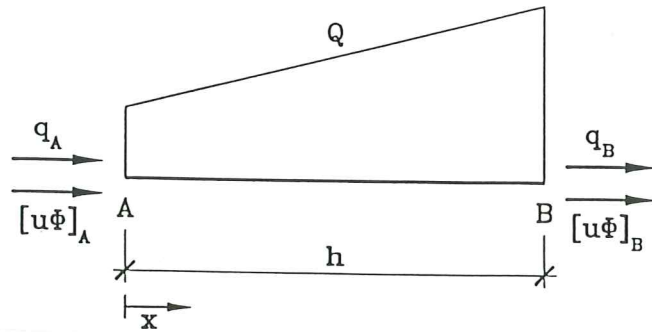


Formulación de Elementos Finitos Estabilizada para Problemas de Transporte Convectivo y Flujo Incompresible Mediante Técnicas de Cálculo Finitesimal

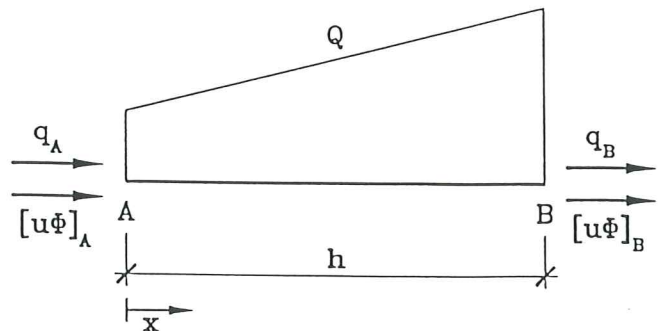
E. Oñate



$$r - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx} = 0, \quad 0 < x < l$$

Formulación de Elementos Finitos Estabilizada para Problemas de Transporte Convectivo y Flujo Incompresible Mediante Técnicas de Cálculo Finitesimal

E. Oñate



$$\boxed{r - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx} = 0} \quad , \quad 0 < x < l$$

**Formulación de Elementos Finitos
Estabilizada para Problemas de
Transporte Convectivo y
Flujo Incompresible Mediante
Técnicas de Cálculo Finitesimal**

E. Oñate

Publicación CIMNE Nº PB-169, Julio 1999

FORMULACION DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADA PARA PROBLEMAS DE TRANSPORTE CONVECTIVO Y FLUJO INCOMPRESIBLE MEDIANTE TECNICAS DE CALCULO FINITESIMAL

E. Oñate

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)
Universidad Politécnica de Cataluña
Campus Norte UPC, 08034 Barcelona, España
e-mail: onate@etseccpb.upc.es, página web: <http://www.cimne.upc.es/>

Palabras clave: Transporte convectivo, flujo incompresible, estabilización, elementos finitos, cálculo finitesimal

Resumen. *El trabajo muestra que los términos de estabilización para la solución por el MEF de problemas de transporte convectivo y de flujo incompresible, pueden obtenerse de manera natural utilizando aproximaciones de mayor orden en las ecuaciones de balance en un dominio finito. Este procedimiento de cálculo finitesimal permite reinterpretar muchos algoritmos de elementos finitos estabilizados utilizados en la práctica y proporciona también una expresión para calcular los parámetros de estabilización.*

1 INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que los métodos de elementos finitos basados en técnicas de Galerkin aplicados a problemas de transporte convectivo conducen invariablemente a soluciones oscilatorias para valores moderados y altos de la convección [1,2]. El problema se agrava en el caso de problemas de fluidos incompresibles debido al carácter mixto de las ecuaciones que limita las interpolaciones de elementos finitos para las velocidades y la presión. Los métodos tradicionales para obtener soluciones correctas (estables) en problemas de convección-difusión se basan en la adición directa de términos de difusión artificial en las ecuaciones originales [1–5]. Recientemente se han propuesto métodos más rigurosos como SUPG [5], GLS [6], Taylor-Galerkin [7], Characteristic Galerkin (CG) [2,8] y Variational Multiscale (VM) [9] para obtener soluciones de elementos finitos estables para problemas de transporte convectivo. En la ref.[10] se comparan varios de estos métodos. Todos ellos introducen (al menos) un parámetro (conocido como parámetro de estabilización, longitud característica, tiempo intrínseco, etc.) que controla la “estabilidad” de la solución numérica.

Muchos de estos métodos, tales como el GLS, CG y VM, permiten utilizar interpolaciones de igual orden para las velocidades y la presión en el problema de flujo incompresible al introducir una laplaciano de presión en la ecuación de balance de masa, preservando la estabilidad de los términos convectivos en las ecuaciones de cantidad de movimiento [5,6,8].

El cálculo exacto de los parámetros de estabilización, puede hacerse solo para problemas unidimensionales (1D) sencillos [1,2]. Las expresiones 1D se han extendido al caso multidimensional de manera heurística por diferentes autores a lo largo de casi dos décadas para problemas de transporte convectivo y dinámica de fluidos.

Unos de los primeros intentos de evaluar los parámetros de estabilización en problemas 2D se debe a Idelsohn utilizando un principio pseudo-variacional [12]. Hughes [9] y más tarde Brezzi *et al.* [13–15] han propuesto una expresión para dichos parámetros basada en una aproximación de la función de Green sobre el elemento, utilizando funciones de forma tipo “burbuja”. Pese a dichos intentos no se conoce una metodología suficientemente general que permita evaluar fácilmente los parámetros de estabilización en problemas de interés práctico.

En este trabajo se propone un método conceptualmente diferente para obtener soluciones numéricas estables en problemas de convección-difusión y flujo incompresible. El método, presentado originalmente en [16–19] se basa en la introducción de los términos de estabilización en las ecuaciones diferenciales originales del problema utilizando el concepto de balance sobre un dominio de dimensión finita. Las nuevas ecuaciones estabilizadas mediante esta técnica de “cálculo finitesimal” son la base para evaluar los parámetros de estabilización mediante un proceso iterativo.

El contenido del trabajo se ordena como sigue. En el apartado siguiente se resumen las ideas esenciales para obtener las nuevas ecuaciones diferenciales estabilizadas en problemas de convección-difusión 1D y 2D. Tras ello se describe brevemente la

discretización por el método de elementos finitos (MEF), resaltándose la analogía con métodos de estabilización tradicionales y se propone una metodología para calcular los parámetros de estabilización. En la segunda parte del trabajo se aplican las mismas ideas para obtener una formulación de elementos finitos estabilizada para análisis de problemas de flujo incompresible, utilizando interpolaciones de igual orden para las velocidades y la presión.

2 FORMA ESTABILIZADA DE LAS ECUACIONES DE CONVECCIÓN-DIFUSIÓN

2.1 Problema unidimensional

Consideremos por simplicidad el problema de convección-difusión sobre un dominio unidimensional de longitud l (Figura 1a). La Figura 1b muestra un segmento típico AB de longitud $\overline{AB} = h$ donde se debe satisfacer el balance de flujos. Los valores de la tasa de flujo difusivo q y de flujo convectivo $u\phi$ en el punto A de coordenada $x_A = x_B - h$ pueden aproximarse en función de valores en el punto B , utilizando los siguientes desarrollos de alto orden [16]

$$[u\phi](x_B - h) = [u\phi](x_B) - h \frac{d[u\phi]}{dx} \Big|_B + \frac{h^2}{2} \frac{d^2[u\phi]}{dx^2} \Big|_B - O(h^3) \quad (1)$$

$$q(x - h) = q(x) - h \frac{dq}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2q}{dx^2} + O(h^3) \quad (2)$$

$$Q(x - h) = Q(x) - h \frac{dQ}{dx} + O(h^2) \quad (3)$$

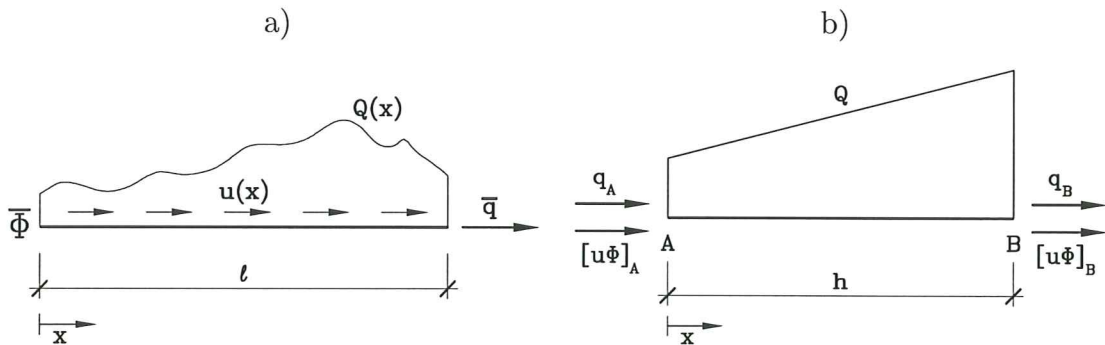


Figura 1. (a) Problema unidimensional de convección-difusión. (b) Dominio de balance finito AB

El balance de flujos entre los dos puntos A y B se escribe como

$$\sum \text{Flujos} = [\text{Flujo en A}] - [\text{Flujo en B}] + \int_0^h Q dx = 0 \quad (4)$$

Sustituyendo las ecs. (1)–(3) en (4) y haciendo uso de la ley de Fourier $q = -k \frac{d\phi}{dx}$ se obtiene finalmente, tras simplificar,

$$\boxed{r - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx} = 0} \quad , \quad 0 < x < l \quad (5)$$

donde

$$r = -\nu \frac{d(u\phi)}{dx} + \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + Q \quad (6)$$

Adviértase que para $h \rightarrow 0$ (es decir cuando el dominio de balance es infinitesimal) se recupera la forma estándar de la ecuación diferencial de balance.

En (6) ϕ es la variable que se transporta, u es la velocidad, ν y k son parámetros del material y Q es una fuente distribuida.

La condición de contorno de Dirichlet es la usual

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad (7)$$

donde $\bar{\phi}$ es el valor prescrito.

Por coherencia la condición de contorno de Neumann debe escribirse en forma estabilizada. Esto puede hacerse sencillamente considerando el balance en un segmento AB próximo a un contorno. Por conveniencia, se toma la longitud de dicho segmento $AB = h/2$ [16] (Figura 2).

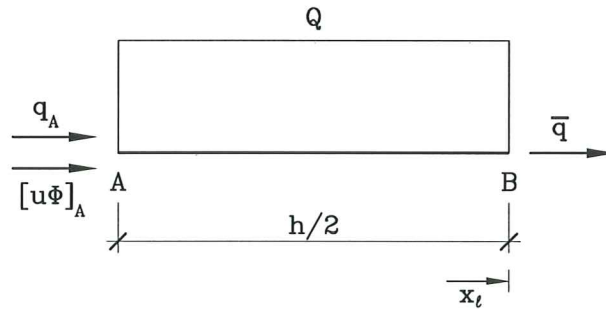


Figura 2. Dominio de balance en la proximidad de un punto del contorno de Neumann B

Aproximando los flujos advectivos y difusivos en A en función de desarrollos de segundo orden, la ecuación de balance en el contorno se escribe como [16]

$$\boxed{-\nu u\phi + k \frac{d\phi}{dx} + \bar{q} - \frac{h}{2} r = 0} \quad \text{en } x = l \quad (8)$$

La nueva ecuación diferencial estabilizada (5) puede resolverse ahora juntamente con las condiciones (7) y (8). El conjunto de dichas ecuaciones son el punto de partida

para desarrollar esquemas numéricos estables por diferencias finitas, elementos finitos y volúmenes finitos.

La extensión de las ecuaciones estabilizadas al caso transitorio puede encontrarse en [16,19].

2.2 Problemas de convección-difusión bidimensional

Los conceptos del apartado previo pueden extenderse fácilmente al caso bidimensional. Consideremos un dominio rectangular de dimensiones finitas h_x y h_y . Se supone una variación lineal para los flujos convectivos y difusivos sobre los lados del dominio de balance como se muestra en la Figura 3. La ecuación de balance se obtiene utilizando desarrollos de Taylor de tercer orden para los flujos convectivos y difusivos y de segundo orden para el término de fuente. Con esas aproximaciones se puede obtener la ecuación de balance de flujos como [16]

$$\boxed{r - \frac{1}{2}\mathbf{h}^T \nabla r = 0} \quad \text{en } \Omega \quad (9)$$

donde

$$\begin{aligned} r &= -\nu \nabla^T \mathbf{f} + \nabla^T (\mathbf{D} \nabla \phi) + Q \\ \mathbf{h} &= [h_x, h_y]^T \quad \mathbf{f} = [u\phi, v\phi]^T \\ \nabla &= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]^T \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

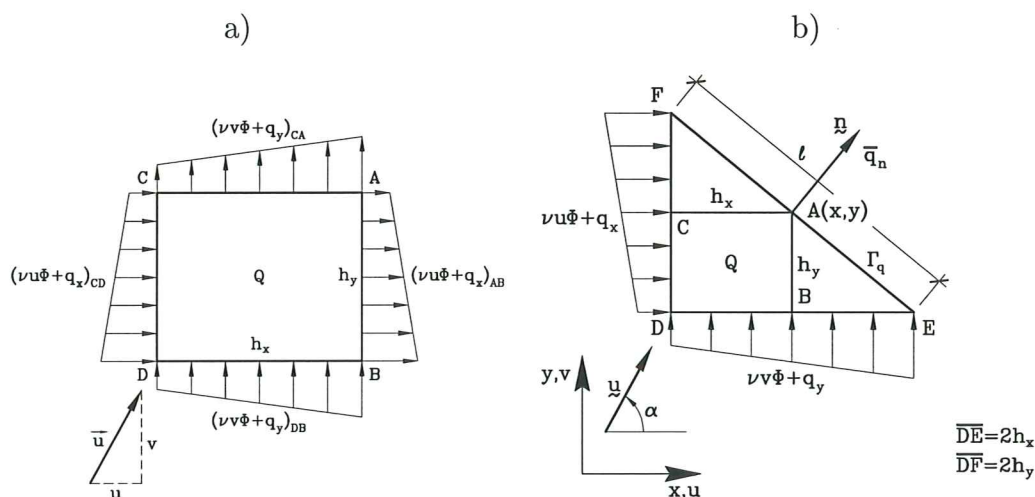


Figura 3. (a) Dominio bidimensional finito para balance de flujos.
(b) Dominio para balance de flujos en un contorno de Neumann

Las condiciones de contorno se escriben como

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \quad \text{en } \Gamma_\phi \quad (11)$$

donde Γ_ϕ es el contorno de Dirichlet donde se prescribe la variable y

$$\boxed{-\nu \mathbf{n}^T \mathbf{u} \phi + \mathbf{n}^T \mathbf{D} \nabla \phi + \bar{q}_n - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{n} r = 0} \quad \text{en } \Gamma_q \quad (12)$$

donde \bar{q}_n es el flujo total prescrito en el contorno de Neumann Γ_q y $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T$ es el vector normal. La ec.(12) se ha obtenido por balance de flujos en el dominio de la Figura 3b utilizando la misma técnica que para el caso 1D explicado anteriormente [16].

2.3 Discretización en elementos finitos

Construyamos una discretización de elementos finitos estándar. La aproximación de ϕ dentro de cada elemento e de n nodos se escribe como [2]

$$\phi \simeq \hat{\phi} = \sum_{i=1}^n N_i \phi_i \quad (13)$$

donde N_i son las funciones de forma y ϕ_i son los valores nodales de la función aproximada $\hat{\phi}$. Sustituyendo la ec.(13) en las ecuaciones diferenciales estabilizadas se obtiene (por ejemplo para el problema 2D) [16]

$$\hat{r} - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \nabla \hat{r} = r_\Omega \quad \text{en } \Omega \quad (14a)$$

$$\hat{\phi} - \bar{\phi} = r_\phi \quad \text{en } \Gamma_\phi \quad (14b)$$

$$-\nu \mathbf{n}^T \mathbf{u} \hat{\phi} + \mathbf{n}^T \mathbf{D} \nabla \hat{\phi} + \bar{q}_n - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{n} \hat{r} = r_q \quad \text{en } \Gamma_q \quad (14c)$$

donde r_Ω , r_ϕ y r_q son los residuos de la solución numérica sobre el dominio Ω y los contornos Γ_ϕ y Γ_q , respectivamente.

Aplicando el método de Galerkin estándar a las ecs.(14) y siguiendo el método usual, se puede escribir la forma débil resultante como [16]

$$\int \int_{\Omega} (N_i + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \nabla N_i) \hat{r} d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_i (-\nu \mathbf{n}^T \mathbf{u} \hat{\phi} + \mathbf{n}^T \mathbf{D} \nabla \hat{\phi} + \bar{q}_n) d\Gamma = 0 \quad (15)$$

Adviértase que, aceptando que el vector longitud característica \mathbf{h} tiene la dirección de la velocidad (i.e. $\mathbf{h} = \frac{h}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u}$) se recupera exactamente la forma del conocido método SUPG [5,16]. La limitación del método SUPG es que solo introduce la estabilidad

necesaria (en forma de una difusión adicional) a lo largo de las líneas de corriente. Ello impide obtener solución en direcciones transversales a la velocidad. La corrección usual en estos casos se basa en añadir nuevos términos de estabilización “transversal” que permiten capturar estos gradientes [20–22]. En la formulación que aquí se presenta, la forma general del vector \mathbf{h} permite obtener una solución estable en todos los casos, sin necesidad de introducir parámetros adicionales.

Es importante destacar que a partir de la nueva forma estabilizada de las ecuaciones diferenciales del problema pueden recuperarse también las expresiones discretizadas de otros métodos clásicos como Characteristic-Galerkin, Taylor-Galerkin, GLS, etc [16]. Puede por tanto afirmarse, que dichas ecuaciones diferenciales son la *forma intrínseca* de la solución estable del problema.

3 REFLEXIONES SOBRE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL MODIFICADA

Consideremos la solución con elementos finitos lineales de dos nodos de la ecuación diferencial (5) con $Q = 0$, $\nu = 1$ y u y k constantes.

Utilizando una malla de elementos uniforme de longitud l se obtiene una ecuación típica para un nodo i como

$$-u \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2l} + \left(k + \frac{uh}{2}\right) \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{l^2} = 0 \quad (16)$$

Adviértase que la ecuación anterior es la misma que se obtendría discretizando la ec.(5) con el método de diferencias finitas centradas y prescindiendo del término en derivadas terceras de ϕ .

Tomemos ahora $h = \alpha l$ siendo l la longitud del elemento y α el parámetro de estabilización, que se supone el mismo para todos los elementos.

Reorganizando la ec.(16) se obtiene

$$-u \left(\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{l}\right) \alpha - u \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2l}\right) (1 - \alpha) + k \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{l^2} = 0 \quad (17)$$

Nótese que para $\alpha = 0$ se recupera la aproximación de diferencias finitas centradas, aplicada a *todos los términos* de la ecuación diferencial clásica ($r = 0$). Por otra parte, para $\alpha = 1$ se encuentra una aproximación de diferencias *hacia atrás* para el término convectivo (lo que en la terminología inglesa se denomina “full upwinding”), mientras que se mantiene la aproximación de diferencias centradas para el término difusivo.

Se deduce, por tanto, que el parámetro de estabilización α hace las veces de parámetro de interpolación entre las aproximaciones por diferencias centradas ($\alpha = 0$) y hacia atrás ($\alpha = 1$) para el término convectivo. Obviamente, la selección del parámetro óptimo es un tema pendiente, que depende del criterio de “optimalidad” adoptado.

Consideremos, ahora, la situación en que $\phi_i = 0$ y $\phi_{i+1} = \bar{\phi}$, en lo que podríamos denominar un *test de la parcela* para el problema de convección-difusión. Obviamente, el valor de ϕ_i debe encontrarse entre 0 y 1 ($\phi_i = \bar{\phi}/2$ para el problema puramente difusivo). Una simple operación en la ec.(17) proporciona

$$\phi_i = \frac{1}{2}(1 + \alpha\gamma)^{-1}[1 + \alpha\gamma - \gamma]\bar{\phi} \quad (18)$$

donde $\gamma = \frac{ul}{2k}$ es el número de Peclet del elemento. Obsérvese que para $\gamma = 0$ se encuentra que $\phi_i = \bar{\phi}/2$ tal como se esperaba. Por otra parte, para $\alpha = 0$ el valor de ϕ_i es negativo para $\gamma > 1$, lo que demuestra que la aproximación de Galerkin (o la equivalente de diferencias finitas centradas) es inestable. La estabilidad se consigue en este caso escogiendo el valor de α que garantice que $\phi_i \geq 0$. De (18) se deduce

$$\phi_i \geq 0 \quad \text{si} \quad \alpha \geq 1 - \frac{1}{\gamma} \quad (19)$$

Este valor de α coincide con el denominado *parámetro de estabilización crítico*, que garantiza una solución estable [2].

4 CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DE ESTABILIZACIÓN

El método para calcular los componentes del vector \mathbf{h} se basa en la denominada técnica de “residuo decreciente” propuesta en [16–19].

Definamos el residuo medio sobre un elemento de una cierta solución numérica como

$$r^{(e)} = \frac{1}{\Omega^{(e)}} \int_{\Omega^{(e)}} r_{\Omega} d\Omega \quad (20)$$

donde r_{Ω} viene definido por la ec.(14a). Sustituyendo ésta en (20) se obtiene

$$r^{(e)} = r^{(e)} - \frac{1}{2}[\mathbf{h}^{(e)}]^T (\nabla \hat{r})^{(e)} \quad (21)$$

En (21) se ha tomado por simplicidad $\mathbf{h} = \mathbf{h}^{(e)}$ constante sobre el elemento.

El vector de longitud característica puede expresarse según sus componentes en dirección del vector velocidad $\mathbf{u} = [u, v]^T$ y el vector velocidad normal $\mathbf{u}_n = [-v, u]^T$ como

$$\mathbf{h}^{(e)} = \frac{1}{|\mathbf{u}|} [h_s \mathbf{u} + h_n \mathbf{u}_n]^{(e)} = \frac{l^{(e)}}{|\mathbf{u}|} [\alpha_s \mathbf{u} + \alpha_n \mathbf{u}_n]^{(e)} \quad (22)$$

donde h_s y h_n son longitudes características a lo largo de las líneas de corriente y en dirección transversal, respectivamente. Dichas longitudes se pueden expresar como proporción de una longitud típica del elemento, i.e. $h_s = \alpha_s l^{(e)}$ y $h_n = \alpha_n l^{(e)}$. Adviértase que aceptar h_n (o α_n) = 0 es equivalente a considerar \mathbf{h} alineado con la

velocidad, como ocurre en el método SUPG [2,5]. El término que incluye h_n permite capturar altos gradientes y discontinuidades no necesariamente ortogonales a la dirección de la velocidad [20–22].

Consideremos que una vez obtenida la solución por elementos finitos, se recupera una solución mejorada utilizando, por ejemplo, técnicas de recuperación superconvergente de derivadas [23,24]. Si $r_1^{(e)}$ y $r_2^{(e)}$ son los residuos elementales de la solución original y mejorada, respectivamente debe cumplirse que (para $r_1^{(e)} > 0$)

$$r_1^{(e)} - r_2^{(e)} \geq 0 \quad (23)$$

Sustituyendo la ec.(22) en (21) y ésta en (23) se obtiene

$$[\alpha_s \mathbf{u}^T + \alpha_n \mathbf{u}_n^T]^{(e)} (\nabla \hat{r}_2^{(e)} - \nabla \hat{r}_1^{(e)}) \geq \frac{2|\mathbf{u}|}{l^{(e)}} (\hat{r}_2^{(e)} - \hat{r}_1^{(e)}) \quad (24)$$

La ec.(24) permite obtener $\alpha_s^{(e)}$ y $\alpha_n^{(e)}$ mediante el siguiente esquema iterativo.

- 1) Resolver el problema definido por las nuevas ecuaciones estabilizadas, utilizando valores arbitrarios iniciales de los parámetros de estabilización $\alpha_s^{(e)} = \alpha_s^{(e)}$, $\alpha_n^{(e)} = \alpha_n^{(e)}$.
- 2) Recuperar un campo de derivadas mejorado. Calcular $\hat{r}_1^{(1)}$, $\hat{r}_1^{(2)}$, $\nabla \hat{r}_1^{(e)}$ y $\nabla \hat{r}_2^{(e)}$.
- 3) Calcular un valor mejorado del parámetro de estabilización a lo largo de las líneas de corriente $\alpha_s^{(e)}$ por

$$\alpha_s^{(e)} = \frac{2|\mathbf{u}|}{l^{(e)} \mathbf{u}^T (\nabla \hat{r}_2^{(e)} - \nabla \hat{r}_1^{(e)})} [\hat{r}_2^{(e)} - \hat{r}_1^{(e)} - \alpha_n^{(e)} \mathbf{u}_n^T (\nabla \hat{r}_2^{(e)} - \nabla \hat{r}_1^{(e)})] \quad (25)$$

- 4) Repetir las etapas 1–3 hasta que converja el valor de $\alpha_s^{(e)}$, manteniendo constante $\alpha_n^{(e)}$.
- 5) Repetir las etapas 1–4 para calcular $\alpha_n^{(e)}$, utilizando la expresión análoga a (25), manteniendo $\alpha_s^{(e)}$ constante e igual al valor previamente calculado.
- 6) Repetir el proceso para encontrar valores mejorados de $\alpha_s^{(e)}$ y $\alpha_n^{(e)}$.

Es importante resaltar que para $\alpha_n = 0$ el esquema anterior proporciona el valor del parámetro de estabilización crítico del método SUPG. En las referencias [16,17] se demuestra que en el problema de convección-difusión 1D sin término de fuente, resuelto con elementos lineales, se encuentra el valor crítico deducido en el apartado anterior $\alpha^{(e)} = 1 - \frac{1}{\gamma^{(e)}}$, donde $\gamma^{(e)} = \frac{ul^{(e)}}{2k}$ es el número de Peclet elemental.

5 FORMULACION ESTABILIZADA DEL MEF PARA FLUJO VISCOSO INCOMPRESIBLE

La forma estabilizada “finitesimal” de las ecuaciones que gobiernan el flujo de un fluido viscoso incompresible se obtiene aplicando las leyes de conservación estandar que expresan el balance de cantidad de movimiento y masa en un volumen de control de tamaño finito. Expresando la variación de masa y de cantidad de movimiento en dicho dominio por series de Taylor y reteniendo términos de un orden mayor al usual de la teoría infinitesimal, se obtienen las expresiones siguientes

Cantidad de movimiento

$$r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{mj} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (26)$$

Conservación de masa

$$r_d - \frac{1}{2} h_{dj} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (27)$$

donde para el caso estacionario

$$r_{m_i} = \rho \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - b_i \quad (28)$$

$$r_d = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (29)$$

con $i, j = 1, 2$ para un flujo bidimensional.

En la ec.(28) ρ es la densidad del fluido que se supone constante, u_i es la componente de la velocidad en la dirección i , p es la presión, b_i son las fuerzas másicas y τ_{ij} las tensiones viscosas que se relacionan con los gradientes de velocidad a través de la viscosidad μ por

$$\tau_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (30)$$

con

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (31)$$

Las ecs.(26) y (27) son la forma estabilizada de las ecuaciones diferenciales de gobierno para un fluido viscoso incompresible. Los términos subrayados en dichas ecuaciones introducen, de forma natural, la estabilización necesaria a nivel discreto. Los vectores de longitud característica \mathbf{h}_m y \mathbf{h}_d se definen como (para problemas 2D)

$$\mathbf{h}_m = \begin{Bmatrix} h_{m_1} \\ h_{m_2} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{h}_d = \begin{Bmatrix} h_{d_1} \\ h_{d_2} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

donde h_{m_1} and h_{m_2} son las dimensiones del volumen de control donde se establece el balance de cantidad de movimiento. Similarmente h_{d_1} y h_{d_2} representan las dimensiones del dominio donde se expresa el balance de masa. Las componentes de los vectores \mathbf{h}_m y \mathbf{h}_d introducen la estabilización necesaria a lo largo de las líneas de corriente y transversalmente a ellas en el problema discreto. Adviértase que $\mathbf{h}_m = \mathbf{h}_d \rightarrow 0$ se recuperan las clásicas expresiones de la teoría infinitesimal para las ecuaciones de balance de masa y de cantidad de movimiento.

Las ecs.(26) y (27) se completan con las condiciones de contorno siguientes

Balance de cantidad de movimiento en el contorno

$$n_j \tau_{ij} - t_i + \frac{1}{2} h_{m_j} n_j r_{m_i} = 0 \quad \text{en } \Gamma_t \quad (33)$$

donde n_i son las componentes de la normal unitaria al contorno y t_i son las fuerzas prescritas sobre el contorno de Neumann Γ_t del dominio Ω .

Velocidad prescrita en los contornos

$$u_t = u_t^p \quad \text{en } \Gamma_{u_t} \quad (34)$$

$$u_n - \frac{1}{2} h_{d_i} n_i r_d = u_n^p \quad \text{en } \Gamma_{u_n} \quad (35)$$

En la ec.(34) u_t y u_t^p denotan, respectivamente, la velocidad tangente al contorno Γ_{u_t} y su valor prescrito. Por otra parte, la ec.(35) expresa el balance de masa en un dominio arbitrario próximo al contorno Γ_{u_n} . En dicha ecuación u_n y u_n^p son la velocidad normal al contorno y su valor prescrito, respectivamente. El valor de u_n^p es igual a cero en paredes sólidas y superficies libres estacionarias. El contorno de Dirichlet se define como $\Gamma_u = \Gamma_{u_t} \cup \Gamma_{u_n}$.

Los términos subrayados en las ecs.(33) y (35) introducen la estabilización necesaria en los contornos de forma compatible con las ecs.(26) y (27). Dichos términos se obtienen expresando el balance de cantidad de movimiento y de masa en un dominio de tamaño finito próximo al contorno. Los detalles pueden verse en [16].

5.1 Forma alternativa de las ecuaciones de gobierno

Por conveniencia expresaremos las componentes del vector \mathbf{h}_d en la ecuación de balance de masa por

$$h_{d_i} = -2\rho\tau_{d_i}u_i \quad (36)$$

donde τ_{d_i} se denominan parámetros de tiempo intrínseco por unidad de masa. El signo negativo en la ec.(36) es necesario para introducir una estabilización positiva en la ecuación de balance de masa a nivel discreto, como se verá más adelante.

De simples reglas de derivación se deduce

$$u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) - \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \quad (37)$$

Sustituyendo la ec.(36) en la (27) y haciendo uso de las ecs.(26), (28) y (37) puede reescribirse la ecuación de balance de masa (despreciando términos de mayor orden) por

$$r_d - \tau_{d_i} \frac{\partial \hat{r}_{m_i}}{\partial x_i} = 0 \quad (38)$$

donde

$$\hat{r}_{m_i} = \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - b_i \quad (39)$$

Siguiendo un proceso similar, la ec.(35) que expresa el balance de masa en el contorno puede reescribirse, utilizando las ecs.(36) y (38), por

$$u_n - \tau_{d_i} n_i \hat{r}_{m_i} = u_n^p \quad \text{en } \Gamma \quad (40)$$

Para mayor claridad se resume a continuación el conjunto de ecuaciones a resolver.

Cantidad de movimiento

$$\boxed{r_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_j} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} = 0} \quad \text{en } \Omega \quad (41)$$

Conservación de masa

$$\boxed{r_d - \tau_{d_i} \frac{\partial \hat{r}_{m_i}}{\partial x_i} = 0} \quad \text{in } \Omega \quad (42)$$

Condiciones de contorno

$$\boxed{n_j \sigma_{ij} - t_i + \frac{1}{2} h_{m_j} n_j r_{m_i} = 0 \quad \text{en } \Gamma_t} \quad (43)$$

$$\boxed{u_t - u_t^p = 0 \quad \text{en } \Gamma_{u_t}} \quad (44)$$

$$\boxed{u_n - \tau_{d_i} n_i \hat{r}_{m_i} - u_n^p = 0 \quad \text{en } \Gamma_{u_n}} \quad (45)$$

donde r_{m_i} y \hat{r}_{m_i} se definen por las ecs.(28) y (39), respectivamente.

5.2 Formulación de elementos finitos

Introduzcamos ahora una interpolación de elementos finitos estandar para las velocidades y la presión, definida por

$$u_i \simeq \bar{u}_i = \sum_{j=1}^n N_j^u (\bar{u}_i)_j \quad (46)$$

$$p \simeq \bar{p} = \sum_{j=1}^n N_j^p \bar{p}_j \quad (47)$$

donde N_i^u y N_i^p son, respectivamente, las funciones de forma que interpolan las velocidades y la presión dentro de cada elemento y $(\bar{\cdot})_j$ indica valores nodales [2]. Los “residuos” de la solución discreta se definen por

$$\bar{r}_{m_i} = r_{m_i}(\bar{u}_i, \bar{p}) \quad (48a)$$

$$\hat{\bar{r}}_{m_i} = \hat{r}_{m_i}(\bar{u}_i, \bar{p}) \quad (48b)$$

$$\bar{r}_d = r_d(\bar{u}_i) \quad (48c)$$

Aplicando el método de residuos ponderados a la forma discretizada de las ecuaciones de gobierno estabilizadas (41–45) se obtiene

Cantidad de movimiento

$$\int_{\Omega} v_k \left[\bar{r}_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_j} \frac{\partial \bar{r}_{m_i}}{\partial x_j} \right] d\Omega + \int_{\Gamma_t} \hat{v}_k \left[n_j \bar{\sigma}_{ij} - t_i + \frac{1}{2} h_{m_j} n_j \bar{r}_{m_i} \right] d\Gamma = 0 \quad (49)$$

Conservación de masa

$$\int_{\Omega} q \left[\bar{r}_d - \tau_{d_i} \frac{\partial \hat{\bar{r}}_{m_i}}{\partial x_i} \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{u_n}} \hat{q} [\bar{u}_n - \tau_{d_i} n_i \hat{\bar{r}}_{m_i} - u_n^p] d\Gamma = 0 \quad (50)$$

En lo anterior, v_k , \hat{v}_k , q y \hat{q} son funciones de peso apropiadas y $(\bar{\cdot})$ denotan valores aproximados. Adviértase que en las ecuaciones anteriores se ha supuesto que se cumplen exactamente las condiciones de contorno sobre los desplazamientos tangenciales (ec.(44)). Por otra parte, la condición en los desplazamientos normales al contorno (ec.(45)) se impone de forma débil a través de la segunda integral de la ec.(50).

Las integrales en las ecs.(44) y (50) incluyen derivadas de los residuos discretos. Estos residuos son usualmente discontinuos a lo largo de las caras de los elementos y, por tanto, las derivadas de los residuos no están definidas en dichas caras. Esta dificultad puede sortearse calculando dichas derivadas en un sentido distribucional. Así, si las funciones de peso y los parámetros de estabilización se suponen continuos se cumple [25]

$$\int_{\Omega} v_k h_{m_j} \frac{\partial \bar{r}_{m_i}}{\partial x_j} d\Omega = - \sum_e \int_{\Omega^e} \frac{\partial (h_{m_j} v_k)}{\partial x_j} \bar{r}_{m_i} d\Omega + \int_{\Gamma} v_k h_{m_j} \bar{r}_{m_i} n_j d\Gamma \quad (51)$$

$$\int_{\Omega} q \tau_{d_i} \frac{\partial \hat{r}_{m_i}}{\partial x_i} d\Omega = - \sum_e \int_{\Omega^e} \frac{\partial (\tau_{d_i} q)}{\partial x_i} \hat{r}_{m_i} d\Omega + \int_{\Gamma} q \tau_{d_i} \hat{r}_{m_i} n_i d\Gamma \quad (52)$$

En las expresiones anteriores, las sumas se extienden sobre los dominios interiores de cada elemento de área Ω^e .

Sustituyendo las ecs.(51) y (52) en (49) y (50), respectivamente y escogiendo $\hat{v}_k = v_k$ con $v_k = 0$ sobre Γ_u y $\hat{q} = -q$ con $q = 0$ sobre Γ_t conduce a

$$\int_{\Omega} v_k \bar{r}_{m_i} d\Omega + \int_{\Gamma_t} v_k [n_j \bar{\sigma}_{ij} - t_i] d\Gamma + \sum_e \int_{\Omega^e} \frac{1}{2} \frac{\partial (h_{m_j} v_k)}{\partial x_j} \bar{r}_{m_i} d\Omega = 0 \quad (53)$$

$$\int_{\Omega} q \bar{r}_d d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \frac{\partial (\tau_{d_i} q)}{\partial x_i} \hat{r}_{m_i} d\Omega - \int_{\Gamma_{u_n}} q (\bar{u}_n - u_n^p) d\Gamma = 0 \quad (54)$$

Adviértase que el contorno Γ_{u_t} no aparece en la ec.(54) ya que el contorno de Dirichlet para el ecuación de masa coincide con Γ_{u_n} . Por otro lado, la última integral en la ec.(54) impone de forma débil la igualdad entre la velocidad normal al contorno y su valor prescrito. Esto es consistente con las ecuaciones estabilizadas originales (35) o (45) obtenidas por balance de masa sobre el contorno Γ_{u_n} [25].

Las integrales del primer término de la ec.(53) que incluyen las derivadas de la presión y las tensiones viscosas se evalúan también en un sentido distribucional. Esto permite utilizar aproximaciones discontinuas entre elementos para la presión y las tensiones. Dichas integrales se calculan como sigue

$$\int_{\Omega} v_k \left[\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \right] d\Omega = - \sum_e \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \bar{p} - \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \bar{\tau}_{ij} \right] d\Omega + \int_{\Gamma} v_k (\bar{p} - \bar{\tau}_{ij}) n_j d\Gamma \quad (55)$$

Sustituyendo la ec.(55) en (53), advirtiendo que $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p\delta_{ij}$ e imponiendo $v_k = 0$ sobre Γ_u conduce, tras simplificar, a la siguiente forma integral estabilizada de las ecuaciones de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v_k \left(\rho \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \left(-\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \bar{p} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \bar{\tau}_{ij} \right) d\Omega \\ & + \sum_e \int_{\Omega^e} \frac{1}{2} \frac{\partial (h_{m_j} v_k)}{\partial x_j} \bar{r}_{m_i} d\Omega - \int_{\Omega} v_k b_i d\Omega - \int_{\Gamma_i} v_k t_i d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (56a)$$

Integrando por partes la primera integral de la ecuación (54) se obtiene una forma más conveniente de la ecuación de balance de masa por

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_i} \bar{u}_i d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial (\tau_{d_i} q)}{\partial x_i} \right] \hat{r}_{m_i} d\Omega + \int_{\Gamma_{un}} q u_n^p d\Gamma = 0 \quad (56b)$$

Adviértase que la última integral de la ec.(56b) se anula sobre los contornos rígidos y las superficies libres estacionarias.

Las ecs.(56) incluyen todos los términos que emanan de las ecuaciones diferenciales estabilizadas originales. Es interesante advertir que todas las integrales de contorno en las que intervienen los términos de estabilización han desaparecido. Esto es una consecuencia directa de la utilización de una forma consistente de las ecuaciones diferenciales estabilizadas de balance de momento y de masa y las condiciones de contorno.

Las ecs.(56) pueden simplificarse despreciando el cambio en los parámetros de estabilización h_{m_i} y τ_{d_i} dentro de cada elemento. Esta aproximación, utilizada frecuentemente en métodos de elementos finitos estabilizados [1-10], conduce a las expresiones siguientes

Cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v_k \left(\rho \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \sum_e \int_{\Omega^e} \left(-\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \bar{p} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \bar{\tau}_{ij} \right) d\Omega \\ & + \sum_e \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \rho \frac{\bar{u}_i h_{m_j}}{2} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial x_r} \right] d\Omega \\ & + \sum_e \int_{\Omega^e} \frac{h_{m_j}}{2} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \left[\rho \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_r} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\tau}_{ir}}{\partial x_r} - b_i \right] d\Omega - \int_{\Omega} v_k b_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} v_k t_i d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (57a)$$

Conservación de masa

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_i} \bar{u}_i d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_{d_i} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_{d_i} \frac{\partial q}{\partial x_i} g_i d\Omega + \int_{\Gamma_{un}} q u_n^p d\Gamma = 0 \quad (57b)$$

donde

$$g_i = \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - b_i \quad (58)$$

Las ecs.(56) o (57) conducen al sistema de ecuaciones discretizadas estabilizadas del MEF a partir de las cuales pueden obtenerse las variables de velocidad y presión. Naturalmente, para $v_k = N_k^u$ y $q = N_j^p$ se recupera la forma variacional de Galerkin discreta estabilizada.

Las ecs.(56) y (57) incorporan términos que aparecen tradicionalmente en las formulaciones del MEF estabilizadas. Así, si \mathbf{h}_m se supone alineado con la velocidad, es decir si $h_{mj} = 2\tau_m u_j$, donde τ_m es un parámetro de tiempo intrínseco, la cuarta integral en la ec.(57a) es idéntica a la que aparece en las formulaciones SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin) [5] y CG (Characteristic Galerkin) [8] utilizadas usualmente para remediar las inestabilidades numéricas debidas a los términos convectivos. La expresión de la ec.(57a) es más general y permite definir el vector \mathbf{h}_m de forma más apropiada para tener en cuenta los efectos de estabilización en direcciones del flujo y normal a él. Por otro lado, utilizando la forma más general de las ecs.(56) puede considerarse una distribución no uniforme (continua) del parámetro de estabilización \mathbf{h}_m de manera consistente.

La tercera integral en la ec.(57a) tiene una forma muy similar a la que se encuentra en el método GLS (Galerkin Least Squares) [6].

Adviértase también que se ha mantenido dentro de la primera integral de la ecuación de cantidad de movimiento (57a) el término de divergencia de la velocidad. Este término suele despreciarse en los métodos SUPG y GLS standard. La presencia de este término en nuestro caso asegura la coherencia del desarrollo. La importancia relativa de ese término debe comprobarse en pruebas numéricas.

La segunda y tercera integral en la ec.(57b) son típicas de la formulación GLS [6]. Adviértase que la segunda integral de (57b) proporciona un Laplaciano de presión del tipo

$$\int_{\Omega^e} \tau_{d_i} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} d\Omega$$

Este término tiene la conocida propiedad de introducir la estabilización necesaria en la ecuación de incompresibilidad asegurando una solución correcta en el límite incompresible, y permitiendo, al mismo tiempo, la utilización de aproximaciones de igual orden para la velocidad y la presión.

En resumen, las ecuaciones diferenciales estabilizadas en forma “finitesimal” para un fluido viscoso incompresible son la base para obtener, mediante el método de elementos finitos de Galerkin usual, un sistema discreto de ecuaciones que incorpora las propiedades de los mejores métodos de estabilización, para simultáneamente corregir

las oscilaciones inducidas por los efectos de convección y las debidas a aproximaciones incompatibles para las velocidades y la presión.

6 EL CASO DE FLUJO TRANSITORIO

La formulación estabilizada presentada en el apartado anterior se extiende de manera natural al caso de flujo transitorio. La forma estabilizada de las ecuaciones de gobierno se escribe ahora por

Cantidad de movimiento

$$\left(r_{m_i} - \frac{h_{m_j}}{2} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} \right) - \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(r_{m_i} - \frac{h_{m_j}}{2} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (59)$$

Conservación de masa

$$\left(r_d - \frac{h_{d_j}}{2} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} \right) - \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(r_d - \frac{h_{d_j}}{2} \frac{\partial r_d}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (60)$$

En lo anterior δ es un parámetro de estabilización con unidades de tiempo. El residuo r_{m_i} incluye ahora también el término transitorio. Es decir

$$r_{m_i} = \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - b_i \quad (61)$$

Las ecs.(59) y (60) se obtienen esperando el balance de momento cinético y de masa en dominios espacio-tiempo de dimensiones $[\mathbf{h}_m \times \delta]$ y $[\mathbf{h}_d \times \delta]$, respectivamente [19].

Las ecs.(59) y (60) pueden utilizarse para obtener diversos métodos numéricos estabilizados para la solución transitoria de las ecuaciones de Navier-Stokes [19,25].

6.1 Algoritmo de pasos fraccionados

Aplicaremos las ecs.(59) y (60) a la obtención de un algoritmo de pasos fraccionados. Para mayor claridad prescindiremos de los términos en los que interviene el parámetro δ en las ecs.(59) y (60). Asimismo la ecuación de balance de masa se escribirá en la forma más conveniente dada por la ec.(42).

Un esquema de avance en el tiempo para la ec.(59) se escribe como (para $\delta = 0$)

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\rho} \left[\rho \frac{\partial (u_i u_j)^n}{\partial x_j} + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} - b_i^n - \left(\frac{h_{m_j}}{2} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} \right)^n \right] \quad (62)$$

Puede observarse la analogía de la ec.(62) con la obtenida con los denominados métodos de integración a través de las líneas características [8]. Dicha analogía es completa si $\mathbf{h}_m = \tau \mathbf{u}$ donde τ es un parámetro de tiempo intrínseco (es decir si el vector

\mathbf{h}_m se toma alineado con la velocidad). La expresión más general de la ec.(62) permite tomar otras direcciones para \mathbf{h}_m puedan tener efectos beneficiosos para la estabilización de la solución numérica.

Obtendremos ahora un algoritmo de pasos fraccionados como sigue. La ec.(62) se fracciona como

$$u_i^* = u_i^n - \frac{\Delta t}{\rho} \left[\rho \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - b_i - \frac{h_{m_j}}{2} \frac{\partial r_{m_i}}{\partial x_j} \right]^n \quad (63)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad (64)$$

Adviértase que la suma de las ecs.(63) y (64) proporciona la ec.(62). Sustituyendo la ec.(64) en la (42) proporciona

$$r_d^* - \Delta t \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} - \tau_{d_i} \frac{\partial \hat{r}_{m_i}}{\partial x_i} = 0 \quad (65)$$

donde

$$r_d^* = \rho \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \quad (66)$$

Las etapas de la solución son las siguientes.

Etapas 1

Obtener explícitamente las denominadas velocidades “fraccionadas” u_i^* [8] utilizando la ec.(63).

Etapas 2

Obtener el campo de presiones resolviendo una ecuación Laplaciana para la presión, deducida de la ec.(65) como

$$\Delta t \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} + \tau_{d_i} \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = r_d^* - \tau_{d_i} \left[\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - b_i \right]^n \quad (67)$$

Claramente para $\tau_{d_i} = \tau$ la ecuación anterior se simplifica como

$$(\Delta t + \tau) \Delta p^{n+1} = \hat{r}_d^* \quad (68)$$

donde Δ es el operador Laplaciano y

$$\hat{r}_d^* = r_d^* - \tau \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - b_i \right]^n \quad (69)$$

Etapa 3

Calcular las velocidades u_i^{n+1} por la ec.(64).

La ec.(68) difiere ligeramente de la utilizada normalmente en los esquemas de paso fraccionado donde no aparece el término en τ [8]. Este término, no obstante, es esencial para preservar la estabilidad de la formulación mixta en problemas donde se necesitan incrementos de tiempo muy pequeños debido a los requisitos de estabilidad del algoritmo de integración en el tiempo.

7 CALCULO DE LOS PARAMETROS DE ESTABILIZACION PARA FLUJOS VISCOSOS INCOMPRESIBLES

Hasta la fecha no existe una metodología general para calcular los parámetros de estabilización en flujos viscosos incompresibles. Los parámetros utilizados en las formulaciones tradicionales (SUPG, GLS, etc.) [1–7] se basan en extrapolaciones del problema unidimensional de convección-difusión.

Una primera simplificación posible, usual en métodos de tipo SUPG [5], es aceptar que el vector de longitud característica \mathbf{h}_m tiene la dirección de la velocidad. Esta restricción conduce a inestabilidades cuando aparecen altos gradientes de la solución en direcciones transversales a la velocidad. Esta deficiencia suele corregirse, en la práctica, añadiendo un término de estabilización transversal [20–22].

En lo que sigue, se mantendrá la generalidad en la definición del vector \mathbf{h}_m , de manera que sus componentes introduzcan la estabilización necesaria en la dirección del flujo y en la transversal a él. No obstante, para simplificar algo el problema, supondremos que los parámetros de estabilización para las ecuaciones de masa son los mismos que para las ecuaciones de cantidad de movimiento. Es decir

$$\tau_{d_i} = \frac{h_{m_i}}{2u_i} \quad (70)$$

El problema se reduce, por tanto, a encontrar el vector de longitud característica \mathbf{h}_m .

El procedimiento que se propone es una generalización del “método de residuo decreciente” explicado para el problema de convección-difusión en un apartado anterior. Así, supongamos que se ha encontrado una solución para los campos de velocidad y presión utilizando una cierta malla. El residuo de las ecuaciones de cantidad de movimiento para esa solución particular es

$${}^1\bar{r}_{m_i} = \bar{r}_{m_i} - \frac{1}{2} h_{m_j} \frac{\partial \bar{r}_{m_i}}{\partial x_j} \quad (71)$$

El residuo “medio” sobre un elemento se define por

$${}^1\bar{r}_{m_i}^{(e)} = \frac{1}{\Omega^{(e)}} \int_{\Omega^{(e)}} {}^1\bar{r}_{m_i} d\Omega \quad (72)$$

Supongamos ahora que se ha encontrado una solución mejorada para la misma malla y la misma aproximación (es decir, sin cambiar el número de elementos o el tipo de elemento). Esta solución mejorada, puede basarse, por ejemplo, en técnicas de recuperación superconvergente de derivadas [23,24]. El residuo elemental para la solución mejorada se denomina ${}^2\bar{r}_{m_i}^{(e)}$. Como dicho residuo debe tender a cero para la solución “exacta”, debe cumplirse la condición siguiente

$${}^1\bar{r}_{m_i}^{(e)} - {}^2\bar{r}_{m_i}^{(e)} \geq 0 \quad (73)$$

La ecuación anterior se cumple para ${}^1\bar{r}_{m_i} > 0$. Claramente para ${}^1\bar{r}_{m_i}^{(e)} < 0$ la desigualdad (73) debe cambiarse a ≤ 0 .

La ec.(73) proporciona un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los componentes del vector \mathbf{h}_m . Sustituyendo la ec.(71) en (73) y aplicando la condición de identidad en (73) se obtiene

$$\mathbf{h}_m^{(e)} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \quad (74)$$

con

$$A_{ij} = 2 \left[\frac{{}^2\partial\bar{r}_{m_i}^{(e)}}{\partial x_j} - \frac{{}^1\partial\bar{r}_{m_i}^{(e)}}{\partial x_j} \right] \quad (75a)$$

$$f_i = {}^2\bar{r}_{m_i}^{(e)} - {}^1\bar{r}_{m_i}^{(e)} \quad (75b)$$

Puede proponerse ahora el siguiente esquema iterativo para obtener una solución estabilizada.

- 1) Obtener los valores numéricos de las velocidades y la presión para un valor inicial $\mathbf{h}_m^{(e)} = \mathbf{h}_0^{(e)}$. Calcular ${}^1\bar{r}_{m_i}^{(e)}$.
- 2) Evaluar el campo de velocidades y presiones mejoradas. Calcular ${}^2\bar{r}_{m_i}^{(e)}$.
- 3) Calcular el nuevo valor de $\mathbf{h}_m^{(e)}$ por la ec.(74).
- 4) Repetir los pasos 1)–3) hasta que se obtiene una solución estabilizada (caracterizada por una norma en velocidades, presiones o valores de \mathbf{h}_m).

La estrategia anterior puede incorporarse dentro de un esquema de integración en el tiempo donde el valor de $\mathbf{h}_m^{(e)}$ se actualiza cada vez que se obtienen nuevos valores de las velocidades y la presión en cada incremento de tiempo.

La hipótesis $\mathbf{h}_d = \mathbf{h}_m$ puede relajarse, de manera que se obtenga un valor de \mathbf{h}_d siguiendo un procedimiento similar al explicado arriba. En las referencias [16–19] pueden encontrarse más detalles del cálculo de los parámetros de estabilización en diversos problemas de convección-difusión y dinámica de fluidos.

8 CONCLUSIONES

La forma estabilizada de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la convección-difusión y el flujo incompresible, obtenidas por técnicas de *cálculo finitesimal*, demuestran ser el punto de partida para obtener soluciones numéricas estables por el MEF. Por otra parte, la aplicación del MEF con técnicas estándar de Galerkin, permite recuperar esquemas de estabilización clásicos tales como SUPG y otros, obtenidos previamente a partir de razonamientos diferentes y en algunos casos de tipo heurístico (ej. difusión artificial). En el caso concreto del flujo viscoso incompresible la formulación estabilizada resultante corrige, además, las deficiencias debido al carácter mixto de las ecuaciones y permite utilizar interpolaciones de igual orden para las velocidades y la presión.

Las nuevas ecuaciones estabilizadas son también la base para diseñar un procedimiento iterativo para calcular los parámetros de estabilización a lo largo de las líneas de corriente y en dirección transversal. Este procedimiento puede interpretarse como una nueva clase de métodos adaptables, en el que la solución mejora progresivamente a partir del cálculo sucesivo de los parámetros de estabilización críticos, manteniendo la malla y la aproximación de elementos finitos inalteradas [17–19].

REFERENCIAS

1. C. Hirsch, “*Numerical computations of internal and external flow*”, Vol. 2, John Wiley, 1990.
2. O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, “*The finite element method*”, Mc.Graw Hill, Vol. I., 1989, Vol. II., 1991.
3. D.W. Kelly, S. Nakazawa, O.C. Zienkiewicz and J.C. Heinrich, “A note on upwind and anisotropic balancing dissipation in finite element approximation to convective diffusion problems”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **15**, pp. 1705–1711, 1980.
4. J.C. Heinrich, P.S. Hayakorn and O.C. Zienkiewicz, “An upwind finite element scheme for two dimensional convective transport equations”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **11**, 131–143, 1977.
5. A. Brooks and T.J.R. Hughes, “Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **32**, 199–259, 1982.
6. T.J.R. Hughes, L.P. Franca and G.M. Hulbert, “A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **73**, pp. 173–189, 1989.

7. J. Donea, "A Taylor-Galerkin method for convective transport problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **20**, pp. 101–119, 1984.
8. O.C. Zienkiewicz and R. Codina, "A general algorithm for compressible and incompressible flow. Part I: The split characteristic based scheme", *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, **20**, 869–85, 1995.
9. T.J.R. Hughes, "Multiscale phenomena: Greens functions, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized meth.", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, Vol. **127**, 387–401, 1995.
10. R. Codina, "Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation", Publication CIMNE, No. 101, Barcelona, 1996.
11. R. Codina, "A stabilized finite element method for generalized stationary incompressible flows", Publication PI-148, CIMNE, Barcelona, February 1999.
12. S. Idelsohn, "Upwind techniques via variational principles", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **28**, N. 4, 669–784, 1989.
13. F. Brezzi, M.O. Bristeau, L.P. Franca, M. Mallet and G. Rogé, "A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **96**, pp. 117–129, 1992.
14. F. Brezzi, D. Marini and A. Russo, "Pseudo residual-free bubbles and stabilized methods", *Computational Methods in Applied Sciences '96*, J. Periaux et. al. (Eds.), J. Wiley, 1996.
15. F. Brezzi, L.P. Franca, T.J.R. Hughes and A. Russo, " $b = \int g$ ", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **145**, pp. 329–339, 1997ss.
16. E. Oñate, "Derivation of stabilized equations for advective-diffusive transport and fluid flow problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, **151**, 1–2, 233–67, 1998.
17. E. Oñate, J. García and S. Idelsohn, "Computation of the stabilization parameter for the finite element solution of advective-diffusive problems", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. **25**, pp. 1385–1407, 1997.
18. E. Oñate, J. García and S. Idelsohn, "An alpha-adaptive approach for stabilized finite element solution of advective-diffusive problems with sharp gradients", *New Adv. in Adaptive Comp. Met. in Mech.*, P. Ladeveze and J.T. Oden (Eds.), Elsevier, 1998.
19. E. Oñate and M. Manzan, "A general procedure for deriving stabilized space-time finite element methods for advective-diffusive problems", Publication PI-133, CIMNE, Barcelona, July 1998.
20. T.J.R. Hughes and M. Mallet, "A new finite element formulations for computational fluid dynamics: IV. A discontinuity capturing operator for multidimensional advective-diffusive system", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **58**, 329–336, 1986.
21. A.C. Galeão and E.G. Dutra do Carmo, "A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection dominated problems", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **68**, 83–95, 1988.
22. R. Codina, "A discontinuity-capturing crosswind dissipation for the finite element solution of the convection-diffusion equation", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*,

- 110, 325–342, 1993.
23. O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu, “The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **101**, 207–224, 1992.
 24. N.-E. Wiberg, F. Abdulwahab and X.D. Li, “Error estimation and adaptive procedures based on superconvergent patch recovery (SPR)”, *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. **4** (3), 203–242, (1997).
 25. E. Oñate, “A stabilized finite element method for viscous incompressible flows using a finite increment calculus formulation”, Publicación PI 152, CIMNE, Barcelona 1999.

ESTABILIZACION DE LA SOLUCION NUMERICA DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE CONVECTIVO MEDIANTE TECNICAS DE CALCULO FINITESIMAL

E. OÑATE¹, J. GARCIA¹ y S. IDELSOHN²

¹ Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Cataluña, 08034 Barcelona

² Profesor de la Univ. Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina. Profesor Visitante, CIMNE

Resumen

El trabajo muestra que los términos de estabilización para la solución numérica de problemas de flujo convectivo pueden obtenerse de manera natural utilizando aproximaciones de mayor orden en las ecuaciones de balance en un dominio finito. Ello permite reinterpretar muchos algoritmos utilizados cotidianamente y proporciona también una expresión para calcular los parámetros de estabilización.

Introducción

Es bien conocido que los métodos de elementos finitos basados en técnicas de Galerkin aplicados a la ecuación de convección-difusión conducen invariablemente a soluciones oscilatorias para valores moderados y altos de la convección [1,2,3]. Los métodos tradicionales para obtener soluciones correctas (estables) se basan en la adición directa de términos de difusión artificial en las ecuaciones originales [1-4]. Recientemente se han propuesto métodos más rigurosos como SUPG [5], GLS [6], Taylor-Galerkin [7], Characteristic Approximation [1,8] y Subgrid Multiscale [9] para obtener soluciones de elementos finitos estables para problemas de transporte convectivo. En la referencia [10] se comparan algunos de estos métodos. Todos ellos introducen (al menos) un parámetro (conocido como parámetro de estabilización, longitud característica, tiempo intrínseco, etc.) que controla la "estabilidad" de la solución numérica.

El cálculo exacto del en adelante denominado parámetro de estabilización, puede hacerse solo para problemas unidimensionales (1D) sencillos [1,2]. Las expresiones 1D se han extendido al caso multidimensional de manera heurística por diferentes autores a lo largo de casi dos décadas para problemas de transporte convectivo y dinámica de fluidos.

Unos de los primeros intentos de evaluar los parámetros de estabilización en problemas 2D se debe a Idelsohn utilizando un principio pseudo-variacional [11]. Hughes [9] y más tarde Brezzi *et al.* [12-14] han propuesto una expresión para dichos parámetros basada en una aproximación de la función de Green sobre el elemento, utilizando funciones de forma tipo "burbuja". Pese a dichos intentos no se conoce una metodología suficientemente general que permita evaluar fácilmente los parámetros de estabilización en problemas de interés práctico.

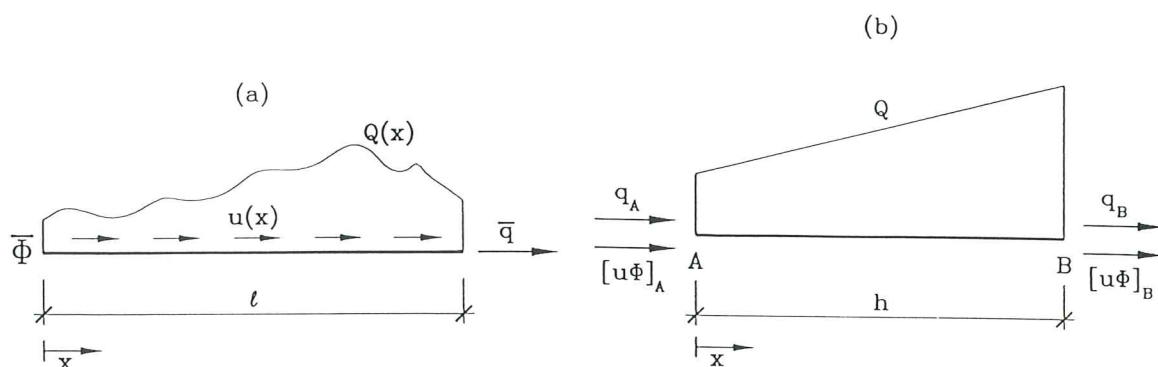


Figura 1. (a) Problema unidimensional de convección-difusión. (b) Dominio de balance finito AB .

En este trabajo se propone un método conceptualmente diferente para obtener soluciones numéricas estables. El método se basa en la introducción de los términos de estabilización en las ecuaciones diferenciales originales del problema utilizando el concepto de balance sobre un dominio de dimensión finita. Las nuevas ecuaciones estabilizadas mediante esta denominada técnica de “cálculo finitesimal” son la base para evaluar los parámetros de estabilización mediante un proceso iterativo que puede interpretarse como una nueva clase de métodos adaptables.

El contenido del trabajo se ordena como sigue. En el apartado siguiente se resumen las ideas esenciales para obtener las nuevas ecuaciones diferenciales estabilizadas en problemas 1D y 2D. Tras ello se describe brevemente la fase de discretización por el método de elementos finitos (MEF), resaltándose la analogía con métodos de estabilización tradicionales. Finalmente se describe la metodología para calcular los parámetros de estabilización y se presenta un ejemplo de aplicación.

Forma estabilizada de las ecuaciones de convección-difusión

Problema unidimensional

Consideremos por simplicidad el problema de convección-difusión sobre un dominio unidimensional de longitud l (Figura 1a). La Figura 1b muestra un segmento típico AB de longitud $\overline{AB} = h$ donde se debe satisfacer el balance de flujos. Los valores de la tasa de flujo difusivo q y de flujo convectivo $u\phi$ en el punto A de coordenada $x_A = x_B - h$ pueden aproximarse en función de valores en el punto B , utilizando los siguientes desarrollos de alto orden [15,16]

$$[u\phi](x_B - h) = [u\phi](x_B) - h \frac{d[u\phi]}{dx} \Big|_B + \frac{h^2}{2} \frac{d^2[u\phi]}{dx^2} \Big|_B - O(h^3) \quad (1)$$

$$q(x - h) = q(x) - h \frac{dq}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2q}{dx^2} + O(h^3) \quad (2)$$

$$Q(x - h) = Q(x) - h \frac{dQ}{dx} + O(h^2) \quad (3)$$

El balance de flujos entre los dos puntos A y B se escribe como

$$\sum \text{Flujos} = [\text{Flujo en A}] - [\text{Flujo en B}] + \int_0^h Q dx = 0 \quad (4)$$

Sustituyendo las ecs. (1)–(3) en (4) y haciendo uso de la ley de Fourier $q = -k \frac{d\phi}{dx}$ se obtiene finalmente, tras simplificar,

$$\boxed{r - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx} = 0} \quad , \quad 0 < x < l \quad (5)$$

donde

$$r = -\nu \frac{d(u\phi)}{dx} + \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + Q \quad (6)$$

Adviértase que para $h \rightarrow 0$ (es decir cuando el dominio de balance es infinitesimal) se recupera la forma estándar de la ecuación diferencial de balance.

En (6) ϕ es la variable que se transporta, u es la velocidad, ν y k son parámetros del material y Q es una fuente distribuida.

La condición de contorno de Dirichlet es la usual

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad (7)$$

donde $\bar{\phi}$ es el valor prescrito.

Por coherencia la condición de contorno de Neumann debe escribirse en forma estabilizada. Esto puede hacerse sencillamente considerando el balance en un segmento AB próximo a un contorno. Por conveniencia, se toma la longitud de dicho segmento $\overline{AB} = h/2$ [15,16] (Figura 2).

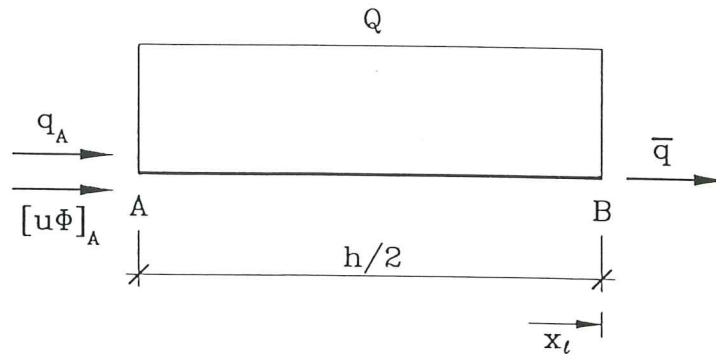


Figura 2. Dominio de balance en la proximidad de un punto del contorno de Neumann B .

Aproximando los flujos advectivos y difusivos en A en función de desarrollos de segundo orden, la ecuación de balance en el contorno se escribe como [15,16]

$$\boxed{-\nu u\phi + k \frac{d\phi}{dx} + \bar{q} - \frac{h}{2} r = 0} \quad \text{en } x = l \quad (8)$$

Las condiciones de contorno se escriben como

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \quad \text{en } \Gamma_\phi \quad (11)$$

donde Γ_ϕ es el contorno de Dirichlet donde se prescribe la variable y

$$\boxed{-\nu \mathbf{n}^T \mathbf{u} \phi + \mathbf{n}^T \mathbf{D} \nabla \phi + \bar{q}_n - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{n} r = 0} \quad \text{en } \Gamma_q \quad (12)$$

donde \bar{q}_n es el flujo total prescrito en el contorno de Neumann Γ_q y $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T$ es el vector normal. La ec.(12) se ha obtenido por balance de flujos en el dominio de la Figura 3b utilizando la misma técnica que para el caso 1D explicado anteriormente [16].

Discretización en elementos finitos

Construyamos una discretización de elementos finitos estándar. La aproximación de ϕ dentro de cada elemento e de n nodos se escribe como [2]

$$\phi \simeq \hat{\phi} = \sum_{i=1}^n N_i \phi_i \quad (13)$$

donde N_i son las funciones de forma y ϕ_i son los valores nodales de la función aproximada $\hat{\phi}$. Sustituyendo la ec.(13) en las ecuaciones diferenciales estabilizadas se obtiene (por ejemplo para el problema 2D) [15,16]

$$\hat{r} - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \nabla \hat{r} = r_\Omega \quad \text{en } \Omega \quad (14a)$$

$$\hat{\phi} - \bar{\phi} = r_\phi \quad \text{en } \Gamma_\phi \quad (14b)$$

$$-\nu \mathbf{n}^T \mathbf{u} \hat{\phi} + \mathbf{n}^T \mathbf{D} \nabla \hat{\phi} + \bar{q}_n - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{n} \hat{r} = r_q \quad \text{en } \Gamma_q \quad (14c)$$

donde r_Ω , r_ϕ y r_q son los residuos de la solución numérica sobre el dominio Ω y los contornos Γ_ϕ y Γ_q , respectivamente.

Aplicando el método de Galerkin estándar a las ecs.(14) y siguiendo el método usual, se puede escribir la forma débil resultante como [15,16]

$$\int \int_{\Omega} (N_i + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \nabla N_i) \hat{r} d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_i (-\nu \mathbf{n}^T \mathbf{u} \hat{\phi} + \mathbf{n}^T \mathbf{D} \nabla \hat{\phi} + \bar{q}_n) d\Gamma = 0 \quad (15)$$

Adviértase que, aceptando que el vector longitud característica \mathbf{h} tiene la dirección de la velocidad (i.e. $\mathbf{h} = \frac{h}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u}$) se recupera exactamente la forma del conocido método SUPG [15,16]. Es importante destacar que a partir de la nueva forma estabilizada de las ecuaciones diferenciales del problema pueden recuperarse también las expresiones discretizadas de otros métodos clásicos como Characteristic-Galerkin, Taylor-Galerkin, GLS, etc [15,16]. Puede por tanto afirmarse, que dichas ecuaciones diferenciales son la *forma intrínseca* de la solución estable del problema.

El punto esencial que resta es el cálculo de los parámetros de estabilización, tema que se aborda en el apartado siguiente.



Cálculo de los parámetros de estabilización

Definamos el residuo medio sobre un elemento de una cierta solución numérica como

$$r^{(e)} = \frac{1}{\Omega^{(e)}} \int_{\Omega^{(e)}} r_{\Omega} d\Omega \quad (16)$$

donde r_{Ω} viene definido por la ec.(14a). Sustituyendo ésta en (16) se obtiene

$$r^{(e)} = r^{(e)} - \frac{1}{2} [\mathbf{h}^{(e)}]^T (\nabla \hat{r})^{(e)} \quad (17)$$

En (17) se ha tomado por simplicidad $\mathbf{h} = \mathbf{h}^{(e)}$ constante sobre el elemento.

El vector de longitud característica puede expresarse según sus componentes en dirección del vector velocidad $\mathbf{u} = [u, v]^T$ y el vector velocidad normal $\mathbf{u}_n = [-v, u]^T$ como

$$\mathbf{h}^{(e)} = \frac{1}{|\mathbf{u}|} [h_s \mathbf{u} + h_n \mathbf{u}_n]^{(e)} = \frac{l^{(e)}}{|\mathbf{u}|} [\alpha_s \mathbf{u} + \alpha_n \mathbf{u}_n]^{(e)} \quad (18)$$

donde h_s y h_n son longitudes características a lo largo de las líneas de corriente y en dirección transversal, respectivamente. Dichas longitudes se pueden expresar como proporción de una longitud típica del elemento, i.e. $h_s = \alpha_s l^{(e)}$ y $h_n = \alpha_n l^{(e)}$. Adviértase que aceptar h_n (o α_n) = 0 es equivalente a considerar \mathbf{h} alineado con la velocidad, como ocurre en el método SUPG [2,5]. El término que incluye h_n permite capturar altos gradientes y discontinuidades no necesariamente ortogonales a la dirección de la velocidad [19].

Consideremos que una vez obtenida la solución por elementos finitos, se recupera una solución mejorada utilizando, por ejemplo, técnicas de recuperación superconvergente de derivadas [20]. Si $r_1^{(e)}$ y $r_2^{(e)}$ son los residuos elementales de la solución original y mejorada, respectivamente debe cumplirse que (para $r_1^{(e)} > 0$)

$$r_1^{(e)} - r_2^{(e)} \geq 0 \quad (19)$$

Sustituyendo la ec.(18) en (17) y ésta en (19) se obtiene

$$[\alpha_s \mathbf{u}^T + \alpha_n \mathbf{u}_n^T]^{(e)} (\nabla \hat{r}_2^{(e)} - \nabla \hat{r}_1^{(e)}) \geq \frac{2|\mathbf{u}|}{l^{(e)}} (\hat{r}_2^{(e)} - \hat{r}_1^{(e)}) \quad (20)$$

La ec.(20) permite obtener $\alpha_s^{(e)}$ y $\alpha_n^{(e)}$ mediante el siguiente esquema iterativo.

- 1) Resolver el problema definido por las nuevas ecuaciones estabilizadas, utilizando valores arbitrarios iniciales de los parámetros de estabilización $\alpha_s^{(e)} = \alpha_s^{(e)}$, $\alpha_n^{(e)} = \alpha_n^{(e)}$.
- 2) Recuperar un campo de derivadas mejorado. Calcular $\hat{r}^{(1)}$, $\hat{r}^{(2)}$, $\nabla \hat{r}_1^{(e)}$ y $\nabla \hat{r}_2^{(e)}$.
- 3) Calcular un valor mejorado del parámetro de estabilización a lo largo de las líneas de corriente $\alpha_s^{(e)}$ por

$${}^1\alpha_s^{(e)} = \frac{2|\mathbf{u}|}{l^{(e)} \mathbf{u}^T (\nabla \hat{r}_2^{(e)} - \nabla \hat{r}_1^{(e)})} [\hat{r}_2^{(e)} - \hat{r}_1^{(e)} - \alpha_n^{(e)} \mathbf{u}_n^T (\nabla \hat{r}_2^{(e)} - \nabla \hat{r}_1^{(e)})] \quad (21)$$

- 4) Repetir las etapas 1-3 hasta que converja el valor de $\alpha_s^{(e)}$, manteniendo constante $\alpha_n^{(e)}$.
- 5) Repetir las etapas 1-4 para calcular $\alpha_n^{(e)}$, utilizando la expresión análoga a (21), manteniendo $\alpha_s^{(e)}$ constante e igual al valor previamente calculado.
- 6) Repetir el proceso para encontrar valores mejorados de $\alpha_s^{(e)}$ y $\alpha_n^{(e)}$.

Adviértase que para $\alpha_n = 0$ el esquema anterior proporciona el valor del parámetro de estabilización crítico del método SUPG. En las referencias [15,16] se demuestra que en el problema de convección-difusión 1D sin término de fuente, resuelto con elementos lineales, se encuentra el conocido valor crítico $\alpha^{(e)} = 1 - \frac{1}{\gamma^{(e)}}$ donde $\gamma^{(e)} = \frac{ul^{(e)}}{2k}$ es el número de Peclet de un elemento de longitud $l^{(e)}$.

Ejemplo

Se considera la solución del problema de convección-difusión en un dominio cuadrado de lado unidad, $k_x = k_y = 10^{-6}$, $Q(x, y) = 0$, $\mathbf{u} = [\cos \theta, -\text{sen} \theta]^T$, $\tan \theta = 2$ y las siguientes condiciones de contorno

$$\bar{\phi}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{\phi_1} \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \Gamma_{\phi_2} \end{cases}$$

con $\Gamma_{\phi_1} = \{-1/2\} \times [1/4, 1/2] \cup [-1/2, 1/2] \times \{1/2\}$, $\Gamma_{\phi_2} = \Gamma_{\phi} - \Gamma_{\phi_1}$ y $\Gamma_q = 0$.

En la Figura 4.a se muestra la malla no estructurada de 902 triángulos lineales utilizados para el cálculo. Se ha tomado para $l^{(e)}$ la longitud del lado mayor de cada elemento. El problema se ha resuelto con los valores iniciales $o_{\alpha_s^{(e)}} = o_{\alpha_n^{(e)}} = 0$.

En la Figura 4b se muestra la distribución oscilatoria de ϕ para la primera iteración, como era de esperar. La solución final después de 7 iteraciones se muestra en la Figura 4c. Adviértase que se capturan con mínimas oscilaciones las capas límites en el interior y en las proximidades de los contornos. Dichas oscilaciones son más ostensibles cerca del contorno derecho si se mantiene $\alpha_n = 0$ en todo el proceso (método SUPG) [18], como se muestra en la Figura 4d.

Conclusiones

La forma estabilizada de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la convección-difusión, obtenidas por técnicas de cálculo finitesimal, parecen ser el punto de partida para obtener soluciones numéricas estables. En el contexto del método de los elementos finitos, la aplicación de técnicas estándar de Galerkin permite recuperar esquemas de estabilización clásicos tales como SUPG y otros, obtenidos previamente a partir de razonamientos diferentes y en algunos casos de tipo heurístico (ej. difusión artificial). Las nuevas ecuaciones estabilizadas son también la base para diseñar un procedimiento iterativo para calcular los parámetros de estabilización a lo largo de las líneas de corriente y en dirección transversal. Este procedimiento puede interpretarse como una nueva clase de métodos adaptables, en el que la solución mejora progresivamente a partir del cálculo sucesivo de los parámetros de estabilización críticos, manteniendo la malla y la aproximación de elementos finitos inalteradas [17,18].

B

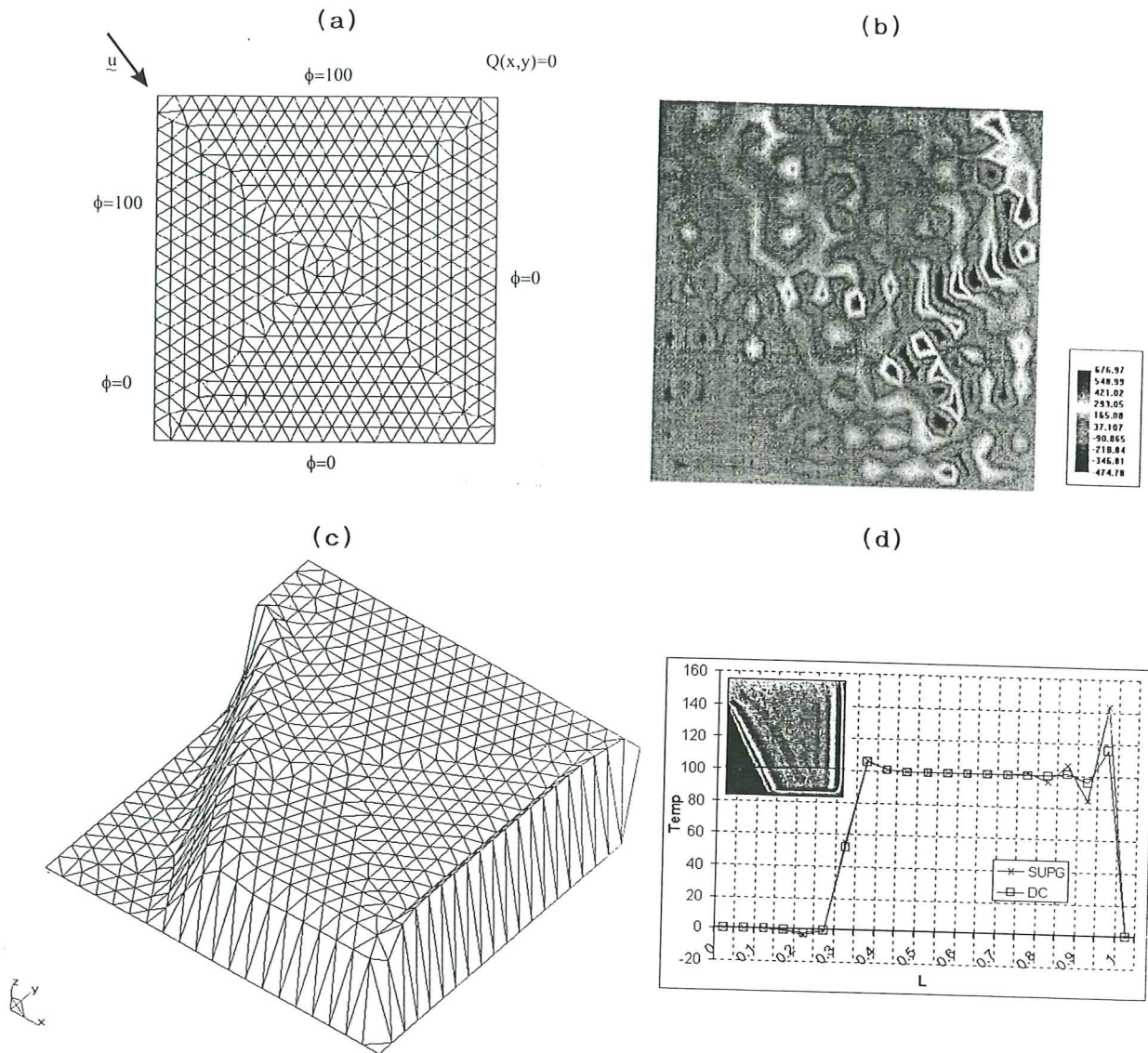


Figura 4. Problema de convección-difusión con altos gradientes. (a) Malla de elementos finitos y condiciones de contorno. (b) Solución oscilatoria inicial ($\alpha_s = \alpha_n = 0$). (c) Solución final después de 7 iteraciones. (d) Comparación con la solución obtenida a lo largo de un corte horizontal con $\alpha_n = 0$ (método SUPG) y $\alpha_n \neq 0$ (método de captura de discontinuidades DC).

Referencias

1. C. Hirsch, "Numerical computations of internal and external flow", Vol. 2, John Wiley, 1990.
2. O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, "The finite element method", Mc.Graw Hill, Vol. I., 1989, Vol. II., 1991.
3. D.W. Kelly, S. Nakazawa, O.C. Zienkiewicz and J.C. Heinrich, "A note on upwind and anisotropic balancing dissipation in finite element approximation to convective diffusion problems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **15**, pp. 1705-1711, 1980.
4. J.C. Heinrich, P.S. Hayakorn and O.C. Zienkiewicz, "An upwind finite element scheme for two dimensional convective transport equations", *Int. J. Num. Meth.*