}_C^S &= \mathbf{V}_C^S \end{aligned} \right\} \rightarrow [\mathbf{K}_{CC}^S - \mathbf{K}_{CL}^S (\mathbf{K}_{LL}^S)^{-1} \mathbf{K}_{LC}^S] \mathbf{x}_C^S =$$

$$= \mathbf{V}_C^S - \mathbf{K}_{CL}^S (\mathbf{K}_{LL}^S)^{-1} \mathbf{V}_L^S \quad (9)$$

El sistema anterior puede expresarse como

$$\mathbf{K}^S \mathbf{x}_C^S = \mathbf{V}^S$$

$$\mathbf{K}^S = \mathbf{K}_{CC}^S - \mathbf{K}_{CL}^S (\mathbf{K}_{LL}^S)^{-1} \mathbf{K}_{LC}^S \quad \mathbf{V}^S = \mathbf{V}_C^S - \mathbf{K}_{CL}^S (\mathbf{K}_{LL}^S)^{-1} \mathbf{V}_L^S \quad (10)$$

Estos sistemas de ecuaciones son de dimensión $2N_S^C \times 6N_S^C$, ya que como se ha indicado el número de incógnitas consideradas por cada nudo de contacto es 6, y el número de ecuaciones integrales de 2. Por lo tanto, las ecuaciones procedentes de la integración y condensación estática de cada uno de los cuerpos del problema componen un sistema global de dimensiones

$$2 \sum_{S=1}^{N_C} N_S^C \times 6 \sum_{S=1}^{N_C} N_S^C$$

con N_C el número de cuerpos. El resto de las ecuaciones necesarias en número de

$$4 \sum_{S=1}^{N_C} N_S^C$$

se obtienen de las condiciones de contacto entre los distintos cuerpos, tal como se ha indicado previamente y se detalla en [17].

$$\begin{array}{c} 2N_1^C \\ 2N_2^C \\ 2N_3^C \\ \vdots \\ 2N_{N_C}^C \end{array} \left[\begin{array}{ccc} 6N_1^C & 6N_2^C & 6N_3^C \\ & 6N_2^C & 6N_3^C \\ & & 6N_3^C \\ & & & 6N_{N_C}^C \\ & & & & \text{Matriz Condiciones de Contacto} \end{array} \right] \begin{array}{c} U_1^c \\ U_2^c \\ U_3^c \\ \vdots \\ U_{N_C}^c \end{array} = \begin{array}{c} V_1^c \\ V_2^c \\ V_3^c \\ \vdots \\ V_{N_C}^c \end{array}$$

Figura 3. Estructura del sistema de ecuaciones.

El sistema global a resolver tendrá la forma de la Figura 3, donde la última matriz de condiciones de contacto va variando a lo largo del proceso de contacto, mientras que el resto de submatrices permanecen invariables. En la actual implementación cada una de estas matrices se pretriangula, almacenándose los pivotes respectivos, de forma que en cada etapa de carga el único bloque de ecuaciones a factorizar es precisamente el bloque de $4 \sum_{S=1}^{N_C} N_S^C \times 6 \sum_{S=1}^{N_C} N_S^C$ ecuaciones correspondientes a las condiciones de contacto.

PROCESO DE CARGA INCREMENTAL

El sistema presentado en el punto anterior será válido mientras que no se modifiquen las condiciones de contorno, o lo que es igual las condiciones de contacto. Ello se produce en el caso elástico lineal que nos ocupa tan sólo por una modificación en las cargas exteriores.

La alteración del sistema se chequea y plantea mediante un procedimiento de contacto nudo a nudo mediante el cual se evalúa en cada etapa de carga el menor incremento de la misma (supuesto etapas de carga proporcionales) que da lugar a una variación de las condiciones de apoyo de algún nudo de las distintas zonas de contacto entre distintos sólidos.

Los posibles cambios que contempla el programa son los siguientes:

- a) **Formación de un par de contacto.** Cambio de un nudo libre a zona de contacto (deslizamiento o adhesión). Se produce esta situación cuando se chequea una situación de penetración, comprobándose a continuación en primera instancia la condición de deslizamiento o adherencia. Es de resaltar que este último chequeo puede dar lugar a estimaciones iniciales incorrectas en la adscripción de nudos a zonas de deslizamiento o adhesión, ya que se establecen en base a resultados de tensiones correspondientes a condiciones de contacto no válidas (nudo fuera de contacto), siendo necesario establecer un chequeo de incompatibilidades previo al nuevo incremento de carga. Esta situación es común a algunos de los casos siguientes.
- b) **Pérdida de contacto.** Cambio de un nudo deslizante a libre. Se produce al detectarse tensiones normales de tracción en un par de contacto. No se plantea la posibilidad de paso directo de adhesión a nudo libre pues es necesario que se haya producido inicialmente el deslizamiento si el proceso incremental (número de nudos de la malla en definitiva) es suficientemente preciso. En caso contrario se producen faltas de convergencia insoslayables.
- c) **Pérdida de adherencia.** Cambio de un nudo en adherencia a deslizante. Se produce al detectarse tensiones tangenciales superiores a las de rozamiento, es decir, al intersectar el punto representativo del tensor tensión con el cono de Coulomb.

El proceso incremental es como sigue: a partir de una determinada situación de la zona de contacto, se procede a aplicar un nuevo incremento de carga, durante el cual se considera proceso de carga lineal con factor de proporcionalidad $f_n \leq 1$ respecto del resto de carga que resta por aplicar

$$\Delta Q_n = f_n(Q - Q_{n-1}) \quad (11)$$

con Q la carga total a aplicar al final de este paso de carga, Q_{n-1} la carga aplicada hasta ese momento y f_n el factor de escala a determinar. La determinación de f_n se establece en cada incremento de carga como el mínimo factor de escala que modifica las condiciones de contacto de algún nudo de la discretización, es decir

$$f_n = \min_{\alpha} f_n^{\alpha} \quad (12)$$

con f_n^{α} el factor de escala necesario para modificar las condiciones de contacto del par α , dentro de las modificaciones contempladas en el programa.

Una vez establecido este incremento se plantean las nuevas condiciones de contacto (únicamente se alteran las correspondientes al par que da lugar al mínimo f_n previamente detectado) y se resuelve de nuevo el sistema de ecuaciones chequeando posibles incompatibilidades respecto de las condiciones establecidas previamente para cada par. Se modifican los pares en los que se han detectado tales incompatibilidades y se vuelve a resolver sin incremento de carga. Si después de 5 iteraciones dentro de un mismo valor de la carga no se ha alcanzado la convergencia el proceso finaliza. En caso contrario se procede a un nuevo incremento de carga dentro de la etapa en curso.

RESULTADOS

El primer ejemplo corresponde a un proceso complejo de contacto entre 5 cuerpos (3 si se aplican condiciones de simetría) en deformación plana, presentando previamente por París y Garrido¹⁶, donde se detallan los aspectos tecnológicos de este caso. Es de destacar que, como es sabido, este problema puede resolverse mediante una solución axisimétrica sin más que considerar un anillo de sección la correspondiente al problema de deformación plana con radio muy elevado respecto de las dimensiones de la sección. En este caso, y con objeto de comparar con la solución de [16] se ha utilizado $R = 20000$ mm, con R el radio del eje de simetría de la sección. La geometría, discretización y propiedades de los materiales se muestran en las Figuras 4 y 5.

Los resultados obtenidos y los presentados en [16] para un coeficiente de fricción de $\mu = 0.1$, correspondientes a la variación en función de la carga aplicada de las zonas de contacto y de las tensiones normales entre punzón y placa intermedia y entre placa intermedia y probeta se muestran en las Figuras 6 y 7, pudiendo observarse que existe una apreciable diferencia con los resultados de [16] en la primera de las figuras reseñadas que, después de consulta con los autores de [16], se constató un error de unidades de referencia en la presentación de su artículo, mientras que la segunda de ellas es básicamente idéntica a la aquí obtenida, corroborando el error aludido como meramente de presentación.

El segundo ejemplo corresponde a un caso típico de contacto hertziano como es el de una esfera presionando sobre una base elástica del mismo material, sin rozamiento y por tanto con zona de contacto circular. En este caso se estudia el contacto entre una esfera de radio 0.05 m en contacto con un cilindro de 0.5 m de diámetro y 0.5 m de

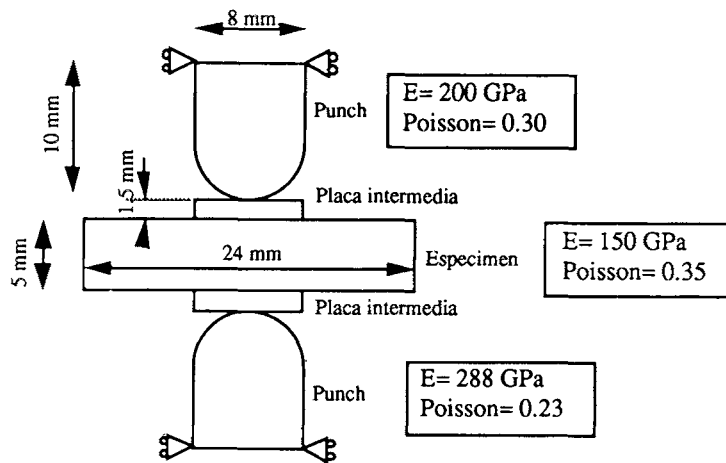


Figura 4. Contacto entre 5 cuerpos. Geometría.

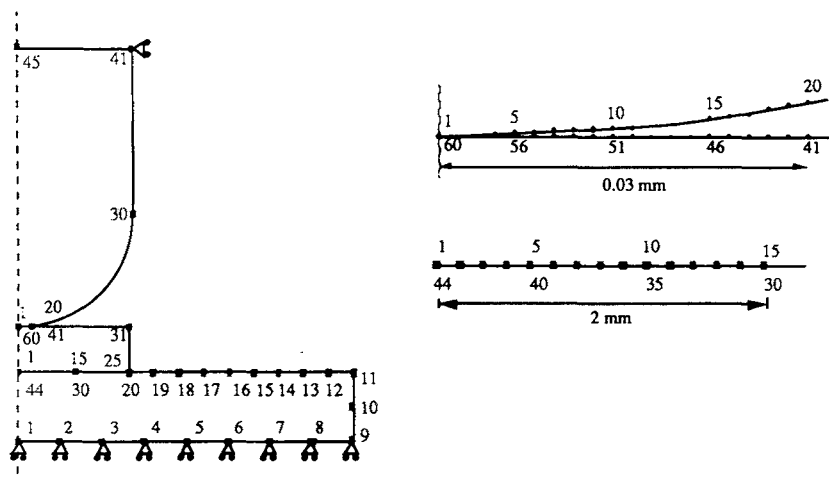


Figura 5. Contacto entre 5 cuerpos. Discretización.

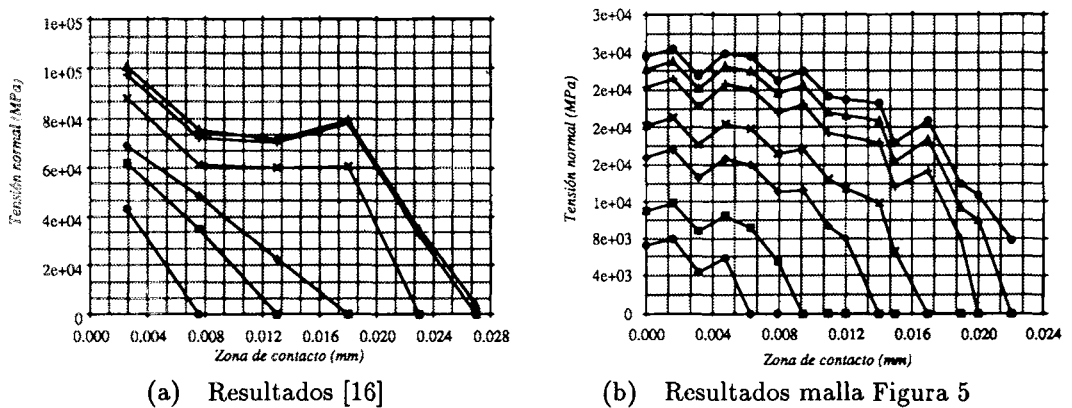


Figura 6. Distribución de tensiones normales en la zona de contacto entre punzón y placa intermedia en función de la carga aplicada.

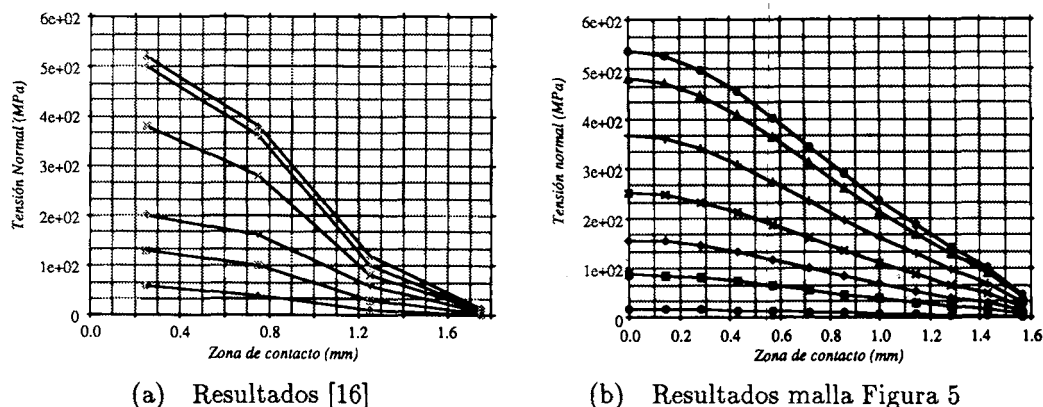


Figura 7. Distribución de tensiones normales en la zona de contacto entre placa intermedia y probeta en función de la carga aplicada.

altura cuya superficie lateral se encuentra empotrada. La malla utilizada consta de 240 elementos lineales, con 40 de ellos para cada cuerpo en la zona candidata de contacto que tiene un radio máximo de 0.004 m, y se detalla en la Figura 8.

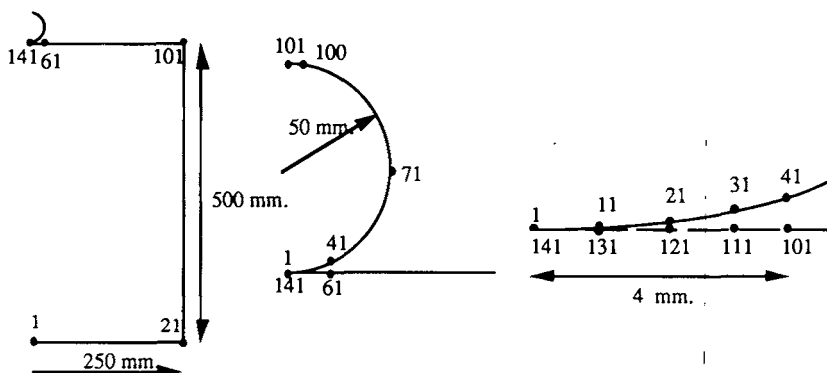


Figura 8. Contacto esfera-base elástica. Geometría y discretización.

Las constantes elásticas de ambos cuerpos son de $E = 40000$ MPa y $\nu = 0.35$ y la carga en la parte superior de la esfera consiste en una distribución lineal en un círculo de radio 0.007056 m que corresponde a una abertura de 3 grados sexagesimales a partir del eje vertical (Figura 8).

Bajo estas hipótesis, los resultados de la longitud de la zona de contacto frente a la carga aplicada y de las tensiones normal máxima (en el eje de simetría) frente al radio de contacto son representadas en las Figuras 9 y 10 y en la Tabla I. En ellas puede observarse una casi perfecta concordancia con los resultados teóricos de Hertz, con un error del 0.5 % en el valor de la carga que da lugar al contacto completo de la zona candidata a contactar, y de 1.31 % en la tensión normal máxima. Es de resaltar el decremento sucesivo del error en la determinación de la carga necesaria para producir un determinado contacto que viene dado esencialmente por dos factores: en primer

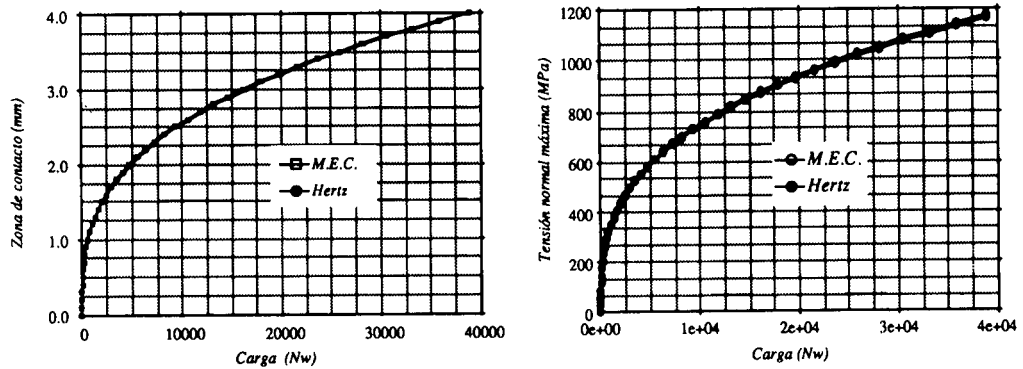


Figura 9. Radio de la zona de contacto y tensión normal máxima en función de la carga aplicada.

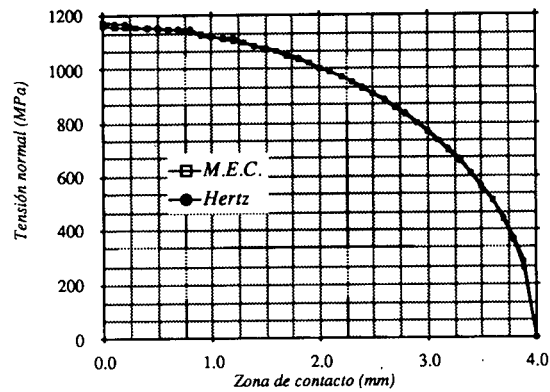


Figura 10. Distribución de tensiones normales en la zona de contacto.

Longitud (mm)	Carga Teórica (Nw)	Carga M.E.C. (Nw)	Error %
0.2	4.86	4.01	17.5
0.4	38.9	35.84	7.86
0.8	311.19	297.79	4.3
1.2	1050.26	1018.33	3.04
1.6	2489.5	2436.14	2.14
2.0	4862.3	4779.2	1.7
2.5	9496.7	9366.5	1.37
3.0	16410.3	16228.3	1.1
3.5	26058.9	25826.4	0.89
4.0	38898.5	38918.9	0.05

Tabla I.

lugar la mayor influencia de la definición del punto final de la zona de contacto para longitudes de contacto pequeñas (a lo largo de este trabajo, y al trabajar con elementos lineales se supone que el punto que define el final de la zona de contacto coincide con el nudo final del último elemento de contacto), y en segundo lugar el alto gradiente que en la solución de Hertz tiene la función $P = f(l_C)$ en las proximidades de $l_C = 0$, decreciendo para longitudes de contacto mayores.

Es de resaltar que este mismo ejemplo ha sido resuelto recientemente, también mediante elementos de contorno pero mediante una versión tridimensional con elementos de variación constante por Foces²⁵, con una discretización de 44 elementos en la zona de contacto. En primer lugar, como indica el mismo autor, es necesario incluir alguna salvaguarda en este caso para garantizar la entrada en contacto de los distintos nudos de una forma axisimétrica, y de cualquier forma, y como era esperable, son necesarias discretizaciones mucho más fuertes para conseguir resultados análogos que, obviamente, no han sido posibles con la discretización utilizada en [25].

El tercer ejemplo consiste en un punzón esférico presionando sobre un disco plano, descansando en un apoyo tórico. La Figura 11 representa los cuerpos y sus medidas, mientras que la Figura 12 muestra la discretización utilizada. Las características elásticas de los materiales son $E = 100$ MPa, $\nu = 0.3$, y los coeficientes de rozamiento de $\mu = 0.005$ iguales en todas las superficies.

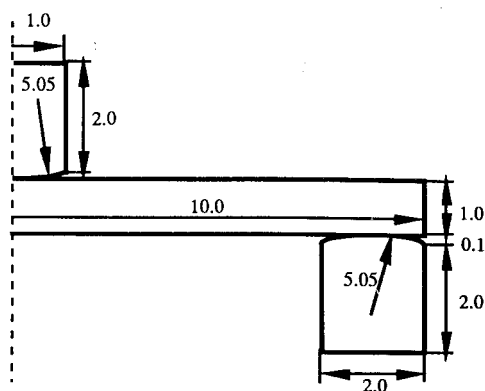


Figura 11. Punzonamiento de disco sobre apoyo toroidal. Geometría.

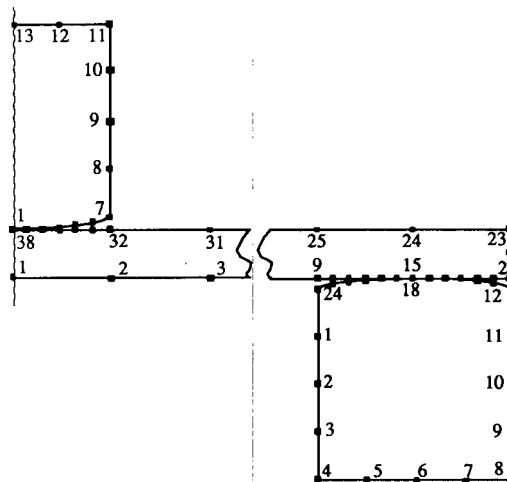


Figura 12. Punzonamiento de disco sobre apoyo toroidal. Discretización M.E.C.

En la Figura 13 y la Tabla II se representa la distribución de la tensión máxima de contacto en la zona disco-apoyo frente a la carga aplicada. La correspondiente a la zona punzón-disco es prácticamente la esperada en contacto hertziano dado el pequeño valor del coeficiente de rozamiento.

Finalmente, el cuarto ejemplo consiste en una tapa de un cilindro unida mediante apriete con una junta elástica. La Figura 14 representa la geometría del problema y la Figura 15 la discretización utilizada. La tapa y el cilindro presentan las mismas

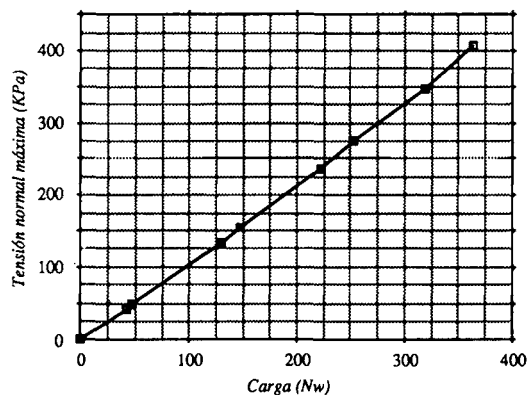


Figura 13. Relación entre la tensión máxima de contacto en la zona disco-apoyo y la carga aplicada.

Carga (Nw)	Tensión máxima (KPa) (M.E.C.)
132.84	42.28
148.33	48.62
408.03	133.87
458.29	154.88
696.31	235.44
787.93	274.36
998.36	347.74
1138.25	408.2

Tabla II.

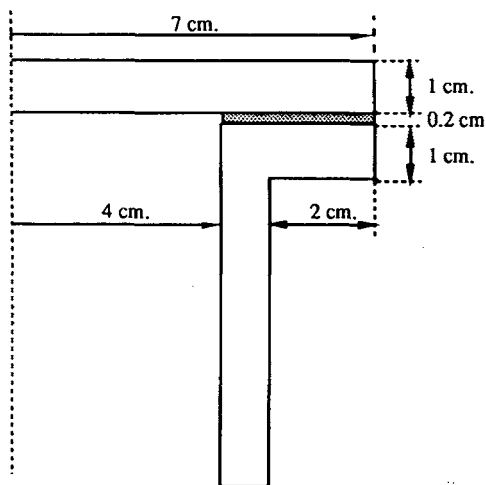


Figura 14. Contacto con apriete. Geometría.

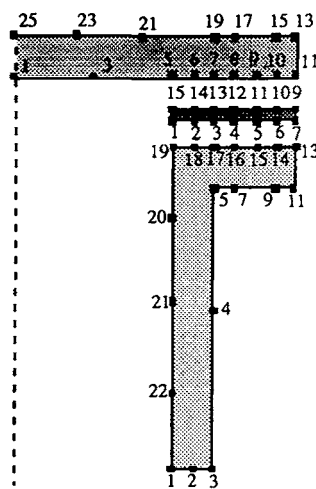


Figura 15. Contacto con apriete. Discretización.

características elásticas ($E = 2.1 \times 10^5$ MPa, $\nu = 0.3$), mientras que para la junta elástica se ha considerado un módulo de elasticidad diez veces menor con el mismo coeficiente de Poisson. El coeficiente de fricción es $\mu = 0.1$.

En las Figuras 16 y 17 se han representado las distribuciones de tensiones normales y tangenciales obtenidas en las zonas junta-cilindro y junta-tapa, respectivamente para la carga total aplicada (en este caso un único incremento de carga ha sido suficiente al permanecer toda la zona candidata en contacto y mantenerse toda ella en adhesión tal como se supuso inicialmente).

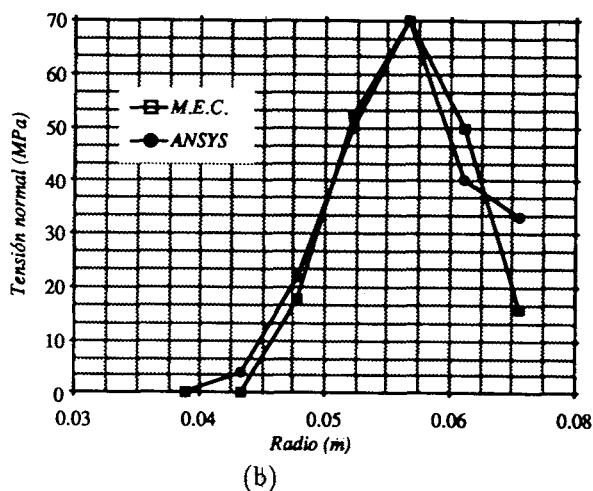
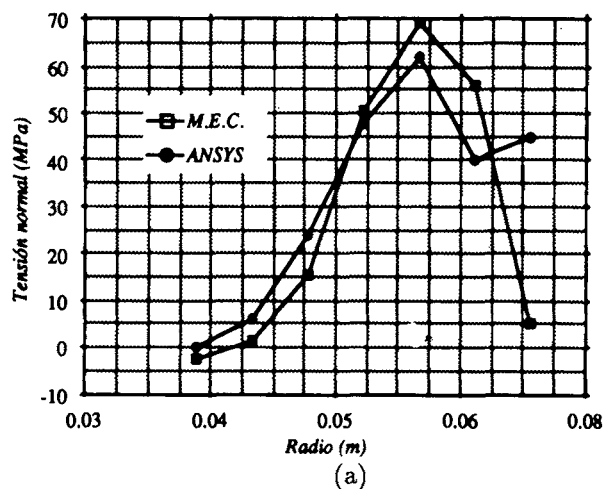


Figura 16. Tensiones normales: (a) junta-cilindro; (b) junta-tapa.

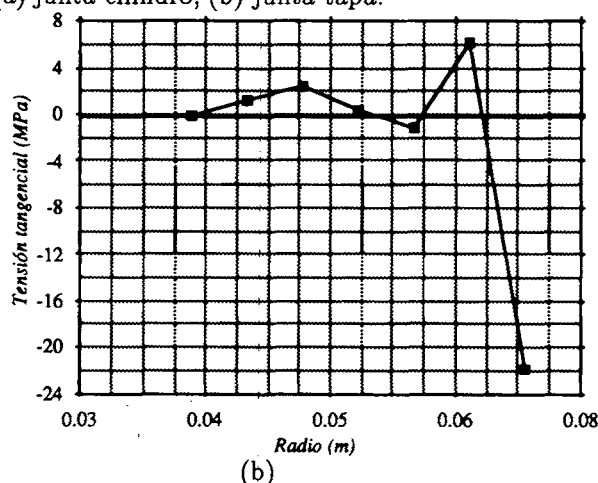
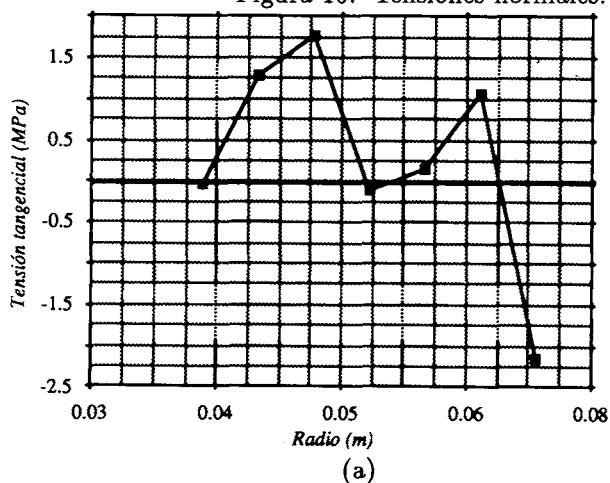


Figura 17. Tensiones tangenciales: (a) junta-cilindro; (b) junta-tapa.

Este mismo ejemplo ha sido resuelto con ANSYS²⁶ con 52 elementos cuadriláteros bilineales, 7 elementos de contacto (elemento 12 de ANSYS) para modelizar el contacto entre la parte superior de la junta y la inferior de la tapa, estando soldadas la parte superior del cilindro y la inferior de la junta, en forma análoga a la realizada en el modelo de elementos de contorno. En este caso no se considera el rozamiento por lo

que sólo es posible comparar la distribución de tensiones normales que se representa en la misma Figura 16. Se observa en este caso una discrepancia importante en los nudos extremos, que viene dictada esencialmente en el caso del resultado de elementos finitos por la utilización de un elemento nodal que no es capaz, con la discretización utilizada, de captar un gradiente de tensiones tan importante como el que se presenta en la zona cercana al borde. Es de resaltar que este resultado, para una malla tan basta afecta también al resto de valores para garantizar el equilibrio total de fuerzas en la zona de contacto, bajando ligeramente los valores de la distribución en el resto de nudos.

CONCLUSIONES

Se ha presentado la formulación del problema de contacto multicuerpo axisimétrico con pequeñas deformaciones y desplazamientos mediante el M.E.C., y se han mostrado las posibilidades del mismo, con grandes ventajas frente a otros métodos de dominio, especialmente el M.E.F. específicamente para este tipo de problemas.

La precisión conseguida tanto en la determinación de la zona de contacto como en la distribución de tensiones es alta, como se deduce de los resultados presentados, al compararla con resultados teóricos y otros obtenidos mediante el M.E.F. o formulaciones alternativas del M.E.C., que incorporan elementos discontinuos.

La mayor precisión de los elementos cuadráticos los hace aconsejables en problemas con grandes gradientes. En cualquier caso se consiguen muy buenas aproximaciones incluso con mallas relativamente bastas de elementos lineales, salvo en las zonas próximas a puntos con singularidades tales como los que aparecen en los extremos de zonas de contacto conforme. En estas situaciones la utilización de elementos singulares (incluso con órdenes de singularidad diferente al real) da lugar a mejoras sensibles en los resultados incluso con mallas muy poco refinadas¹⁷.

En los casos de pequeños desplazamientos aquí considerados no se han detectado modificaciones significativas de los resultados como consecuencia de la elección de la línea de chequeo del contacto como la normal media entre los nudos del par de contacto, frente a otras posibilidades como la dirección definida por la mínima distancia entre los mismos, mientras que sí es muy importante una discretización adecuada de acuerdo a los gradientes de carga esperados en relación con el tamaño de la zona de contacto.

La extensión de formulaciones de contacto previas entre dos cuerpos se ha generalizado a problemas multicuerpo, de tal forma que pueden abordarse problemas de contacto complejo bidimensionales o axisimétricos entre distintos cuerpos con gran comodidad y precisión, así como es posible resolver problemas de subdominios con propiedades diferentes sin más que utilizar el esquema general con elementos soldadura, si bien en este caso la eficiencia computacional no es alta, al asumir 12 incógnitas por par de contacto en vez de las 4 requeridas en un problema con subregionalización.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por la Diputación General de Aragón, a través del C.O.N.A.I., dentro del Proyecto de Investigación IT-1/90.

APENDICE

La solución fundamental de la ecuación de Navier para problemas axisimétricos es

$$\begin{aligned}
 U_{rr}(P, Q) &= \frac{A}{R_p r_q C} \left[[(3 - 4\nu)(R_p^2 + r_q^2) + 4(1 - \nu)\bar{z}]K(m) + \right. \\
 &\quad \left. + [C^2(3 - 4\nu) - \frac{\bar{z}(R_p^2 + r_q^2 + \bar{z})}{D}]E(m) \right] \\
 U_{rz}(P, Q) &= \frac{A(Z_p - z_q)}{R_p C} \left[K(m) - \frac{r_q^2 - R_p^2 + \bar{z}}{D} E(m) \right] \\
 U_{zr}(P, Q) &= \frac{A(Z_p - z_q)}{r_q C} \left[-K(m) + \frac{R_p^2 - r_q^2 + \bar{z}}{D} E(m) \right] \\
 U_{zz}(P, Q) &= \frac{2A}{C} \left[(3 - 4\nu)K(m) + \frac{\bar{z}}{D} E(m) \right]
 \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{16\pi^2 G(1 - \nu)} & C &= \sqrt{(R_p + r_q)^2 + \bar{z}} \\
 D &= (R_p - r_q)^2 + \bar{z} & \bar{z} &= (Z_p - z_q)^2
 \end{aligned}$$

y donde las funciones $K(m)$ y $E(m)$ corresponden a las integrales elípticas de primera y segunda especie².

REFERENCIAS

1. H. Hertz, "Miscellaneous Papers on the Contact of Elastic Solids. Translation by Jones, D.e. McMillan", London, (1986).
2. A. Tomasch y V. Hoersch, "V. Stresses due to the Pressure on One Elastic Solid on Another", *Bull. Engng. Experiment Station*, No. 212, University of Illinois, (1930).
3. N. Belajef, "Computation of Maximal Stresses Obtained from Formulas for Pressure in Bodies in Contact", *Bull. Eng. Ways Commun*, Leningrado (1929).
4. L. Goodman y L. Keer, "The Contact Stress Problems for an Elastic Sphere Indenting an Elastic Cavity", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 1, (1965).
5. B. Persson, "On the Stress Distribution of Cylindrical Elastic Bodies in Contact", *Chalmers Inst. of Technology*, Gothenburg, (1964).
6. G.M.L. Gladwell, "Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity", Sijthoff Noordhoff (1980).
7. T. Rodic y D.R.J. Owen, "A Plasticity Theory of Friction and Joint Elements", *Proc. 2nd. Int. Conf. on Computational Plasticity*, (Ed. D.R.J. Owen, E. Hinton, E. Oñate, Barcelona (1989).
8. E. Stein, P. Wriggers y T. Vu Van, "Models of Friction, Finite Element Implementation and Application to Large Deformation Impact-Contact Problem", *Proc. 2nd. Int. Conf. on Computational Plasticity*, Ed. D.R.J. Owen, E. Hinton, E. Oñate, Barcelona (1989).

9. J.T. Oden y E.E. Pires, "Nonlocal and Nonlinear Friction Laws and Variational Principles for Contact Problems in Elasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 67-76, (1983).
10. T. Andersson, B.G.A. Persson y B. Fredriksson, "The Boundary Element Method Applied to Two Dimensional Contact Problems. New Development in B.E.M.", (Ed. C.A. Brebbia), *Journal Proc. 2nd. Int. Seminar*, CML Publications, Southampton, U.K., (1980).
11. T. Andersson, "The Boundary Element Method Applied to Two Dimensional Contact Problems with Friction", *Proc. 3rd. Int. Conf. on B.E.M.*, Springer-Verlag, Irvine, California, (1981).
12. T. Andersson, "The Second Generation B.E. Contact Program", *Proc. 4th. Int. Conf. on B.E.M.*, Springer-Verlag, Southampton, U.K., (1982).
13. J.A. Garrido, "El problema de Contacto en Elasticidad mediante Ecuaciones Integrales", *Ph.D. Thesis*, Universidad de Las Palmas, (1986).
14. J.A. Garrido, A. Foces y F. Paris, "B.E.M. Applied to Receding Contact Problems with Friction", *Mathematical and Computers Modelling*, Vol. 15, pp. 143-153, (1991).
15. F. Paris y J.A. Garrido, "An Incremental Procedure for Friction Contact Problems with the Boundary Element Method", *Engineering Analysis with B.E.*, Vol. 6, pp. 202-213, (1989).
16. F. Paris y J.A. Garrido, "Friction Multicontact Problems with B.E.M.", *Proc. 10th. Int. Conf. on B.E.M.*, Springer-Verlag, Southampton, U.K., (1988).
17. M. Doblaré, F. Espiga, L. Gracia y M. Alcantud, "Determinación de Tensiones de Contacto entre Materiales Ortótropos mediante el M.E.C.", *Rev. Int. Met. Num. para Cálculo y Diseño en Ing.*, Vol. 5,3, pp. 395-420.
18. M. Doblaré, F. Espiga, L. Gracia y M. Alcantud, "Study of Crack Propagation in Orthotropic Materials by using the Boundary Element Method", *Eng. Fracture Mechanics*, Vol. 37, no.5, pp. 953-967, (1990).
19. J.A. Garrido, A. Foces y F. Paris, "B.E.M. Application of B.E.M. to Solve Three Dimensional Elastic Contact Problems without Friction", *Int. J. Computers and Struct.*, (1991).
20. C. Somigliana, "Sopra l'Equilibrio di un Corpo Elastico Isotropo", *Il Nuovo Cimento*, pp. 17-19, (1986).
21. T.A. Cruse, D.W. Snow y R.B. Wilson, "Numerical Solutions in Axisymmetric Elasticity", *Int. J. Computers Struct.*, Vol. 7, pp. 445-451, (1977).
22. M. Doblaré, "Computational Aspects of the B.E.M. in Topics in B.E. Research III", (Ed. C.A. Brebbia), pp. 51-131, Springer Verlag, (1987).
23. V.I. Krilow y A.A. Paltsen, "Tables for Numerical Integration of Functions with Logarithmic and Power Singularities", *ISRAEL Program for Scientific Translations*, Jerusalem, (1974).
24. M. Alcantud, J. Dominguez, L. Gracia y M. Doblaré, "Analysis of the Contact Problem between Elastoplastic 2-D Bodies by means of the B.E.M.", *Proc. EUROBEM Conference*, Niza, (1990).
25. A. Foces, "El Problema de Contacto en Elasticidad Tridimensional mediante Ecuaciones Integrales de Contorno", *Tesis Doctoral*, Universidad de Valladolid, (1991).
26. G.J. De Salvo y R.W. Gorman, "ANSYS. Engineering Analysis System. User's Manual", (1989).