

# ANALISIS POR ELEMENTOS FINITOS DE PROCESOS DE EMBUTICION DE CHAPA MEDIANTE UN MODELO VISCOPLASTICO CON DEGRADACION POR HUECOS

EUGENIO OÑATE  
CARLOS AGELET DE SARACIBAR  
y  
JEAN BAPTISTE DALIN

*E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos,  
Universidad Politécnica de Cataluña,  
Jordi Girona Salgado 31,  
08034 Barcelona.*

## RESUMEN

En este trabajo se presenta una analogía formal entre las ecuaciones de la teoría de flujo plástico y viscoplastico para metales con huecos y las de la elasticidad no lineal. Se muestra como por simplificación de las ecuaciones generales se obtiene la forma incompresible de las expresiones para metales sin huecos. La formulación general se particulariza para el análisis de problemas de embutición de chapa detallándose las formulaciones de lámina y membrana para tratar del problema de revolución. Finalmente, se presentan ejemplos de aplicación de estirado y embutición de una plancha circular.

## SUMMARY

A formal analogy between the equations of pure plastic and viscoplastic flow theory for void containing metals and those of standard non linear elasticity is presented. It is shown how by direct simplification of the general equations, the standard incompressible flow expressions for non voided metals are obtained. The general formulation is particularized for the analysis of sheet metal forming problems and details of the viscous voided shell and membrane formulations for dealing with the axisymmetric case are given. Finally, some examples of applications of pure extension, hemispherical stretching and deep drawing of a circular sheet are presented.

## INTRODUCCION

Es bien conocido que un método efectivo para estudiar la deformación continua de metales es utilizar un modelo de flujo rígido plástico en el que se prescinden de los efectos elásticos. El modelo más sencillo, y quizás también el más usado, utiliza el criterio de fluencia de von Mises, lo que se traduce en que el flujo es de naturaleza incompresible. Las ecuaciones del problema son, en este caso, totalmente análogas a las de la elasticidad

Recibido: Marzo 1989

incompresible, pudiendo intercambiarse los conceptos de desplazamiento, deformación y módulo de rigidez en el problema elástico, por los de velocidad, velocidad de deformación y viscosidad (no Newtoniana) en el problema de flujo<sup>1</sup>. Esta analogía ha permitido resolver problemas complejos de conformado de metales utilizando programas de elementos finitos escritos originalmente para elasticidad incompresible en dos y tres dimensiones<sup>2</sup>. La extensión de esta analogía para análisis de problemas de conformado condujo a la obtención de la denominada *formulación de láminas viscosas* basada en la modificación de la teoría infinitesimal de láminas elásticas utilizando la analogía flujo-elasticidad antes mencionada<sup>3,4</sup>.

Recientemente Oñate y otros<sup>5</sup> han extendido el modelo de láminas viscosas para tener en cuenta efectos de degradación del material por nucleación, crecimiento y coalescencia de huecos microscópicos. El modelo resultante de *láminas viscosas con huecos* introduce el efecto de compresibilidad del material en la forma de un modelo constitutivo de dos parámetros que pueden identificarse sencillamente como el módulo de rigidez y el coeficiente de Poisson de un material elástico no lineal análogo. Ello permite resolver por elementos finitos estos problemas, potencialmente más complejos, utilizando directamente programas escritos para los clásicos problemas de elasticidad (comprimible)<sup>6</sup>.

El objetivo de este artículo es presentar de forma unificada los conceptos básicos del modelo de láminas viscosas para materiales plásticos/viscoplásticos incluyendo el efecto de degradación del material por desarrollo de huecos microscópicos. La formulación se particularizará para el caso de revolución utilizando sencillos elementos de lámina y membrana de revolución de dos nodos. Finalmente se presentarán ejemplos de aplicación de la formulación a problemas de estirado y embutición de una plancha circular.

## CONCEPTOS BASICOS

La base de la formulación del flujo plástico/viscoplástico es suponer que durante el proceso de deformación las deformaciones *elásticas* son despreciables<sup>1-3</sup>. Esta hipótesis permite escribir la siguiente ecuación para la velocidad de deformación

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^{NL} = f(\sigma_{ij}) \quad (1)$$

donde  $\dot{\epsilon}_{ij}$  y  $\dot{\epsilon}_{ij}^{NL}$  indican las tensiones de velocidad de deformación total y no lineal —plástica/viscoplástica— respectivamente. La forma de la función  $f$  depende del tipo de modelo constitutivo plástico/viscoplástico que se utilice. En cualquier caso, la ecuación (1) describe el comportamiento de un *fluído* equivalente en el que las velocidades de deformación se relacionan con las velocidades  $u_i$  por

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad o \quad \dot{\epsilon} = L\mathbf{u} \quad (2)$$

y las tensiones satisfacen las clásicas condiciones de equilibrio

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} && \text{en el volumen } V \\ \mathbf{M}^T \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{t} && \text{en el contorno } \Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{t}$  son vectores de fuerzas másicas y de superficie, respectivamente, y  $\mathbf{M}$  es una matriz que contiene las componentes de la normal al contorno  $\Gamma$ .

En los siguientes apartados se presentarán formas particulares de la ecuación (1) para un material plástico/viscoplastico con y sin efectos de degradación por huecos.

### FLUJO RIGIDO PLASTICO DE METALES CON HUECOS

El criterio de fluencia de un material metálico con huecos arbitrariamente distribuidos de forma esférica (en problemas tridimensionales) o cilíndrica en problemas planos puede escribirse siguiendo a Gurson<sup>9</sup> como

$$\Phi = \frac{3}{2} \frac{s_{ij} s_{ij}}{\sigma_M^2} - \omega = 0 \quad (4)$$

$\sigma_{ij}$  y  $s_{ij}$  son la tensión y la tensión desviadora de Cauchy macroscópicas, respectivamente,  $\sigma_M$  es el límite de fluencia del material matriz (supuesto incompresible),  $f$  es la porosidad del material (porcentaje volumétrico de huecos) y

$$\omega = 1 - 2f \cosh\left(\frac{\sigma_{kk}}{2\sigma_M}\right) + f^2 \quad (5)$$

Adviértase que para valores nulos de la porosidad ( $f = 0$ )  $\omega = 1$  y la ecuación (4) se reduce al conocido criterio de von Mises<sup>2</sup>. El cambio en la porosidad durante un incremento de deformación se toma como<sup>9-11</sup>

$$\dot{f} = \dot{f}_g + \dot{f}_n + \dot{f}_c \quad (6)$$

donde los subíndices  $g$ ,  $n$  y  $c$  indican crecimiento, nucleación y coalescencia de huecos. Asimismo, es usual suponer que<sup>10,11</sup>

$$\dot{f}_g = (1 - f)\dot{\epsilon}_{kk}^{(p)} \quad \dot{f}_n = \frac{k}{\sigma_M}(\dot{\sigma}_M + \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3}) \quad (7)$$

siendo el parámetro de nucleación  $k$  el porcentaje volumétrico de partículas que se convierten en huecos por incremento unitario de tensión. Por otra parte, la nucleación se supone que ocurre sólo si el valor aproximado de la tensión normal máxima  $\sigma_M + \frac{\sigma_{kk}}{3}$  excede en el incremento de tiempo el valor máximo obtenido en el incremento anterior. Finalmente, el término  $\dot{f}_c$  puede tenerse en cuenta numéricamente de la forma siguiente. De acuerdo con Tvergaard<sup>11</sup>, la coalescencia tiene lugar para  $f \simeq 0.20$ . Por consiguiente, un esquema sencillo y efectivo para reproducir este fenómeno, consiste en incrementar proporcionalmente el valor de  $f$ , en los puntos en que  $f = 0.2$ , en un número fijo de

incrementos ( $\simeq 5$ ) hasta que  $f = 1$ , momento en que la capacidad portante del material se anula.

Haciendo uso de la teoría clásica de la plasticidad<sup>8,9</sup> puede obtenerse la siguiente expresión para las velocidades de deformación no lineales (plásticas) de la ecuación (1)

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(p)} = \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\bar{G}} \left( \sigma_{ij} - \frac{\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (8)$$

donde

$$\bar{G} = \frac{\sigma_M}{3\dot{\epsilon}} \left( \frac{\omega + fAS}{1-f} \right) \quad (9)$$

$$\bar{\nu} = \frac{1-B}{2+B} \quad (10)$$

con  $B = \frac{fS}{2A}$ ,  $A = \frac{\sigma_{kk}}{2\sigma_M}$ ,  $S = \operatorname{senh} A$  y  $\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}$

Comparando (8) con la clásica ecuación constitutiva de la elasticidad lineal, y teniendo en cuenta las ecuaciones (2) y (3) puede concluirse fácilmente que existe una perfecta analogía entre las ecuaciones del flujo plástico de un metal con huecos y las de la elasticidad clásica. Por tanto, los desplazamientos y las deformaciones del modelo elástico pueden interpretarse como las velocidades y velocidades de deformación del modelo de flujo plástico, y el módulo de rigidez elástico y el coeficiente de Poisson como los parámetros  $\bar{G}$  y  $\bar{\nu}$  de las ecuaciones (8) y (9), y viceversa. Adviéntase la dependencia de los parámetros  $\bar{G}$  y  $\bar{\nu}$  en las tensiones/deformaciones lo que hace que el modelo elástico análogo sea no lineal y, por consiguiente, la solución numérica debe encontrarse de forma iterativa.

## FLUJO PLASTICO DE MATERIALES SIN HUECOS

Para materiales plásticos sin huecos  $f = 0$  y  $\omega = 1$  y, por lo tanto, de las ecuaciones (8)–(10) se deduce que

$$\bar{G} = \frac{\sigma_M}{3\dot{\epsilon}} \quad (11)$$

$$\bar{\nu} = \frac{1}{2} \quad (12)$$

y

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\bar{G}} \left( \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) = \frac{s_{ij}}{2\bar{G}} \quad (13)$$

Así, pues, se recupera la incomprensibilidad de la deformación, típica de estos casos, y la expresión del módulo de rigidez equivalente  $\bar{G}$  coincide con la de la viscosidad no Newtoniana del clásico problema de flujo plástico<sup>2,6</sup>.

## INCLUSION DE EFECTOS VISCOPLASTICOS

La expresión para la velocidad de deformación viscoplástica puede postularse como<sup>8</sup>

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{ij} &= \gamma \chi^n \frac{\partial \chi}{\partial \sigma_{ij}} && \text{para } \chi > 0 \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= 0 && \text{para } \chi = 0\end{aligned}\quad (14)$$

donde  $\gamma$  es el parámetro de fluidez y  $\chi$  representa el “exceso de tensión viscoplástica” definido por

$$\chi = \sqrt{\frac{3 s_{ij} s_{ij}}{2 \omega} - \sigma_M} \quad (15)$$

Nótese que para un problema no viscoso  $\chi = 0$ , cumpliéndose la ecuación (4).

Sustituyendo la ecuación (14) en la (13) y haciendo uso del concepto de trabajo viscoplástico efectivo del material degradado  $\bar{w}^{vp}$  definido por

$$\bar{\omega}^{vp} = \dot{\epsilon}^{vp} \bar{\sigma} = \frac{1}{1-f} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \sigma_{ij} \quad (16)$$

se obtiene, tras operar, una expresión para la velocidad de deformación viscoplástica idéntica a la ecuación (8) con

$$\begin{aligned}\bar{G} &= \frac{(\sigma_M + \chi)}{3\dot{\epsilon}^{vp}} \frac{\omega + fAS}{1-f} \\ \bar{\nu} &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{3(\sigma_M - \chi^2) fS}{4 \sigma_M^2 A + (\sigma_M + \chi)^2 f S} \right]\end{aligned}\quad (17a)$$

Adviértase que para  $\chi = 0$  se recuperan las expresiones de  $\bar{G}$  y  $\bar{\nu}$  de la ecuación (9) para el problema no viscoso.

Por otra parte, es interesante advertir que si se considera el material sin huecos ( $f = 0, \omega = 1$ ) las expresiones de la ecuación (16) se convierten en

$$\bar{G} = \frac{\sigma_M + \chi}{3\dot{\epsilon}^{vp}} = \frac{\sigma_M + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n}}}{3\dot{\epsilon}^{vp}} \quad (17b)$$

$$\nu = 0.5 \quad (17c)$$

coincidiendo el valor de  $\bar{G}$  con el de la viscosidad del flujo viscoplástico incompresible obtenida en [2], [6].

Hay que destacar que las expresiones de  $\bar{G}$  y  $\bar{\nu}$  de la ecuación (16) difieren de las obtenidas recientemente por los autores en [7] en base a un procedimiento más simplificado. Se remarca, no obstante, que las expresiones aquí presentadas

no introducen ninguna simplificación en las ecuaciones viscoplásticas y pueden, por consiguiente, considerarse exactas.

## APLICACION A PROBLEMAS DE EMBUTICION DE CHAPA

La analogía presentada en los apartados anteriores permite resolver problemas de grandes deformaciones plásticas/viscoplásticas en la embutición de chapa, haciendo uso directamente de la teoría infinitesimal de láminas elásticas. El esquema de solución sigue las etapas siguientes:

- 1) Seleccionar una formulación para análisis infinitesimal de láminas con material elástico. Si se utiliza el *método de los elementos finitos* la solución numérica del problema implica resolver, tras la discretización, un sistema de ecuaciones algebraicas que en forma matricial se escribe como<sup>8</sup>

$$\mathbf{K}(G, \nu) \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (18)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez de la lámina y  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{f}$  son los vectores de desplazamientos y fuerzas nodales, respectivamente. El modelo de *láminas viscosas con huecos* equivalente se formula identificando desplazamientos y deformaciones con velocidades y velocidades de deformación, respectivamente, y el módulo de rigidez y el coeficiente de Poisson son los parámetros  $\bar{G}$  y  $\bar{\nu}$  dados en los apartados anteriores. Para el caso de material sin huecos  $\bar{\nu} = 1/2$  y  $\bar{G}$  viene dado por las ecuaciones (9) y (17 b) para el caso viscoso y no viscoso, respectivamente. La ecuación (18) se convierte entonces en un sistema de ecuaciones no lineales que debe resolverse iterativamente. En la primera iteración deben definirse los valores de las velocidades  $\mathbf{a}^0$  y porosidad  $\mathbf{f}^0$  iniciales.

- 2) Calcular  $\mathbf{a}^1$ . Si se utiliza iteración directa la primera iteración es

$$\mathbf{a}^1 = [\mathbf{K}(\mathbf{a}^0)]^{-1} \mathbf{f} \quad (19)$$

- 3) Calcular la convergencia del campo de velocidades utilizando una norma adecuada<sup>5</sup>. Si no se obtiene convergencia se vuelve a la etapa 2.
- 4) Una vez obtenida la convergencia se actualiza la geometría por  $\mathbf{a} \Delta t$ , donde  $\Delta t$  es un incremento de tiempo adecuado que puede tomarse como un valor constante, o igual al incremento de tiempo para el que el primer nodo libre de la plancha entra en contacto con el punzón o la matriz<sup>5</sup>. Asimismo, si uno o más nodos entran en contacto con el punzón o la matriz deben cambiarse las condiciones de contorno. Finalmente, deben actualizarse los valores del espesor y la porosidad de los puntos de la plancha, de acuerdo con los valores calculados para las deformaciones a través del espesor y volumétrica, respectivamente.
- 5) El proceso de solución se inicia con los nuevos valores de la geometría y porosidad de la plancha.

El algoritmo es, por tanto, muy simple y permite incluir otros fenómenos como

endurecimiento por deformación y rozamiento de una forma muy sencilla<sup>5-7</sup> (El problema del rozamiento se tratará asimismo en un apartado posterior).

Es interesante advertir que en estados avanzados de la deformación de la plancha el campo espacial de velocidades no cambia significativamente entre dos configuraciones sucesivas. Por consiguiente, pueden obtenerse ahorros importantes en el tiempo de cálculo actualizando la geometría de la plancha utilizando el mismo campo espacial de velocidades para varios incrementos de tiempo<sup>7</sup>.

Hemos de destacar asimismo, que en problemas de flujo plástico la iteración directa proporciona convergencia del campo de velocidades en pocas iteraciones<sup>20-5</sup>. Sin embargo, si se considera un material viscoplástico la no linealidad del problema aumenta y para conseguir convergencia en un número razonable de iteraciones es necesario acudir a un algoritmo de solución de Newton-Raphson. En cualquier caso, deben tomarse precauciones para prever un valor límite máximo del módulo de rigidez en zonas de la plancha donde se produzcan movimientos de sólido rígido para evitar el mal condicionamiento de la matriz de rigidez.

En los apartados siguientes se presentan detalles de la formulación de elementos finitos de láminas viscosas con huecos para problemas de embutición con simetría de revolución.

## FORMULACION DE LAMINAS VISCOSAS

El éxito de la formulación de láminas viscosas se basa, como se ha indicado con anterioridad, en la eficiencia de la formulación de láminas elásticas análoga. En este apartado se presentan brevemente las expresiones fundamentales de la formulación de láminas viscosas de revolución con efectos de degradación por huecos desarrollada por Oñate y otros<sup>7</sup>, para análisis de problemas de embutición de chapa. La formulación se basa en la teoría de láminas de Reisnner-Mindlin y utiliza el sencillo elemento de revolución de dos nodos. Los detalles de esta teoría de láminas pueden encontrarse en las referencias [5], [7] y [14].

Una vez discretizada la lámina de revolución en elementos lineales (ver Figura 1) el campo de velocidades de un elemento puede expresarse por

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i \quad \text{con} \quad \mathbf{N}_i = \mathbf{N}_i I_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad (20)$$

donde  $u_i$ ,  $w_i$  y  $\theta_i$  son las dos velocidades cartesianas y la velocidad angular del nodo  $i$ , respectivamente, y  $N_i$  es la función de forma del nodo  $i$  (ver Figura 1).

Los vectores de velocidad de deformación y de tensiones se expresan por<sup>7</sup>

$$\dot{\epsilon} = [\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\theta, \dot{\gamma}]^T = \sum_{i=1}^2 S \mathbf{B}_i \mathbf{a}_i \quad (21)$$

$$\sigma = [\sigma_r, \sigma_\theta, \tau]^T = \mathbf{D} \dot{\epsilon} = \mathbf{D} \sum_{i=1}^2 S \mathbf{B}_i \mathbf{a}_i \quad (22)$$

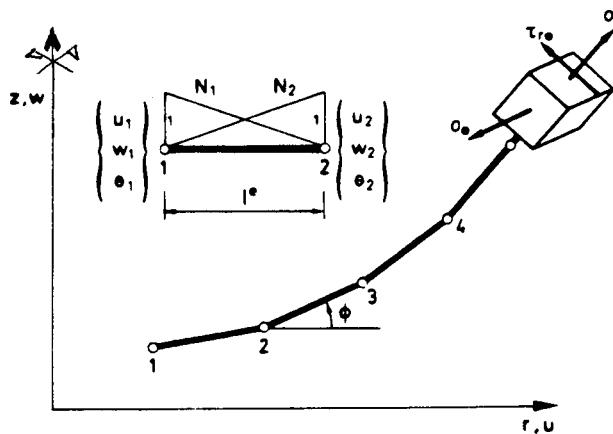


Figura 1. Lámina de revolución. Discretización en elementos lineales.

donde para un material isótropo

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$d_{11} = d_{22} = 2\bar{G} \frac{1}{1 - \bar{\nu}} \quad , \quad d_{12} = d_{21} = 2\bar{G} \frac{\bar{\nu}}{1 - \bar{\nu}} \quad , \quad d_{33} = \bar{G} \quad (24)$$

donde  $\bar{G}$  y  $\bar{\nu}$  son los parámetros de la formulación del flujo plástico/viscoplástico con huecos, dados en apartados previos y  $\mathbf{B}$  es la matriz de velocidad de deformación cuya expresión se muestra en el Apéndice junto con la de la matriz  $\mathbf{S}$ .

La matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(e)}$  y el vector de fuerzas nodales  $\mathbf{f}^{(e)}$  del elemento se obtienen por

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = 2\pi \int_{l^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_j r ds \quad (25)$$

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = 2\pi \int_{l^{(e)}} \mathbf{N}_i t r ds + 2\pi r_i \mathbf{p} \quad (26)$$

donde  $l^{(e)}$  es la longitud del elemento,  $r$  la coordenada radial,  $t$  y  $\mathbf{p}$  vectores de carga repartidas y puntuales, respectivamente y la expresión de la matriz  $\hat{\mathbf{D}}$  se da en el Apéndice. Se ha demostrado que para la utilización con éxito de este sencillo elemento troncocónico la matriz de rigidez debe calcularse utilizando una cuadratura de Gauss de un solo punto<sup>14</sup>. Esto permite obtener una expresión incluso más simple y explícita de  $\mathbf{K}_{ij}^{(e)}$  como

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = 2\pi \bar{\mathbf{B}}_i^T \hat{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}}_j \bar{r} l^{(e)} \quad (27)$$

donde  $(\cdot)$  indica valores calculados en el centro del elemento. La expresión de  $\bar{\mathbf{B}}_i$  se obtiene de forma inmediata sustituyendo los términos  $N_i$  y  $\frac{\partial N_i}{\partial s}$  en la ecuación (A.1) por  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{(-1)^i}{l^{(e)}}$ , respectivamente.

## FORMULACION DE MEMBRANA DE REVOLUCION

En muchos problemas de embutición puede deducirse una buena aproximación utilizando una formulación de membrana. Dicha formulación puede deducirse fácilmente para el caso de revolución prescindiendo de los términos de flexión y cortante en las expresiones obtenidas en la formulación general presentada en el apartado anterior. Los vectores y matrices de interés son ahora los siguientes

$$\text{Vector de velocidades: } \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 N_i I_2 \mathbf{a}_i \quad \mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (28)$$

$$\text{Vector de deformaciones generalizadas: } \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_r \\ \dot{\epsilon}_\theta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 B_{m_i} \mathbf{a}_i \quad (29)$$

$$\text{Vector de esfuerzos axiles: } \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_r \\ \hat{\sigma}_\theta \end{Bmatrix} = D_m \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = D_m \sum_{i=1}^2 B_{m_i} \mathbf{a}_i \quad (30)$$

con

$$D_m = t \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \quad (31)$$

donde  $t$  es el espesor, los coeficientes  $d_{ij}$  se dieron en la ecuación (24) y

$$B_{m_i} = \begin{bmatrix} \cos \phi \frac{\partial N_i}{\partial s} & \sin \phi \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{N_i}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Finalmente, la forma explícita de la matriz de rigidez para el elemento lineal se obtiene en este caso por una expresión idéntica a la (27) con  $B_{mi}$  y  $D_m$  en vez de  $B_i$  y  $\hat{D}$ , respectivamente.

## TRATAMIENTO DEL ROZAMIENTO

Un algoritmo sencillo para simular el efecto del rozamiento entre las superficies en contacto de la plancha con el punzón o la matriz puede basarse en un ajuste de las reacciones nodales en los nodos en contacto en cada iteración hasta que satisfagan la condición de rozamiento de Coulomb. Este procedimiento se ha utilizado con éxito por los autores<sup>5,7</sup> y será el empleado en los ejemplos que se muestran en este artículo.

Un algoritmo alternativo para simular el contacto entre plancha/punzón/matriz y el rozamiento entre dichas superficies se basa en imponer las condiciones de contacto por un método de penalización, partiendo de la energía potencial total de las fuerzas de contacto con las condiciones de compatibilidad geométrica. De manera general, las condiciones de contacto pueden escribirse como

$$\mathbf{r} = \mathbf{Ca} - \mathbf{s} \quad (33)$$

donde  $\mathbf{a}$  es el campo de velocidades correspondiente a una configuración deformada y  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{s}$  se obtienen de las correspondientes condiciones de contacto fijo o deslizante<sup>15</sup>.

La expresión de la energía potencial total penalizada usando la ecuación (33) es expresa por

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{f} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{r} \quad (34)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha}$  es una matriz de penalización diagonal. La estacionaridad de (34) proporciona el sistema de ecuaciones que debe resolverse en cada iteración como

$$[\mathbf{K} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}] \mathbf{a} = \mathbf{f} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{s} \quad (35)$$

Las condiciones de rozamiento se consideran en cada iteración imponiendo una relación del tipo Coulomb entre las fuerzas normal y tangencial resultantes sobre cada elemento perteneciente a la superficie de contacto. Para más detalle del tratamiento del contacto y del rozamiento consúltese el trabajo de Agelet de Saracibar<sup>18</sup>.

### EJEMPLO 1. ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DE LA POROSIDAD EN EL CAMBIO DE ESPESOR

En el primer ejemplo se estudia el efecto del desarrollo de la porosidad en el cambio de espesor en una plancha circular de radio = 2.20 pulgadas y un espesor inicial de 0.035 pulgadas sometida a un estiramiento de revolución hasta la rotura ( $f = 1.0$ ). La relación tensión efectiva deformación efectiva del material matriz viene dada por

$$\sigma_Y = 5.4 + 27.8\bar{\epsilon}^{0.504} \quad \text{tn/in}^2 \quad \bar{\epsilon} < 0.36$$

$$\sigma_Y = 5.4 + 24.4\bar{\epsilon}^{0.375} \leq 22.0 \quad \text{tn/in}^2 \quad \bar{\epsilon} \geq 0.36$$

Se utilizan cincuenta elementos de revolución lineales en el análisis. Las distribuciones de espesores y porosidad se muestran en la Figura 2 para dos casos de  $k = 0.005$  y  $k = 0.01$ , respectivamente con  $f^0 = 0.01$  en el elemento 20 ( $r = 1.0$  pulgada) en ambos casos. Se observa en dicha figura que el desarrollo de la porosidad afecta fuertemente la distribución de espesores, que de otra manera sería uniforme, y causa localización en el elemento 20 como era de esperar. Se observa asimismo en dicha figura que la inclusión del parámetro de nucleación  $k$  amplifica el desarrollo de la porosidad, aunque, paradógicamente, esto no afecta al valor del espesor mínimo límite que es prácticamente idéntico en ambos casos.

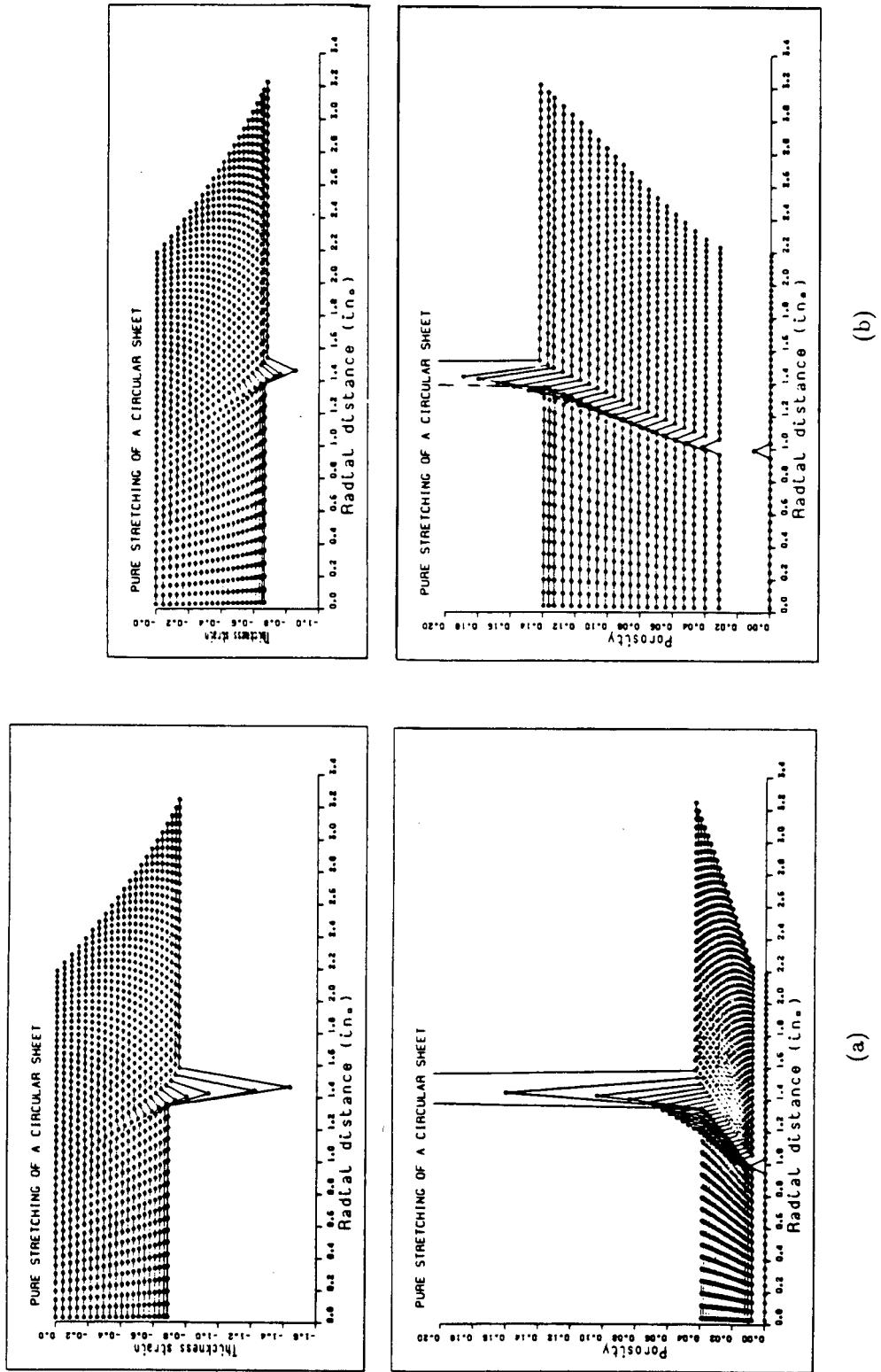


Figura 2. Estirado de una plancha circular. Efecto de la porosidad en la deformación sobre el espesor  $f^0$  en toda la plancha excepto  $f^0 = 0.01$  en el elemento 20 correspondiente a  $r = 1$  pulgada. (a)  $k = 0.005$ ,  
(b)  $k = 0.01$ .

## EJEMPLO 2. EMBUTICION ESFERICA DE UNA PLANCHA CIRCULAR EMPOTRADA EN SU CONTORNO

En la Figura 3 se muestra la geometría del problema. Para la solución se han utilizado también cincuenta elementos lineales en este caso. La curva tensión-deformación efectiva del material matriz es la misma que en el ejemplo anterior. Por otra parte, se ha utilizado un coeficiente de rozamiento de 0.04 como se sugiere en [16].

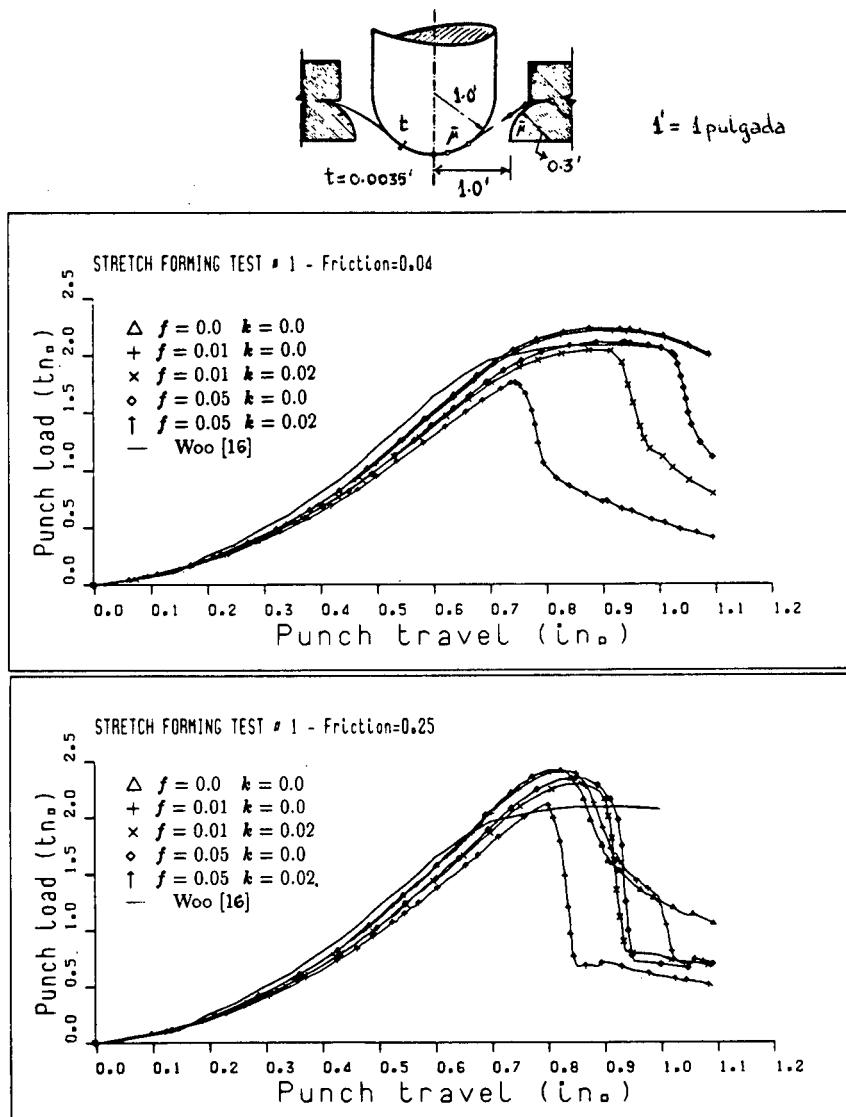


Figura 3. Embutición esférica de una plancha circular con bordes empotrados. Curva fuerza de embutición/desplazamiento del punzón para diferentes condiciones de porosidad inicial y parámetro de nucleación.

El problema se ha analizado para tres porosidades iniciales de  $f^0 = 0.0$ ,  $f^0 = 0.01$  y  $f^0 = 0.05$  y dos parámetros de nucleación de  $k = 0.0$  y  $k = 0.02$  en todos los elementos. En la Figura 3 se muestran los resultados para la curva fuerza de embutición-desplazamiento del punzón obtenidos para los diferentes valores de  $f^0$  y  $k$  mencionados. De dichos resultados pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- a) Un aumento de los valores de la porosidad inicial y del parámetro de nucleación produce una reducción progresiva de la capacidad resistente de la plancha. Los valores de la fuerza de embutición máxima obtenidos con  $f^0 = 0.0$  y  $0.01$  con  $k = 0.0$  y  $0.02$  y  $f^0 = 0.05$  con  $k = 0.0$  concuerdan bien con los resultados experimentales publicados en [16]. Sin embargo, para  $f^0 = 0.05$  y  $k = 0.02$  se obtiene una reducción de la fuerza de embutición máxima de aproximadamente un 35 por ciento.
- b) Los efectos de porosidad inducen *localización* con una rápida pérdida de rigidez que da lugar a una caída casi vertical de la curva fuerza/desplazamiento. Para más detalles sobre este ejemplo consultese la referencia<sup>7</sup>.

### EJEMPLO 3. EMBUTICION ESFERICA DE UNA PLANCHA CIRCULAR CON CONTORNO DESLIZANTE

La configuración geométrica del problema se muestra en la Figura 4. De nuevo se utilizan cincuenta elementos lineales para el análisis. Los parámetros del material y de rozamiento son idénticos a los del problema anterior. En la Figura 4 se muestran resultados de la curva fuerza de embutición/desplazamiento y de las tensiones circunferencial y a través del espesor para valores de  $f^0 = 0.0$  y  $k = 0.0$ . Dichos resultados coinciden todos bien con los experimentales publicados en<sup>17</sup>. Por otra parte, se ha comprobado la menor sensitividad de los resultados numéricos mencionados a cambios moderados en los valores de la porosidad inicial y del parámetro de nucleación en comparación con los producidos en el ejemplo anterior. Finalmente, en la Figura 5 se muestra una perspectiva de la geometría de la plancha para diferentes configuraciones deformadas.

### CONCLUSIONES

Se muestra en este artículo que las ecuaciones que describen el flujo plástico y viscoplástico de metales incluyendo los efectos de degradación del material por nucleación, crecimiento y coalescencia de huecos microscópicos son análogas a las de la elasticidad compresible clásica. La formulación para metales sin huecos se obtiene directamente de la del problema general prescindiendo del efecto de los huecos, lo que conduce a expresiones análogas a las de la elasticidad incompresible. Estas analogías permiten resolver problemas de embutición de chapa con efectos de degradación por huecos, utilizando formulaciones de elementos finitos desarrolladas para análisis lineal de láminas.

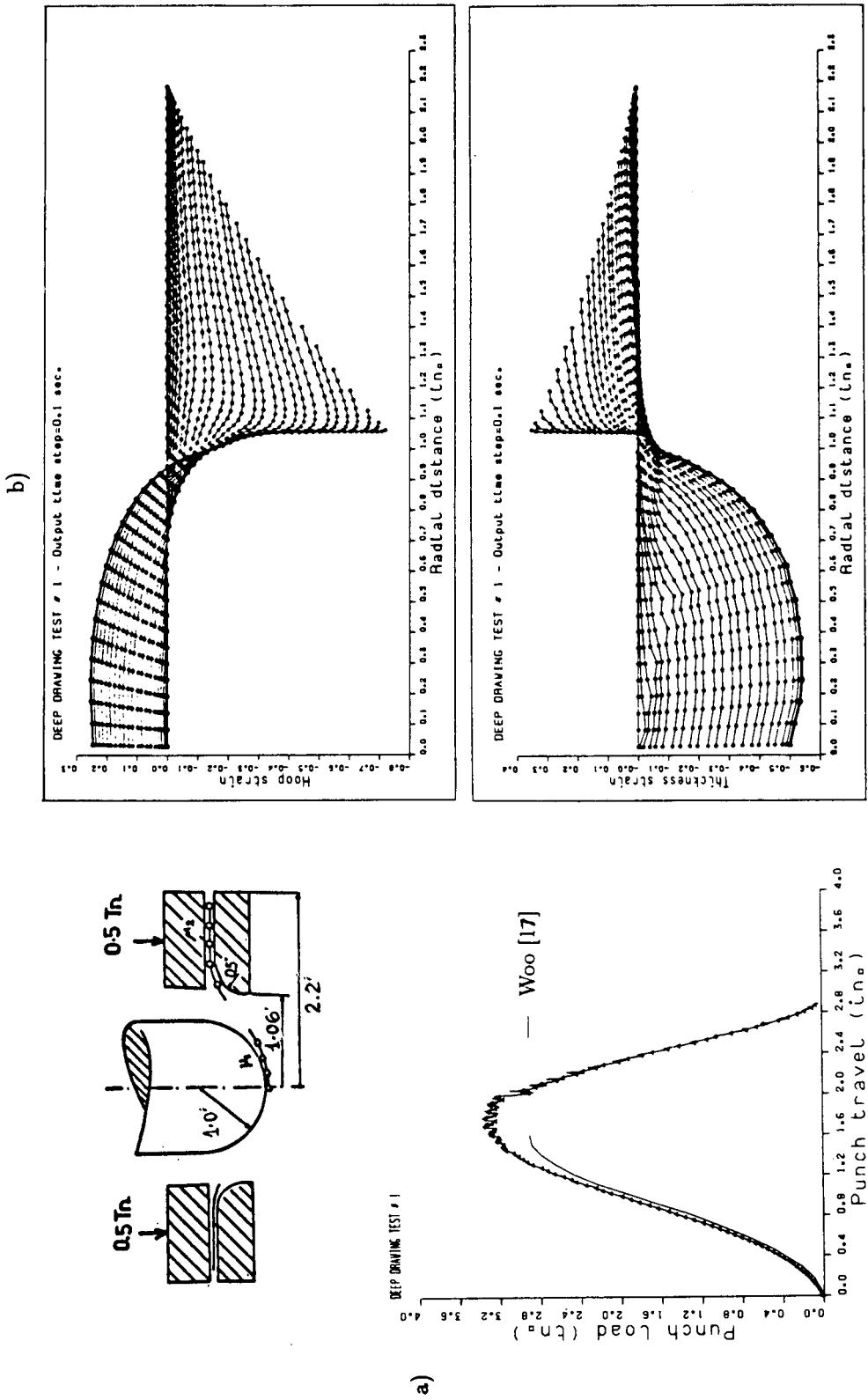


Figura 4. Embutición esférica de una plancha circular con bordes deslizantes. (a) Curvas fuerza/desplazamiento, (b) Distribución de las deformaciones circunferencial y sobre el espesor para varias configuraciones deformadas.

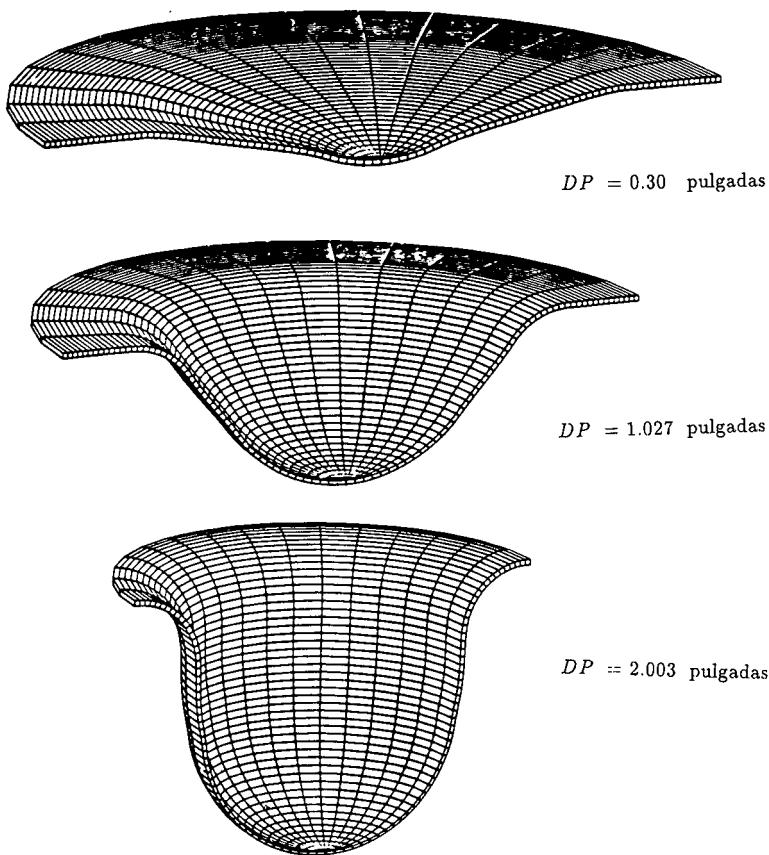


Figura 5. Embutición esférica de una plancha circular con bordes deslizantes. Geometría de la plancha para varias configuraciones deformadas. (DP = desplazamiento del punzón).

Los ejemplos analizados muestran que ajustando parámetros tales como los valores y distribución de la porosidad y del parámetro de nucleación, el modelo puede ser una herramienta de utilidad para predecir el desarrollo de huecos y la rotura localizada del material.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido a través de la Dirección General de Investigación Científica y Tecnológica (Proyecto PB87-0603) y del Programa BRITE (Proyecto P-2029).

## REFERENCIAS

- 1 . O.C. Zienkiewicz y P.N.Godbole, "Flow of Plastic and Viscoplastic Solids with Special Reference to Extrusion and Forming Processes", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 8, pp. 3-16, (1979).
- 2 . O.C. Zienkiewicz, P.C. Jain y E. Oñate, "Flow of Solids During Forming and Extrusion. Some Aspects of Numerical Solutions", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 14, pp. 15-38, (1978).
- 3 . O.C. Zienkiewicz, E. Oñate y J.C. Heinrich, "A General Formulation for Coupled Thermal Flow of Metals Using Finite Elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 17, pp. 1497-1514, (1981).
- 4 . J.F.T. Pittman, O.C. Zienkiewicz, R.D. Wood y J.M. Alexander (eds.), *Numerical Analysis of Forming Processes*, Wiley, New York, (1984).
- 5 . E. Oñate y O.C. Zienkiewicz, "A Viscous Shell Formulation for the Analysis of Thin Sheet Metal Forming", *Int. J. Mech. Sc.*, Vol. 25, pp. 305-335, (1983).
- 6 . E. Oñate, "Análisis de Problemas de Conformado de Metales por el Método de los Elementos Finitos Utilizando una Formulación de Flujo Viscoplástico", *Mecánica Computacional*, Editado por Luis A. Godoy, Asociación Argentina de Mecánica Computacional (AMCA), pp. 152-178, (1986).
- 7 . E. Oñate, M. Kleiber y C. Agelet de Saracibar, "Plastic and Viscoplastic Flow of Void Containing Metals. Applications to Axisymmetric Sheet Forming Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 25, pp. 225-251, (1988).
- 8 . O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, (1979).
- 9 . A.L. Gurson, "Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth. I. Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media", *J. Eng. Mater. Tech.*, Vol. 99, pp. 2-15, (1977).
- 10 . A. Needleman, y J.R. Rice, "Limits to Ductility Set by Plastic Flow Localization", *Mechanics of Sheet Metal Forming*, D.P. Koistinen and N.-M. Wang (eds.), pp. 237-266, Plenum, N.Y., (1978).
- 11 . V. Tvergaard, "On Localization in Ductile Materials Containing Spherical Voids", *Int. J. Fracture*, Vol. 18, pp. 237-252, (1982).
- 12 . M. Kleiber, "Numerical Study on Necking-type Bifurcations in Void-containing Elastic-plastic Material", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 20, pp. 191-210, (1984).
- 13 . J.M.W. Baynham y O.C. Zienkiewicz, "Developments in the Finite Element Analysis of Thin Sheet Drawing and Direct Redrawing Processes Using the Rigid Plastic Approach", *Proceedings of International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, B.J.F.T. Pittman et al. (eds.), Pineridge Press, Swansea, (1982).
- 14 . O.C. Zienkiewicz, J. Bauer, K. Morgan y E. Oñate, "A Simple and Efficient Shell Element for Axisymmetric Shells", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 11, pp. 1545-1559, (1977).
- 15 . K.J. Bathe, K.J. y A. Chaudary, "A Solution Method for Planar and Axisymmetric Contact Problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 21, pp. 65-88, (1985).
- 16 . D.M. Woo, "The Stretch Forming Test", *The Engineer*, Vol. 220, pp. 876-889, (1965).
- 17 . D.M. Woo, "On The Complete Solution of the Deep-drawing Problem", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 10, pp. 83-94, (1968).
- 18 . Agelet de Saracibar, C. , "Análisis por el Método de los Elementos Finitos de Procesos de Conformado de Láminas Metálicas", *Tesis Doctoral*, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Cataluña, (1990).

## APENDICE

### MATRICES DE VELOCIDAD DE DEFORMACION CONSTITUTIVA PARA LA FORMULACION DE LAMINAS VISCOSAS DE REVOLUCION

*Matriz de velocidad de deformación*

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \cos \phi \frac{\partial N_i}{\partial s} & \sin \phi \frac{\partial N_i}{\partial s} & 0 \\ \frac{N_i}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial s} \\ 0 & 0 & -N_i \frac{\cos \phi}{r} \\ -\sin \phi \frac{\partial N_i}{\partial s} & \cos \phi \frac{\partial N_i}{\partial s} & -N_i \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

el ángulo  $\phi$  puede verse en la Figura 1.

*Matriz constitutiva*

$$\hat{\mathbf{D}} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} dz' \quad (A.2)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

donde  $z'$  es la coordenada en la dirección del espesor y los valores de  $d_{ij}$  se dan en la ec.(24). Adviértase que el cálculo de  $\hat{\mathbf{D}}$  exige una integración sobre el espesor, lo que se efectúa en la práctica utilizando integración numérica<sup>5,8</sup>.