

# Posibilidades de los Métodos Numéricos en Obras Subterráneas

E. Oñate  
B. Suárez  
J. Miquel

# **Posibilidades de los Métodos Numéricos en Obras Subterráneas**

E. Oñate  
B. Suárez  
J. Miquel

**Publicación CIMNE N°-301, Febrero 2007**

# POSIBILIDADES DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS EN OBRAS SUBTERRÁNEAS

Eugenio Oñate<sup>1,2</sup>, Benjamín Suárez<sup>2</sup> y Juan Miquel<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)*

<sup>2</sup>*Dpto de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería (RMEI)*

*E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Cataluña (UPC)*

*onate@cimne.upc.edu*

En memoria de José Antonio Garrido

## Resumen

Se presenta un resumen de las posibilidades de diversos métodos numéricos basados en la combinación de técnicas de elementos finitos y de partículas para la simulación de problemas típicos de obras subterráneas, tales como la excavación de túneles y la inundación de cavidades.

## 1. Introducción

Las obras subterráneas han alcanzado una gran relevancia técnica y social en los últimos años, entre otros motivos porque son un instrumento esencial para mejorar la calidad de vida de los ciudadanos. El uso de la obra subterránea se está extendiendo en las sociedades desarrolladas hasta el punto que ya no pueden interpretarse sólo bajo la perspectiva de construcción de túneles, metros, pasos inferiores, etc. sino en un sentido más amplio, como un camino para dar respuestas al reto que tiene la sociedad postindustrial para conseguir un territorio y unas ciudades mas confortables, sostenibles y puestas al día con espacios de calidad para las personas, eliminando la mayor parte de las molestias del tráfico y promoviendo los transportes colectivos y sociales.

Desde una perspectiva social, en toda obra subterránea debe tenerse en cuenta la sostenibilidad del entorno, la seguridad de las personas y de los bienes durante las fases de construcción y de uso, así como su capacidad para liberar espacios en la superficie y para transformar el entorno urbano, generando zonas agradables para vivir.

Hoy en día cualquier planificación estratégica urbana o de desarrollo territorial debe contemplar la posibilidad de unos entornos subterráneos sostenibles y multi-funcionales. Ello naturalmente exige dar respuestas a

muchos de los retos que las técnicas constructivas asociadas demandan. Todas estas cuestiones están siendo bien comprendidas por los organismos promotores de la investigación y de la innovación en Europa y en España que ya financian proyectos de largo alcance en este campo (ej., el Proyecto PROFIT Estratégico Singular La Ciudad Multidimensional financiado por el MEC [1] y el Proyecto Integrado Tunconstruct financiado por la CE [2]).



Figura 1: La Ciudad Multidimensional [1].

## 2. Algunos de los retos tecnológicos que plantean las obras subterráneas

Muchos son los retos tecnológicos y socio-económicos a la hora de construir nuevos espacios subterráneos adecuados para situar las infraestructuras y servicios con la seguridad requerida y de forma sostenible, especialmente cuando se pretende que: a) se ubiquen en cualquier sitio, terreno, circunstancia y con cualquier dimensión y tamaño; b) consuman los mínimos recursos energéticos, se ejecuten en el menor plazo posible y con un coste comparable al de la construcción superficial; c) utilicen nuevos materiales para los revestimientos y demás estructuras; d) exploten de forma segura y controlada a lo largo de su vida útil, y e) incorporen procesos industriales automatizados y robotizados.

Está surgiendo, pues, un nuevo concepto de obra subterránea que rompe con muchas de las condiciones y restricciones que tiene hoy día la industria especializada: transparencia del subsuelo; construcción subterránea; arquitectura y urbanismo subterráneo; la industria y la economía en el subsuelo; nuevos escenarios de seguridad y riesgo y un largo etcétera de asuntos relacionados.

En este artículo se abordan de forma sucinta algunas de las cuestiones anteriores, en relación con los nuevos métodos de cálculo para modelar procesos de excavación del subsuelo y para el estudio de problemas de interacción fluido-estructura en obras subterráneas. En concreto se describen de

forma breve la técnica de elementos finitos y partículas (PFEM) adecuada para problemas de interacción fluido-estructura y el método de elementos discretos (MED) que, combinado con el método de elementos finitos, es una técnica muy prometedora para análisis de problemas de excavación.



Figura 2: Cavidades naturales y artificiales.

### **3. Sobre la simulación numérica de las obras subterráneas**

El estudio tenso-deformacional de los medios continuos se basa usualmente en el método de elementos finitos (MEF) [3,4]. El MEF permite predecir el comportamiento resistente de sólidos y estructuras con los materiales más diversos y evaluar su seguridad a rotura bajo cargas estáticas y dinámicas. El MEF también se ha aplicado en las últimas décadas en problemas de geomecánica. En las referencias [5-8] se listan algunos de los códigos de elementos finitos especializados en ese ámbito.

El MEF tiene severas limitaciones para resolver problemas en los que el medio continuo se disgrega por efecto de las cargas. Asimismo, el MEF no es particularmente adecuado para el estudio de problemas de interacción fluido-estructura con grandes movimientos de la superficie libre, tal y como sucede en el caso de una corriente de agua impactando sobre una estructura (Figura 3).

Para sortear esas dificultades del MEF en los últimos años se han desarrollado diversos métodos de cálculo. De entre todos hay que destacar los basados en técnicas de partículas. A continuación se presenta una visión panorámica de algunos de estos métodos.

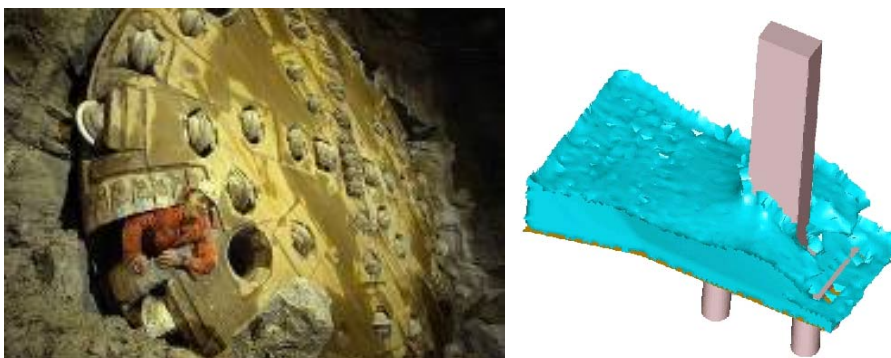


Figura 3: Problemas “difíciles” para el MEF. Análisis de la disgregación del terreno durante la excavación de un túnel. Estudio de la interacción de una corriente de agua con una estructura utilizando la técnica PFEM [10].

### 3.1. Sobre los métodos de partículas

Existen diferentes métodos de cálculo basados en técnicas de “partículas”. Entre los más populares destaca el “smooth particle hydrodynamics” (SPH). Este método se basa en modelar el continuo mediante un conjunto de partículas a las que se asignan las propiedades físicas del continuo utilizando una formulación lagrangiana. A diferencia con otros métodos basados en partículas discretas (Apartado 3.2), la cinemática de las partículas en la técnica SPH se calcula, no en base a las fuerzas de contacto entre ellas, sino resolviendo las ecuaciones diferenciales del continuo sobre el dominio que contiene las partículas, usando técnicas numéricas especiales basadas en métodos de residuos ponderados [9].

Pese a la popularidad en diversos campos de la física y la ingeniería, sobre todo en el campo de la dinámica de fluidos, el método SPH no se ha utilizado profusamente hasta la fecha en problemas de geomecánica, salvo para modelar avalanchas y deslizamientos de taludes y laderas. La mayor dificultad del método SPH en problemas de geomecánica es su limitación para “disgregar” el continuo en procesos de multifractura. En estos casos los métodos que utilizan partículas discretas son muy superiores.

En los últimos años investigadores de CIMNE y del Departamento Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería (RMEI) de la UPC han desarrollado un método de cálculo innovador que combina conceptos de métodos de partículas con los del MEF. El nuevo método, denominado PFEM (por Particle Finite Element Method) [10—13], se basa en modelar el continuo con un conjunto de partículas, tal como en el método SPH. La diferencia estriba en que en el PFEM las ecuaciones del medio continuo se resuelven *sobre una malla de elementos finitos* que se define sobre el conjunto de las partículas en

cada paso de tiempo. De esta manera se puede modelar la cinemática lagrangiana del conjunto de partículas, permitiendo la separación de algunas de ellas del medio continuo (lo que permite reproducir fenómenos de rotura de olas y de multifractura, entre otras). Se preservan así todas las ventajas del MEF para resolver las ecuaciones de la mecánica de medios continuos sobre la malla generada en cada instante del proceso de deformación del medio.

Hasta la fecha, el PFEM se ha aplicado con éxito a problemas de interacción fluido-estructura con grandes movimientos de la superficie del fluido. Las aplicaciones prácticas del PFEM incluyen problemas de hidrodinámica naval, ingeniería de puertos y costas, hidro-elasticidad de estructuras e ingeniería hidráulica, entre otros [10-13].

El PFEM es una técnica muy prometedora para el estudio del comportamiento tenso-deformacional de un medio continuo (el terreno y/o las estructuras de hormigón), considerando fenómenos de multi-fractura en ambos. Asimismo el PFEM es un método muy adecuado para el estudio del efecto de una corriente de agua sobre una estructura u obra subterránea (Figura 3). En las Figuras 4 y 5 se muestran dos ejemplos de aplicación del PFEM al estudio de la inundación de una sección de una estación de metro y de un garaje subterráneo al que le entra el agua por la rampa.

En la actualidad el grupo de los autores está desarrollando el PFEM para diversas aplicaciones en el ámbito de las obras subterráneas, tales como la simulación del proceso de excavación, el cálculo resistente de las estructuras teniendo en cuenta el acoplamiento con el terreno, así como para el estudio del efecto de inundaciones en obras subterráneas [10-13].

### *3.2 Sobre el método de los elementos discretos*

En el método de los elementos discretos (MED) el medio continuo se representa generalmente por un conjunto de discos y esferas que interaccionan entre sí a través de las fuerzas de contacto friccional que se producen en sus contornos. Generalmente los elementos discretos (los discos y las esferas) se suponen rígidos y siguen, por tanto, la cinemática de los sólidos rígidos. Es posible, no obstante, introducir el efecto de la deformación de cada elemento, mediante modelos constitutivos elásticos lineales.

La principal característica del MED es que permite modelar la disgregación de las partículas de un medio continuo bajo la acción de cargas externas e internas (temperatura, presión, etc.). Ello lo hace muy atractivo para el análisis de problemas de geomecánica, en los que se estudia el comportamiento resistente del suelo y las rocas, incluyendo la posibilidad de que el medio continuo se fracture durante el proceso de carga. Los principales desarrollos del MED en los últimos años se recogen en las publicaciones [14-23] y en las múltiples referencias que en ellas se incluyen.

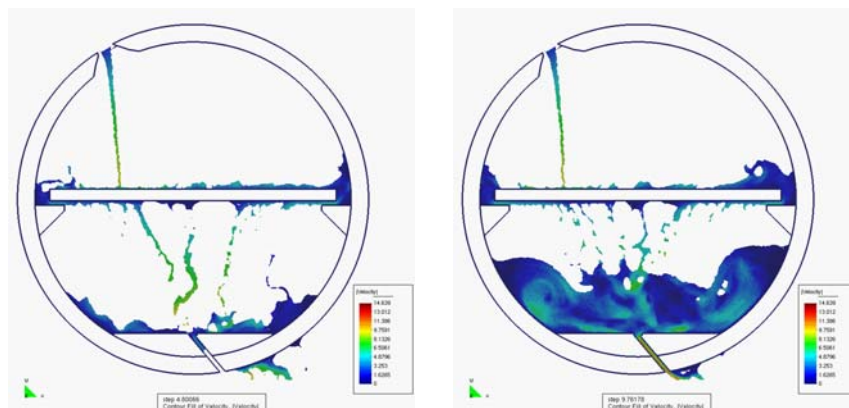


Figura 4: Simulación de la inundación en una sección de un túnel de metro por el PFEM. Los distintos colores indican el módulo de la velocidad [1].

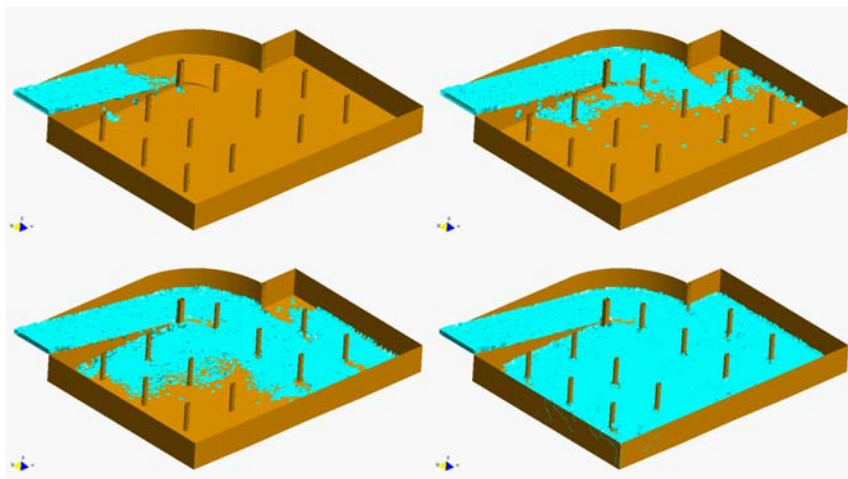


Figura 5: Simulación con el PFEM de la inundación de un garaje subterráneo, en el que entra el agua por la rampa [1].

La mayor parte de los problemas resueltos por el MED que se describen en la literatura son de tipo bidimensional (2D). Las principales dificultades del MED para el cálculo 3D son la modelización de un medio continuo por esferas de radio variable, la calibración de ecuaciones constitutivas que describan correctamente el comportamiento del material y el alto coste de cálculo que obliga a la utilización de técnicas de cálculo distribuido y paralelo.

Los códigos comerciales más populares basados en el MED son los denominados PFC y UEDC [18,19]. Pese a su popularidad en el mundo de la



geomecánica, estos códigos todavía no resuelven de forma eficiente las dificultades mencionadas anteriormente para problemas 3D.

Un problema aún no resuelto satisfactoriamente es el acoplamiento entre técnicas MED y modelos de elementos finitos. Este acoplamiento es esencial para estudiar la capacidad resistente de estructuras de hormigón teniendo en cuenta efectos de interacción con el terreno. La idea esencial es modelar la estructura de hormigón con el MEF y el terreno con el MED. De esta manera es posible predecir el comportamiento tenso-deformacional de ambos medios continuos hasta la rotura, incluyendo los efectos de fisuración en el hormigón y de disgregación en el terreno.

Investigadores del CIMNE y del Departamento RMEI de la UPC han desarrollado técnicas avanzadas del MED y del MEF para análisis de problemas de excavación y dragado en el marco del proyecto CUTTER de la CE [20]. En dicho proyecto se incorporaron también los nuevos desarrollos del MED y del MEF al estudio del desgaste de piezas de maquinaria de obras públicas en problemas de excavación en diferentes tipos de terreno y roca. Dichos equipos de investigación han desarrollado recientemente la técnica combinada MED/MEF con aplicación en problemas de geomecánica [21-23]. Estos desarrollos continúan en el marco de los proyectos La Ciudad Multidimensional [1] y Tunconstruct [2]. En concreto, las líneas de desarrollo de las técnicas MED/MEF apuntan al estudio de procesos de excavación de túneles y al análisis de la seguridad de obras subterráneas bajo cargas ordinarias y extraordinarias, tales como explosiones, terremotos e incendios.

A continuación, y sin ánimo de ser exhaustivos, se destallan algunas de las bases teóricas del método de los elementos discretos (MED).

#### **4. El Método de los Elementos Discretos (MED)**

Tal y como se ha comentado el MED representa el comportamiento mecánico de un medio continuo por medio de un conjunto de partículas (discos en 2D y esferas en 3D) que interaccionan entre si a través de sus puntos de contacto. La disposición de las partículas dentro del continuo es aleatoria, con diferentes tamaños distribuidos, representando de este modo el carácter granular del medio físico a estudiar.

El modelo que define el comportamiento del material se establece en las zonas de contacto entre partículas a través de las leyes constitutivas formuladas en función de las propiedades micromecánicas de las partículas. Estas leyes a nivel micro, determinan el comportamiento de todo el material a nivel macroscópico. La interacción de las partículas tiene en cuenta la cohesión entre ellas. La formulación permite modelar el comportamiento tanto de suelos cohesivos como de rocas hasta su colapso, caracterizado por la fractura del material, lo que representa una ventaja respecto a los modelos continuos.

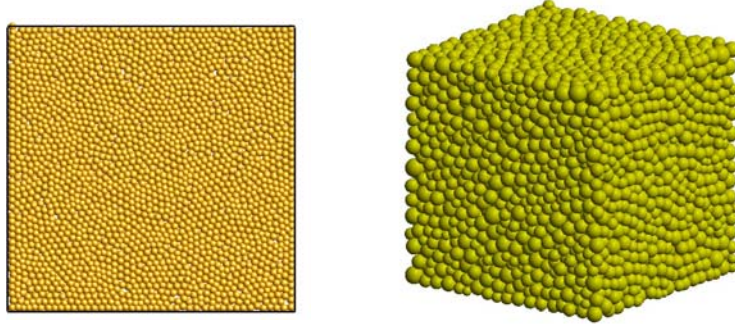


Figure 6: Discretización de un dominio cuadrado y otro cúbico con discos y esferas para análisis por el MED.

#### 4.1 Ecuaciones de movimiento

Cada una de las partículas se trata como un sólido rígido al que se aplican las ecuaciones de traslación y de rotación típicas de la dinámica de sólidos

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F} \quad (1)$$

$$\mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{T} \quad (2)$$

donde el punto sobre una letra indica la derivada temporal y

- $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamientos del centroide en un sistema de coordenadas inercial
- $\boldsymbol{\omega}$  es vector de la velocidad angular de la partícula
- $\mathbf{M}$ : matriz diagonal con los valores de masa en los términos diagonales
- $\mathbf{I}$ : matriz diagonal con los momentos de inercia en los términos diagonales
- $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{T}$ : vectores de fuerzas y momentos resultantes sobre la partícula

Las resultantes sobre cada partícula se calculan como la suma de todas las fuerzas o momentos debidos a la carga externa, las fuerzas de contacto entre las partículas y las fuerzas de amortiguamiento del sistema.

La expresión para el movimiento rotacional (2) es válida para esferas y discos, pero resulta una expresión simplificada con respecto a la forma general para un cuerpo arbitrario rígido cuyas propiedades inerciales vienen determinadas por un tensor de segundo orden.

Las ecuaciones (1) y (2) constituyen leyes de evolución en el tiempo de las variables desplazamiento y velocidad. Para la integración en el tiempo, se emplea un esquema de diferencias centrado explícito. Las etapas para la obtención de los desplazamientos en el paso de tiempo  $n+1$  son las siguientes:

$$\ddot{\mathbf{u}}_n = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{F}_n \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1/2} = \dot{\mathbf{u}}_{n-1/2} + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (4)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{n+1/2} \quad (5)$$

De forma similar se obtiene para la integración de la ecuación de rotación,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_n = \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{T}_n \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{n+1/2} = \boldsymbol{\omega}_{n-1/2} + \Delta t \dot{\boldsymbol{\omega}}_n \quad (7)$$

De lo anterior se deduce el vector de rotación incremental  $\Delta\boldsymbol{\theta}$  a partir del cual se obtienen las fuerzas tangenciales de contacto

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = \Delta t \boldsymbol{\omega}_{n+1/2} \quad (8)$$

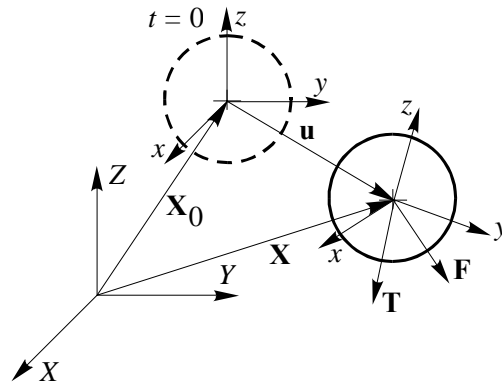


Figura 7: Descripción de la cinemática de una partícula circular.

#### 4.2 Leyes de contacto

Las fuerzas de contacto ( $\mathbf{F}$ ) entre partículas en el punto de contacto se descomponen en sus componentes normal ( $\mathbf{F}_n$ ) y tangencial ( $\mathbf{F}_t$ ) al plano de contacto definido por la normal  $\mathbf{n}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_T = \mathbf{F}_n \mathbf{n} + \mathbf{F}_T \quad (9)$$

A su vez, la fuerza de contacto normal ( $\mathbf{F}_n$ ) se descompone en su parte elástica ( $\mathbf{F}_{ne}$ ) y la parte correspondiente al amortiguamiento ( $\mathbf{F}_{nd}$ )

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{ne} + \mathbf{F}_{nd} \quad (10)$$

La componente elástica  $\mathbf{F}_n$  de la fuerza normal de contacto  $\mathbf{F}_{ne}$  se define como proporcional a la penetración de las superficies de dos partículas  $u_m$ , siendo la constante de proporcionalidad la rigidez normal  $k_n$

$$F_{ne} = k_n u_m \quad (11)$$

El cálculo de la penetración se calcula de forma puramente geométrica, en función de la distancia entre centros ( $d$ ), y los radios de ambas partículas ( $r_1, r_2$ )

$$u_m = d - r_1 - r_2 \quad (12)$$

Se define además un valor de cohesión  $R_n$  que supone el valor crítico para las fuerzas de tracción entre partículas, de forma que una vez superado, las fuerzas de cohesión dejan de actuar (Figura 8). El criterio de decohesion es:

$$F_{ne} \leq R_n \quad (13)$$

De la misma forma la componente de amortiguamiento de la fuerza normal de contacto permite simular las oscilaciones de dicha fuerza, mediante la disipación de energía cinética. Dicha componente se define como

$$F_{nd} = c v_m \quad (14)$$

dónde  $v_m$  es la velocidad normal relativa entre los centros de las partículas en contacto y  $c$  es un coeficiente de amortiguamiento.

La componente tangencial de las fuerzas de contacto se define igualmente a partir de relaciones constitutivas lineales

$$\mathbf{F}_T = k_T \mathbf{u}_{rT} \quad (15)$$

donde  $\mathbf{u}_{rT}$  es la velocidad tangencial relativa entre los puntos de contacto.

Similarmente a lo expuesto para la componente normal, se define un valor crítico para la fuerza tangencial a partir del cual las fuerzas de cohesión desaparecen (Figura 8). El criterio de decohesión es

$$\|\mathbf{F}_T\| \leq R_T \quad (16)$$

Una vez que las fuerzas de cohesión dejan de actuar, la interacción tangencial es debida exclusivamente a la fricción, según la siguiente relación

$$\|\mathbf{F}_T\| = \mu |\mathbf{F}_n| \quad \text{con } u_{rn} > 0 \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{0} \quad \text{con } u_{rn} \leq 0 \quad (18)$$

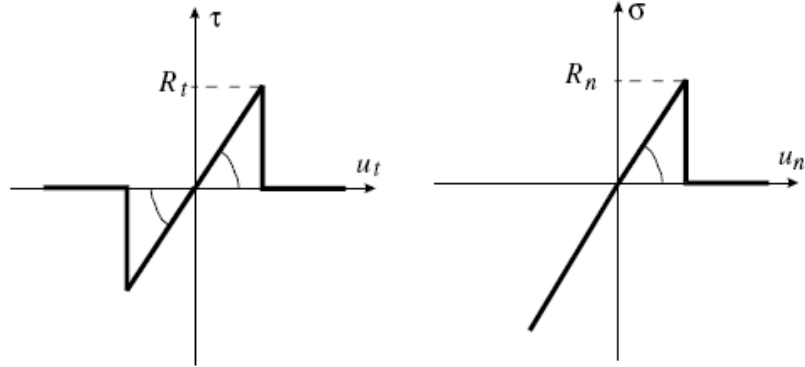


Figura 8: Definición de las relaciones constitutivas entre las componentes normal y tangencial de las fuerzas de contacto y los desplazamientos normal y tangencial relativos.

#### 4.3. Combinación de elementos finitos y elementos discretos

La combinación de elementos finitos y elementos discretos precisa de un tratamiento especial en las zonas de contacto entre los elementos circulares (o esféricos) y los bordes del dominio continuo.

De forma similar a lo apuntado para dos esferas en el método discreto, la fuerza de contacto entre cada esfera y el borde del continuo, representado por elementos finitos, se descompone en las componentes normal y tangencial. Son válidas las consideraciones realizadas para el MED si bien la penetración (12) se calcula ahora como

$$u_{rn} = d - r \quad (19)$$

donde  $r$  es el radio de la esfera que contacta.

De la misma forma el parámetro de velocidad  $v$  que permite definir la componente de amortiguamiento de la fuerza de contacto viene ahora dada por:

$$v_r = (v_c + w_c \times r) - (v_1 N_1 + v_2 N_2) \quad (20)$$

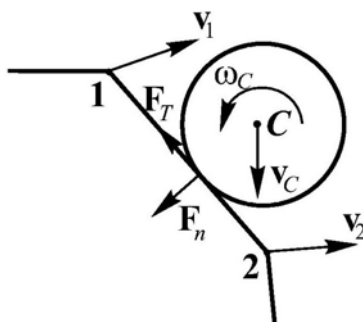


Figure 9: Contacto entre un elemento discreto circular y el contorno de un elemento finito.

El primer sumando representa la velocidad en el punto de contacto del elemento discreto y el segundo en el borde del elemento finito expresado en términos de velocidades nodales ( $v_i$ ) y de funciones de forma ( $N_i$ ). Esta velocidad se descompone en la dirección normal y tangencial  $v_{rt}$  y  $v_{rm}$ . Para más detalles consultar las referencias [21-23].

Los autores han aplicado con éxito la técnica MED a la simulación de procesos de desgaste de útiles de maquinaria de obras públicas, tales como excavadoras, rozadoras, tuneladoras, etc. Tanto el útil como el terreno donde aquél actúa se modelan con elementos discretos. El fenómeno de desgaste en el útil se simula eliminando el material de la superficie del diente (es decir, los elementos discretos adyacentes a la superficie) a medida que progresa el desgaste por fenómenos de abrasión y contacto-impacto friccional en esa zona durante el trabajo del útil. En las Figuras 10 y 11 se muestran dos ejemplos de aplicación del MED a problemas de desgaste de útiles.

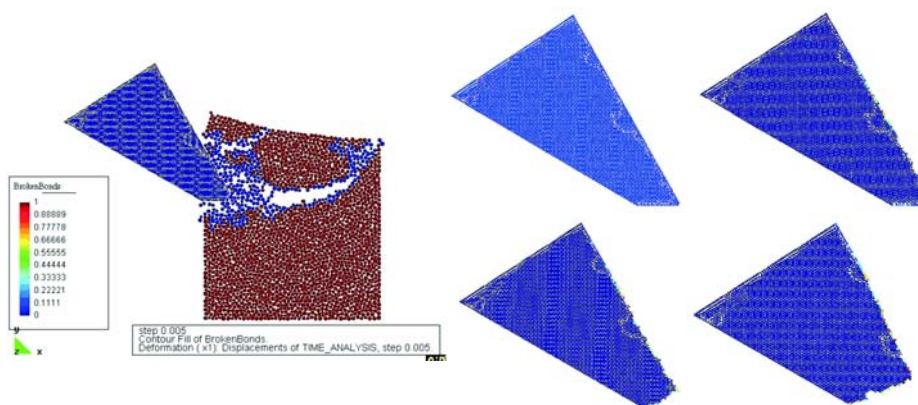


Figura 10: Simulación del desgaste de un diente de una máquina excavadora al incidir sobre el terreno. El diente y el terreno se modelan con elementos discretos [20-23].

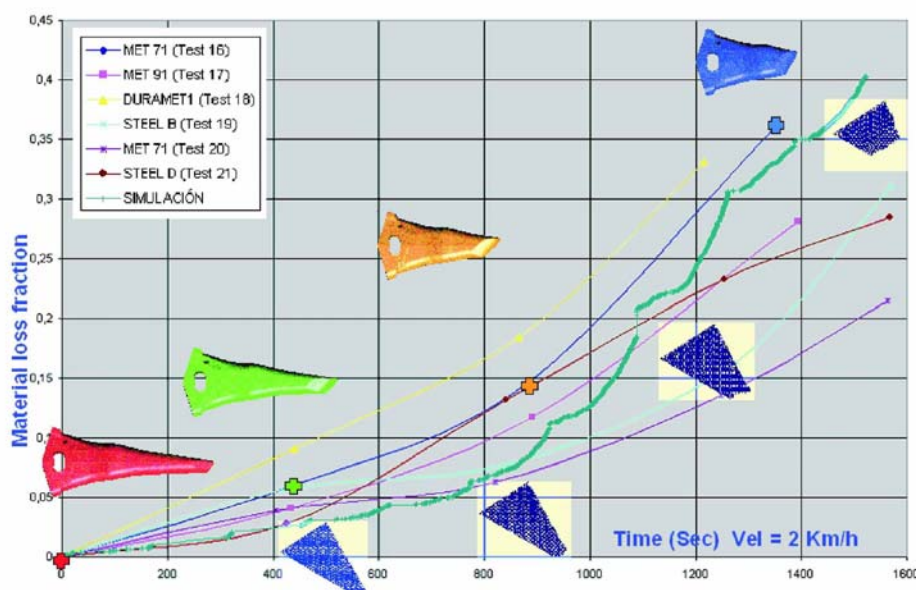


Figura 11: Comparación de resultados experimentales y numéricos del desgaste en un diente de excavadora modelado con elementos discretos [20].

## 5. Algunas aplicaciones

Como ejemplo de la utilización de la técnica MED/MEF en la Figura 12 se muestra el progreso de un diente de excavadora, en una sección bidimensional de un túnel. La zona del terreno próxima al útil está discretizada con elementos discretos, mientras que la zona más interior se modela con elementos finitos triangulares. Se puede observar el desprendimiento de material que la simulación numérica predice y cómo muchos elementos discretos abandonan el frente de excavación de forma más o menos compacta, acompañando el avance del útil.

La simulación 3D del problema es más compleja. En la Figura 13 se muestra el progreso de un diente de una máquina tuneladora que incide sobre un cubo que representa esquemáticamente un macizo de suelo modelado con esferas de distinto tamaño. Puede apreciarse como el diente avanza disgregando el material.

Por último, la Figura 14 muestra la simulación del progreso de un cilindro discretizado con elementos finitos que gira excavando un macizo de suelo modelado con esferas. Puede observarse como con el giro el cilindro penetra en el macizo, desplazando y disgregando el material. El objetivo final de estas investigaciones es simular el proceso de excavación en una obra subterránea mediante tuneladoras utilizando la técnica MED/MEF [1].

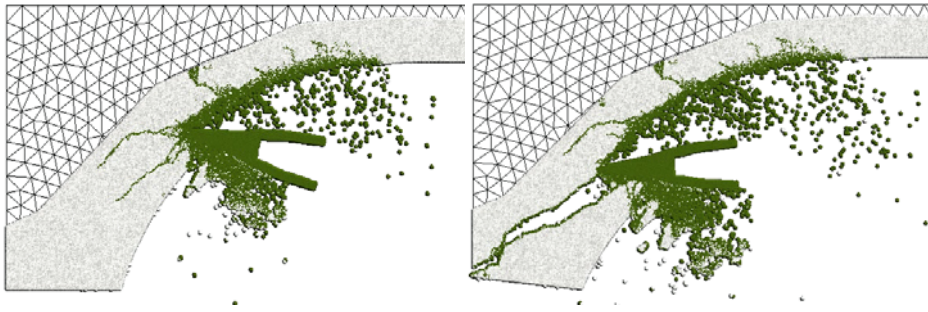


Figura 12: Simulación de la excavación de un túnel con la técnica MED/MEF

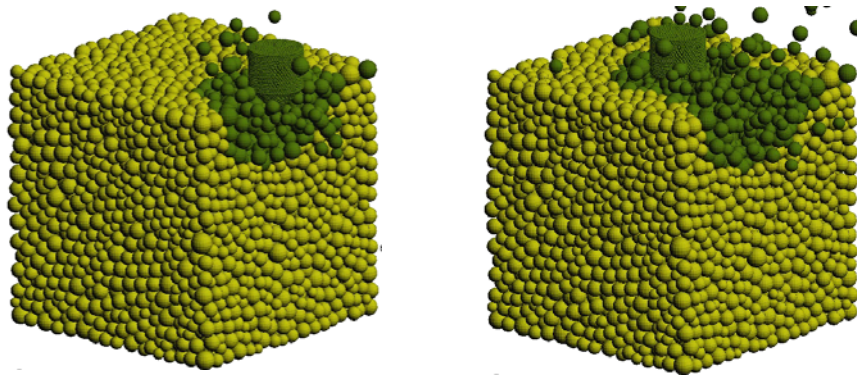


Figura 13: Simulación del avance de un diente de una máquina tuneladora en un macizo de terreno modelado con el MED. El diente se modela con el MEF.

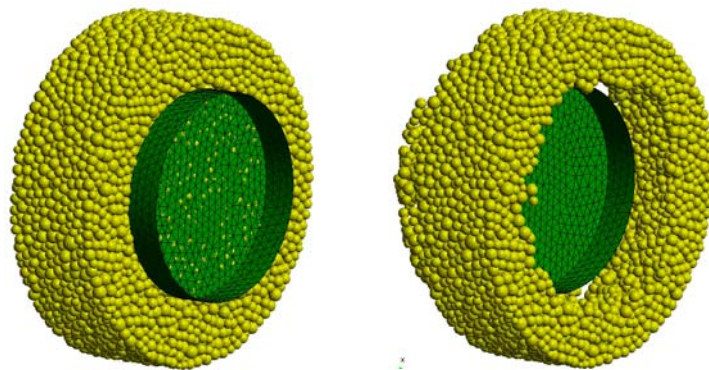


Figura 14: Avance de un cilindro discretizado con el MEF en el interior de un macizo de terreno modelado con el MED.



## 6. Conclusiones

Los métodos basados en técnicas de partículas tienen muchas posibilidades para la simulación de una gran variedad de problemas relacionados con las obras subterráneas.

El PFEM es muy adecuado para el estudio de problemas de interacción fluido-estructura. Entre las aplicaciones más evidentes de este método podemos citar la simulación del efecto de una corriente de agua sobre una estructura y la inundación de una obra subterránea.

La combinación de elementos discretos y de elementos finitos es muy prometedora para simular problemas de geomecánica que involucren fractura y disgregación del material, penetración y excavación. La técnica MED/MEF es particularmente útil para el estudio de procesos constructivos de obras subterráneas de interés práctico.

Un reto científico para la aplicación práctica de la técnica MED/MEF es la caracterización de las propiedades físicas de las esferas (nivel microscópico) para representar adecuadamente las propiedades de los materiales, tanto del terreno como de los útiles de excavación y demás elementos estructurales de la obra (nivel macroscópico). Otro gran objetivo es la solución de problemas tridimensionales de gran tamaño en tiempos de cálculo razonables, lo cual parece posible utilizando técnicas de cálculo paralelo.

## Agradecimientos

Los autores agradecen a los investigadores de CIMNE/UPC Jurek Rojek, Carlos Labra, Miguel Angel Celigueta, José Manuel González y José M<sup>a</sup> Carbonell su colaboración en la solución de los ejemplos descritos. Los resultados experimentales presentados en la Figura 11 se obtuvieron por Metalogenia SA en el marco del proyecto CUTTER [20]. Esta investigación se ha desarrollado con el apoyo del proyecto La Ciudad Multidimensional del MEC [1], del proyecto Tunconstruct de la CE [2] y del proyecto SEDUREC del Programa Consolider-Ingenio 2010 [24].

## 7. Referencias

- [1] La Ciudad Multidimensional. Proyecto PROFIT Estratégico Singular del Ministerio de Educación y Ciencia (2006-2009) [www.cimne.com/websasp/geost](http://www.cimne.com/websasp/geost).
- [2] Tunconstruct. Technology innovation in underground construction. Integrated Project of the European Commission (2006-2009), [www.tunconstruct.org](http://www.tunconstruct.org).
- [3] Zienkiewicz, O.C. *et al.*, *The finite element method*. 6th Edition, 3 Volumes, Elsevier, 2005.
- [4] Oñate, E., *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos*. CIMNE, Barcelona, 2<sup>a</sup> edición 1995.
- [5] Z\_SOIL.PC 2003 Zace Services Ltd., Switzerland - *software package for geotechnical engineering*.

- [6] *Plaxis (PLAXIS BV, The Netherlands)* - Finite Element code for soil and rock analyses, finite element packages intended for 2D and 3D analysis of deformation, stability and groundwater flow in geotechnical engineering.
- [7] *FLAC, FLAC3D Itasca Consulting Group Inc.* Finite element code that is used in analysis, testing, and design by geotechnical, civil, and mining engineers.
- [8] *CODE- Bright* is a finite element code developed at Universitat Politècnica de Catalunya and marketed by CIMNE. It specializes in the analysis of geomechanical problems.
- [9] Liu, G.R. and Liu, M.B., *Smooth particle hydrodynamics. A mesh free particle method.* World Scientific, 2003.
- [10] *The Particle Finite Element Method (PFEM).* www.cimne.com/pfem
- [11] Oñate, E., Idelsohn, S.R., Del Pin, F. And Aubry, R. The Particle Finite Element Method. An overview. *Int. J. Comput. Methods*, 1(2), pp. 267-307, 2004.
- [12] Idelsohn, S.R., Oñate, E. and Del Pin, F. The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61, pp. 964-989, 2004.
- [13] Oliver, X., *et al.*, The particle finite element method in solid mechanics, in *Computational Plasticity*, E. Oñate et al. (Eds.), Springer-Verlag, 2007.
- [14] Konietzky, H. (Ed.), *Numerical modelling in micromechanics via particle methods.* Balkema, 2003.
- [15] Cook, B.K. and Jensen, R.P., *Discrete Element Methods. Numerical Modelling of Discontinua.* Geo Institute, ASCE, 2002.
- [16] Mohammadi, S., *Discontinuum Mechanics using finite and discrete methods.* WII Press, 2003.
- [17] Munjiza, A., *The combined finite-discrete method.* J. Wiley, 2004.
- [18] *PFC2D, PFC3D discrete element codes Itasca Consulting Group Inc.*, allowing us to simulate the dynamic behavior of assemblies of circular- (PFC2D) or spherical- (PFC3D) shaped particles.
- [19] *UDEC, 3DEC (Itasca Consulting Group Inc).* Simulation code of large displacements (slip and opening) along distinct surfaces in a discontinuous medium, treated as an assemblage of discrete polygonal blocks (UDEC) or polyhedra (3DEC).
- [20] *CUTTER. Enhanced design and production of wear resistant rock cutting tools for construction machinery.* Growth Programme of the EC, (2001-2003). www.cimne.com
- [21] Oñate E. and Rojek J., Combination of discrete element and finite element methods for dynamic analysis of geomechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(27-29), pp. 3087-3128, 2004.
- [22] Oñate, E., Rojek, J., Miquel, J., Zárate, F. and Recarey, C., *Advances in the development of discrete element method and finite element method for predicting wear in rock cutting tools.* Research Report CIMNE, 2004.
- [23] Recarey, C., Oñate, E., Miquel, J., Rojek, J., Zárate, F., Burrel, S., Simulación de procesos de desgaste en la interacción herramienta de corte-terreno por el método de elementos finitos, *Ingeniería Civil*, 141, pp. 19-34, 2006.
- [24] Proyecto sobre Seguridad y Durabilidad de Estructuras de Construcción (SEDUREC). Programa Consolider-Ingenio 2010. www.cimne.com/sedurec.