

Determinación numérica de los coeficientes de empuje y sustentación de tableros de puente mediante el método de vórtices discretos. Aplicación al puente colgante del Bimilenario de Elche

Gonzalo Gómez Mataix¹ y Juan B. Marco Segura²

¹ EGIS-Eyser

C/ Naturalista Rafael Cisternes 4-22

46010 Valencia, España

e-mail: ggommat@ciccp.es

² Catedrático de Ingeniería Hidráulica

Departamento de Ingeniería Hidráulica y Medio Ambiente

Universidad Politécnica de Valencia

Resumen

Se ha desarrollado en el presente trabajo un modelo de vórtices discretos capaz de cuantificar el empuje y la sustentación de una sección de tablero de puente. En dicho modelo se ha adoptado una discretización de los vórtices de tipo gaussiano. Como mecanismo de generación de vorticidad en el contorno se ha impuesto velocidad de penetración nula mediante el método de paneles. La difusión de la vorticidad se ha materializado aplicando el método RVM de Chorin (random-walk) y el método de la velocidad de difusión de Ogami-Akamatsu de forma combinada.

El esquema de integración temporal ha sido el de Euler. Las fuerzas de empuje y sustentación han sido obtenidas mediante la ecuación de impulso de la vorticidad. Para minimizar el tiempo de cálculo se ha optado por implementar una versión modificada del método de correcciones locales. Para detectar los vórtices cercanos se ha utilizado el método de lista enlazada de Hockney.

Los resultados de la aplicación del modelo a casos de flujos alrededor de cilindros de geometría sencilla han sido satisfactorios, demostrando la capacidad del mismo para reproducir el campo de velocidades existente, la configuración global del flujo a altos números de Reynolds y la evolución de los coeficientes de empuje y sustentación.

Finalmente, la aplicación práctica del modelo a la determinación de los coeficientes de empuje y sustentación del puente colgante del Bimilenario de Elche ha sido buena, demostrándose la utilidad del modelo como herramienta de diseño estructural en las etapas previas del diseño aerodinámico.

Palabras clave: DVM, vórtices discretos, coeficientes aerodinámicos, empuje, sustentación, modelación numérica del viento, puente del Bimilenario de Elche.

NUMERICAL CALCULATION OF THE DRAG AND LIFT COEFFICIENTS OF BRIDGE DECKS USING THE DISCRETE VORTEX METHOD. THE ELCHE BIMILENARIO SUSPENDED BRIDGE CASE

Summary

A discrete vortex model capable of quantifying the drag and lift of a bridge deck section has been developed. In the present model, a gaussian discretization has been adopted for the vortices. The vorticity generation mechanism applied consists in imposing zero normal velocity in the boundaries through the panel method. The vorticity diffusion has been modelled applying the RVM method of Chorin (random-walk) and the diffusion-velocity method of Ogami-Akamatsu in a mixed way.

The Euler scheme is adopted as the time integration scheme. The drag and lift forces have been obtained through the vorticity impulse equation. In order to reduce the computation time, a modified version of the local correction method has been implemented. The linked-list method of Hockney has been used to detect the close vortices to a given one.

The application of the model to flows around simple geometry cylinders has turned out good results, showing the capability of the model to simulate the velocity field, as well as the global configuration of the flow at high Reynolds numbers and the time evolution of the drag and lift coefficients.

The application of the model to the determination of the drag and lift coefficients of the Elche Bimilenario suspended bridge has been satisfactory, showing the capability of the model as a designing tool in the earlier stages of the aerodynamic design process.

Keywords: *DVM, discrete vortex, aerodynamic coefficients, drag, lift, numerical wind flow simulation, Bimilenario Elche bridge.*

INTRODUCCIÓN

Aunque es cierto que la proporción de estructuras sensibles al viento es pequeña, también lo es el hecho de que las continuas mejoras en la resistencia de los materiales empleados en la construcción y la eficiencia en el diseño motivada por la búsqueda de geometrías estilizadas, facilitada por los métodos de cálculo actuales, hacen que cada vez mayor número de estructuras requieran cálculos específicos bajo la hipótesis de viento para mantener correctamente las condiciones de servicio, o incluso, en casos extremos, asegurar su integridad estructural. En estos casos, los estrechos márgenes de seguridad reales obtenidos frente a las acciones principales (fundamentalmente gravitatorias), provocan que la estructura se torne sensible a una acción que en otras estructuras convencionales, menos esbeltas, es secundaria.

Los modelos numéricos ejercen ya un papel fundamental en las etapas iniciales del proceso de diseño, de tal manera que un gran número de diseños tentativos de una sección de puente, por ejemplo, pueden ser ensayados numéricamente en una etapa inicial, seleccionándose únicamente los que poseen mejores aptitudes aerodinámicas y aeroelásticas para, en una etapa posterior, ser ensayados de forma más exhaustiva en túnel de viento, obteniéndose de este modo un diseño más cercano al óptimo con un coste mucho menor.

El objeto principal de la presente investigación es determinar el empuje y la sustentación de un tablero de puente por medios numéricos, empleando para ello un modelo de simulación de flujo incompresible bidimensional externo. Dado que el fin último es su aplicación a tableros de puente, la hipótesis de bidimensionalidad es perfectamente asumible, admitida una relación luz/anchura suficientemente grande. Por otra parte, dado que las velocidades del viento no imponen variaciones apreciables de volumen en el aire, se admite sin más la hipótesis de flujo incompresible.

En todo caso es fundamental que el modelo sea capaz de simular flujos altamente turbulentos, así como que sea relativamente sencilla su aplicación a geometrías complejas y flujo externo, como es el caso de un tablero de puente. Estas dos características son menos complejas de implementar en un modelo de vórtices discretos que en otro tipo de modelos, y constituyen las dos principales razones que nos han llevado a seleccionar esta familia de modelos como la más adecuada para resolver el problema planteado.

En flujo bidimensional podemos simplificar el estudio aerodinámico integrando el campo de presiones y las tensiones de corte sobre la superficie del elemento estructural analizado a lo largo de una longitud unidad según la dirección del eje del elemento. Obtenemos como resultado una fuerza que podemos descomponer en su componente normal a la dirección del flujo, F_L –denominada *sustentación*– y en la dirección del flujo, F_D –denominada *empuje* o *arrastre*–, así como un momento de torsión del elemento, M –denominado *momento aerodinámico*–.

Los coeficientes aerodinámicos de arrastre $-C_D$ – y sustentación $-C_L$ – se definen haciendo intervenir la presión de estancamiento para una velocidad representativa del flujo de aproximación U y una dimensión representativa de la sección transversal del cuerpo B :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 B} \quad , \quad C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 B} \quad (1)$$

Estos coeficientes son números adimensionales que expresan la relación entre la fuerza existente y la fuerza que ejercería el mismo viento sobre una superficie plana de área equivalente a la proyección de la sección de tablero en dirección del viento, pero supuesta englobada en una superficie indefinida. La expresión adimensional análoga correspondiente al momento de las fuerzas ejercidas es:

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho U^2 B^2} \quad (2)$$

En el actual estado de la presente línea de investigación, nos vamos a centrar únicamente en la determinación de los coeficientes de empuje y sustentación, posponiendo la determinación del coeficiente de momento, por su mayor complejidad numérica, para posteriores etapas de la investigación.

Hay que recalcar que el hecho de que la velocidad de aproximación sea constante no implica necesariamente que sean constantes en el tiempo los coeficientes aerodinámicos, debido a la aparición de fenómenos fluctuantes asociados a la presencia de los remolinos de Von Karman.

La aparición de los remolinos de Von Karman se asocia al fenómeno de separación de la capa límite de un fluido alrededor de un cuerpo con contornos no aerodinámicos. Strouhal, ya en 1878, dedujo que el fenómeno podía ser descrito en función de un número adimensional, conocido como número de Strouhal, St , de expresión:

$$St = \frac{f B}{U} \quad (3)$$

donde f es la frecuencia asociada al fenómeno. El número de Strouhal de hecho constituye una frecuencia adimensional.

Independientemente de las determinaciones cuantitativas, la aplicación de un modelo a una sección determinada permite profundizar en el conocimiento de la configuración del flujo alrededor de esa sección, permitiendo conocer cualitativamente la extensión de la estela, la ubicación y el tamaño medio de los remolinos cercanos a la estructura, o la frecuencia principal de vibración debida al desprendimiento de remolinos. Este objetivo entroncaría con la utilidad que tienen los modelos como herramientas de conocimiento teórico, debido al total control de las condiciones del flujo simulado que se consigue con los modelos, por su propia naturaleza, y la relativa sencillez con la que se obtienen datos numéricos y gráficos con una mayor resolución que en los experimentos (el uso de estos modelos en este caso ha de ir precedido de una intensa labor de calibración y validación, de tal manera que el error entre los resultados y la realidad esté acotado).

El modelo desarrollado se ha implementado para su uso en PC y ha sido escrito en FORTRAN-77, estructurándose en un programa principal y 22 subrutinas. Para el preproceso y postproceso gráfico de resultados se ha empleado el programa GMSH²². Los cálculos han sido efectuados en el Laboratorio de Tecnología de Computadores de la Escuela Técnica Superior de Informática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, mediante la utilización simultánea de 17 ordenadores AMD XP a 2500 Mhz y 512 Mb de RAM.

EL MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS O DVM

Los métodos de cálculo aplicables a la resolución de flujos externos con que podemos determinar los coeficientes aerodinámicos de sólidos prismáticos, pueden incluirse en seis metodologías englobadas en tres ramas principales:

1. Métodos con promediación (requieren un modelo de cierre o de turbulencia)
 - *Modelo $k - \epsilon$* : De amplio uso. Viene avalado por sus buenos resultados para predecir tendencias. Utiliza la promediación de Reynolds.
 - *Método LES*: Hace uso del filtrado como técnica de promediación, obteniendo buenos resultados, aunque a costa de mayores requerimientos de CPU.
 - *Métodos SMC*: Mucho más sofisticados que los anteriores, prometen ser muy eficientes.
2. Métodos sin promediación (no requieren modelo de cierre o de turbulencia)
 - *Simulación directa*: Resolución numérica directa de las ecuaciones de Navier-Stokes, generalmente mediante diferencias finitas.
 - *Método de vórtices discretos*: Similar al anterior, aunque formulado en vorticidad y de raíz lagrangiana.
3. Métodos espectrales

El método de vórtices discretos (también conocido por su acrónimo en inglés: DVM –*Discrete Vortex Method*–) resuelve las ecuaciones del movimiento mediante un planteamiento lagrangiano y, por tanto, sin necesidad de discretizar el espacio. El planteamiento del método se basa en el hecho de que la vorticidad es una propiedad del flujo que sufre convección y difusión, por lo que el campo de vorticidad es susceptible de discretizarse en partículas (vórtices discretos) cuya posición y carga de vorticidad pueden ser calculadas en cada paso de tiempo. El método fue establecido en su forma definitiva por Chorin¹¹, tras varios trabajos preliminares de diversos autores.

Turkiyyah⁵⁰ destaca las siguientes ventajas del método:

- No se requiere el uso de mallas, evitando complejos cálculos para simular flujos en geometrías complejas, y facilitando la implementación del método en modelación aerolástica, donde la geometría del problema cambia con el tiempo.
- El número de vórtices discretos a incluir en las simulaciones es menor que el número de elementos de las mallas en los métodos eulerianos.
- El método no introduce difusión numérica y por tanto pueden ser modelados flujos a mayores Re .
- El método es adaptativo en el sentido de que, sin necesidad de hipótesis añadidas, los elementos se concentran en las zonas donde los gradientes de vorticidad son mayores.

Además, el hecho de que no requiera un modelo de cierre o de turbulencia, reduce el número de parámetros a introducir y simplifica la calibración del modelo, aspecto importante cuando no se cuenta con un número alto de datos experimentales. Esta característica confiere además al método una gran facilidad de programación. Si a esto añadimos su alta resolución en el tiempo –que lo hace muy útil para reproducir fenómenos transitorios o caracterizar las fluctuaciones del flujo–, es comprensible que, pese a ser uno de los métodos menos conocidos y utilizados, su uso se vaya extendiendo en el campo de la ingeniería civil.

Como contrapartidas del método destacaremos en primer lugar que los modelos en tres dimensiones aún están en fase de desarrollo dada su enorme complejidad. En segundo lugar, mencionaremos la necesidad de manejar múltiples submodelos conceptuales, como veremos a continuación.

Entrando ya en la formulación del método, la idea fundamental en que está basado consiste en abordar la resolución de la ecuación que gobierna la convección y difusión de la vorticidad mediante dos pasos de cálculo sucesivos en cada intervalo en que se ha discretizado el tiempo. La técnica utilizada se emparenta con el método de pasos fraccionados, utilizado en el método de elementos finitos para la simulación de flujos incompresibles.

La ecuación que gobierna el flujo expresada en vorticidad es la ecuación de transporte de vorticidad:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \zeta = \nu \nabla^2 \zeta \quad (4)$$

En el primer paso, se resuelve el movimiento convectivo de los vórtices de acuerdo a la ecuación de Euler, es decir, considerando viscosidad nula. La ecuación de Euler, igual a la parte convectiva de la ecuación de transporte de vorticidad, se puede escribir como

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \zeta = \frac{D\zeta}{Dt} = 0 \quad (5)$$

En el segundo paso, se resuelve la ecuación de difusión de vorticidad considerando que la velocidad convectiva es nula. La ecuación de difusión, igual a la parte difusiva de la ecuación de transporte de vorticidad, tiene por expresión:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \nabla^2 \zeta \quad (6)$$

Al final del segundo paso, es decir, al final del intervalo de tiempo de cálculo, la suma de las dos soluciones se aproxima a la solución simultánea de ambos fenómenos según la ecuación de transporte de vorticidad.

Como hemos avanzado, a diferencia de los métodos eulerianos, que discretizan la variable fundamental del problema en puntos fijos del espacio, el método de vórtices discretos acomete la discretización de la vorticidad en partículas móviles, siguiendo por tanto un esquema de cálculo lagrangiano.

La justificación de este esquema se encuentra en el hecho de que, si prescindimos de la difusión, la parte convectiva de la ecuación de transporte de vorticidad –ecuación (5)– viene a decir que la vorticidad asociada a una determinada partícula del fluido no cambia con el tiempo. Si por partícula entendemos la porción de fluido compuesta por la masa de fluido que en un determinado instante de tiempo de referencia t_0 estaba contenida en una región Ω_i de forma y tamaño arbitrarios, entonces la circulación asociada a las partículas $\Gamma_i = \int_{\Omega_i} \zeta d\Omega_i$, por (5), es constante. Este resultado corrobora el teorema de Kelvin para fluidos no viscosos. Además, por continuidad, la masa de la partícula es constante y por tanto, considerando incompresibilidad, su volumen también lo es⁵².

Todo ello corrobora la conveniencia de considerar que, en ausencia de viscosidad, el campo de vorticidad está formado por pequeñas regiones de fluido de vorticidad y volumen constantes que se mueven por convección, y cuyo efecto conjunto en un determinado punto del espacio, define la vorticidad y, consecuentemente, la velocidad en dicho punto. La presión desaparece como variable dependiente del problema, pudiendo hallarse de manera independiente cuando haga falta a partir del campo de velocidades, utilizando una ecuación de Poisson con condiciones de contorno tipo Neumann.

De este modo, la convección de una partícula de coordenadas $\mathbf{x}_i$, supuesta conocida la velocidad local, puede resolverse a través de dos simples ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\frac{dx_i}{dt} = u(\mathbf{x}_i, t) \quad , \quad \frac{dy_i}{dt} = v(\mathbf{x}_i, t) \quad (7)$$

La no linealidad de las ecuaciones de Navier-Stokes se traduce en este esquema en que la velocidad local con la que los vórtices son desplazados en un problema de flujo vortical indefinido es la inducida por los propios vórtices.

Así pues, para fluidos invíscidos e incompresibles gobernados por las ecuaciones de Euler, el movimiento de los vórtices discretos –sólo convectivo– viene determinado por el campo de velocidades local. Sin embargo, con el fin de modelar las ecuaciones de Navier-Stokes es necesario tener en cuenta la viscosidad. La manera más común es acoplar un *random-walk* al movimiento de los elementos, con lo que se consigue aproximar la difusión de vorticidad mediante el desplazamiento browniano de las partículas. El método pasa a llamarse entonces *random vortex method*.

Para terminar esta introducción al método DVM, diremos que las opciones del modelador a la hora de construir un modelo de vórtices discretos son las siguientes, que veremos en detalle en el punto siguiente particularizadas al modelo desarrollado en el presente trabajo:

- Seleccionar un determinado modelo de discretización de la vorticidad en vórtices discretos, lo que determinará a su vez la forma del campo de velocidades, vorticidad y gradiente de vorticidad generado por cada vórtice.
- Imponer las condiciones de contorno mediante alguno de los algoritmos disponibles.
- Adoptar un esquema de resolución del movimiento de los vórtices, que deberá incluir el método de integración temporal de las ecuaciones de convección, y un submodelo que permita tener en cuenta la interceptación de los vórtices por los contornos. Opcionalmente, es posible, de cara a lograr un mayor rendimiento del modelo, crear un algoritmo para la optimización del cálculo de las interacciones entre los vórtices.
- Adoptar un submodelo de difusión de los vórtices que reproduzca lo más fielmente posible a un bajo coste computacional la componente difusiva de la ecuación de transporte de la vorticidad.
- Calcular los resultados dinámicos de interés (fuerzas, presiones, etc...) mediante el empleo de alguna de las formulaciones disponibles.

DESCRIPCIÓN DEL MODELO DVM DESARROLLADO

Esquema de discretización de la vorticidad

La representación más sencilla que se puede hacer mediante partículas del campo de vorticidad, se denomina *vórtices-punto* (*Point Vortex*). Es equivalente a considerar que el fluido está formado por vórtices irrotacionales, es decir, vórtices cuya vorticidad está concentrada en un sólo punto –su centro– y, además, es infinita, aunque la circulación del vórtice (resultado de integrar la delta de Dirac en un entorno circular alrededor suyo) sea finita. Fue la primera discretización de la vorticidad planteada a base de partículas lagrangianas, y fue utilizada por Rosenhead para resolver mediante cálculos manuales el movimiento de una estela de vórtices, en fecha tan temprana como 1931³¹.

Según este esquema el campo de vorticidad en un punto de coordenadas $\mathbf{x}_i$ se obtendría por superposición como³¹

$$\zeta(\mathbf{x}_i, t) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j(t)) \quad (8)$$

donde N es el número de partículas, y $\delta(\mathbf{x})$ es la función Delta de Dirac bidimensional. $\mathbf{x}_j(t)$ es la posición de la partícula j en el instante t .

Suponiendo que el flujo no posee contornos interiores y que la vorticidad más allá de una región finita del espacio bidimensional, coincidente con el dominio de cálculo, es nula, entonces la velocidad generada por la vorticidad existente puede expresarse mediante la ley de Biot-Savart, como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_D \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times \zeta(\mathbf{x}_j) \mathbf{k}}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2} d\mathbf{x}_j \quad (9)$$

ecuación que, considerando la expresión de la discretización de la vorticidad (8), se convierte en

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times \Gamma_j \mathbf{k}}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2} \quad (10)$$

Pese a que esta discretización de la vorticidad mediante puntos converge a la solución de las ecuaciones de Euler, se aprecia que la ecuación (10) presenta una singularidad cuando el punto de cálculo se aproxima a la posición de un vórtice ($\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_j$), aproximándose la velocidad a infinito.

Para evitar este inconveniente numérico, se abordan dos cambios en el planteamiento del problema: en primer lugar, la distribución de vorticidad se suaviza y se supone extendida de forma gradual desde el centro del vórtice hacia el exterior, según una distribución $f(\mathbf{r})$. En segundo lugar, como consecuencia, se aumenta el tamaño del vórtice, que puede caracterizarse mediante un radio característico σ , representativo del tamaño del núcleo de la distribución (porción circular donde se concentra la mayor parte de la vorticidad). Esta nueva forma de discretización se denomina *vórtices-burbuja* (*Vortex Blobs*). Los vórtices discretos de distribución suavizada evitan singularidades y facilitan el cálculo de la vorticidad y el gradiente de vorticidad en cualquier punto mediante suma de los campos correspondientes de cada vórtice.

Si expresamos la ecuación (10) mediante una función vectorial $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ que llamamos *kernel*, de tal modo que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) = - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \mathbf{K}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \Gamma_j \quad (11)$$

siendo

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \mathbf{K}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{k}}{r^2} \quad (12)$$

con $\mathbf{r} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ y $r = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$, entonces la suavización del campo de vorticidad se puede llevar a cabo efectuando la convolución entre $\mathbf{K}$ y la función de suavización $f(\mathbf{r})$, dando como resultando un nuevo kernel $\mathbf{K}_\sigma$, controlado exclusivamente por el parámetro de truncamiento σ .

De los numerosos esquemas de suavización y kernels utilizados a lo largo de estas últimas décadas –y que pueden consultarse por ejemplo en el trabajo de Chang⁹–, se ha optado por utilizar el vórtice de Lamb o esquema gaussiano. La razón se encuentra en la mitigación de la velocidad que se produce respecto al esquema de Chorin y Rankine para distancias cortas, resultando idénticas las distribuciones de velocidad a mayores distancias –a partir aproximadamente de dos veces el tamaño del núcleo–. A distancias muy pequeñas, la velocidad es coincidente con la generada por el vórtice de Rankine, pues ambas tienden a cero. La mitigación de la velocidad produce distribuciones de los vórtices menos sujetas a variaciones bruscas.

Imposición de las condiciones de contorno

La descomposición del problema llevada a cabo en el método de vórtices discretos y la estrategia de resolución adoptada tienen como consecuencia que no sea correcto plantear condiciones de contorno matemáticas, es decir establecidas a partir de la formulación del problema, como es usual en el método de elementos finitos o de diferencias finitas.

El único camino posible es tratar de asegurar que las velocidades calculadas cumplen las condiciones reales, para lo cual lo más usual es suponer que el flujo está constituido por diversas componentes que cumplen las condiciones impuestas por construcción (adición)^{54,53}.

En los contornos sólidos la velocidad ha de ser nula. Esta condición se divide en dos: tanto en flujos invíscidos como en viscosos no existe penetración del flujo (velocidad normal al contorno); en flujos viscosos, además, no existe deslizamiento (velocidad tangencial al contorno).

En el contorno de entrada al dominio se impone una distribución de velocidades dada (por ejemplo una velocidad uniforme, aunque sería posible adoptar una capa límite atmosférica expresada mediante una ley potencial). A esta ley de velocidades la denominaremos *flujo imperturbado*.

Esta forma de proceder tiene como consecuencia que no sea necesario imponer condiciones de contorno en los contornos exteriores, ya que, de hecho, éstos no tienen por qué existir. Su presencia se justifica únicamente para acotar el dominio de cálculo. Es decir, el cálculo no se lleva más allá de éste, y su influencia sólo se traduce en un truncamiento de los cálculos, que será despreciable si el dominio se establece con la condición de englobar la práctica totalidad de la zona de flujo perturbada por el objeto de estudio, es decir, la práctica totalidad de la vorticidad del flujo.

Un avance importante en el problema de la imposición de las condiciones de contorno en el método DVM lo constituyó la demostración, por parte de Spalart⁴⁸, de la suficiencia de imponer una única condición en los contornos. Imponer no deslizamiento garantiza no penetración y viceversa. La idea intuitiva que se esconde detrás de esta afirmación consiste en que el sólido puede idealizarse como una porción de fluido irrotacional en reposo donde se cumple la ecuación de Laplace del potencial. Si garantizamos que una componente de la velocidad es nula, entonces la otra componente también lo será.

La forma más común de resolver el problema es, entonces, imponer la condición de no penetración o no deslizamiento mediante un flujo potencial ficticio situado en los contornos sólidos que anule las velocidades normales o tangenciales existentes. El método que proponemos, basado en el trabajo de Walther⁵², anula la velocidad normal empleando la técnica de paneles (véanse los trabajos de Banerjee³ o Katz²⁶), ya que no se imponen limitaciones en cuanto a la geometría del contorno del objeto a modelar. Además de las ventajas que este método conlleva para flujo potencial estacionario, y que son ampliamente conocidas, existe una ventaja adicional en el caso de flujo rotacional transitorio: la dependencia temporal, que supone imponer las condiciones de contorno al inicio de cada intervalo, conlleva un coste computacional mínimo, ya que la formulación de las ecuaciones depende únicamente de la geometría del problema, que es invariable en el tiempo.

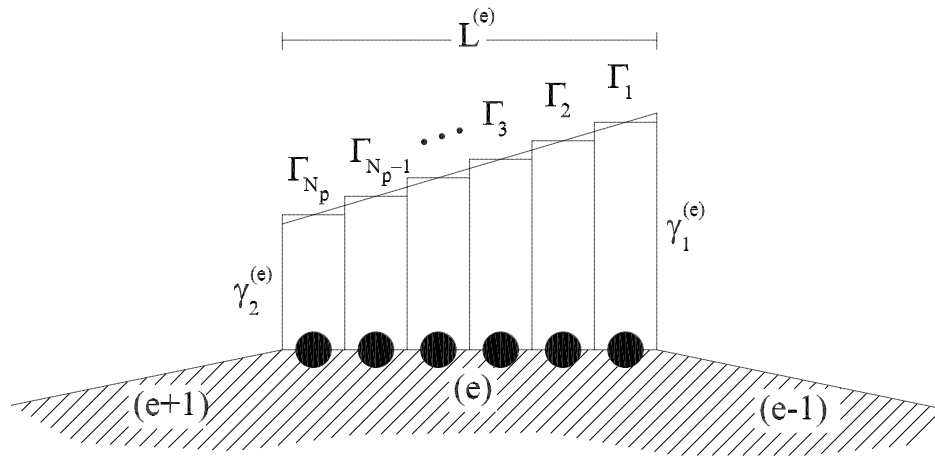


Figura 1. Esquema del proceso de discretización de la vorticidad del contorno en vórtices discretos

El flujo potencial ficticio que hemos utilizado está formado por vórtices irrotacionales. Se ha optado por incorporar variación lineal de la distribución buscada.

La velocidad normal al contorno inducida por la vorticidad del contorno en los puntos de control situados en el centro de cada panel i ha de cumplir:

$$u_{ni} = -(\mathbf{u}_{inf}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{u}_{vort}(\mathbf{x}_i)) \cdot \mathbf{n}_i \quad (13)$$

$\mathbf{u}_{inf}(\mathbf{x}_i)$ es la velocidad del flujo imperturbado o flujo de aproximación, admitiéndose una ley constante (con ángulo de ataque variable), o una ley lineal o parabólica (con ángulo de ataque nulo). $\mathbf{u}_{vort}(\mathbf{x}_i)$ es la velocidad inducida en el punto de control i por los vórtices inmersos en el seno del fluido. $\mathbf{n}_i$ es el vector unitario normal al contorno en el panel i . Estas ecuaciones permiten hallar la distribución en el contorno buscada mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineal indeterminado, dado que hay que añadir como ecuación que la vorticidad total en el dominio ha de ser cero en cada instante.

Una vez obtenida la distribución de vorticidad, es inmediata su discretización en vórtices discretos. De este modo, dado un panel cualquiera (e) de longitud $L^{(e)}$, y suponiendo que la vorticidad se distribuye linealmente entre los valores en sus extremos $\gamma_1^{(e)}$ y $\gamma_2^{(e)}$, es posible crear N_p vórtices ubicados sobre el panel, dotados de una circulación de valor:

$$\Gamma_i = \left(\gamma_1^{(e)} + \left(\gamma_2^{(e)} - \gamma_1^{(e)} \right) \frac{i - 1/2}{N_p} \right) \frac{L^{(e)}}{N_p} \quad i = 1, \dots, N_p \quad (14)$$

Estos vórtices sufrirán una difusión inicial según el algoritmo de difusión que veremos seguidamente y, posteriormente, una vez dentro del seno del fluido, sufrirán convección y difusión según el esquema general de todo modelo de vórtices discretos. En la Figura 1 se muestra una distribución de vórtices discretos generada en un panel representativo (e) .

Mediante la simple representación gráfica de la distribución de vorticidad que genera una distribución dada de vórtices ubicados en su posición de partida sobre un panel, se ha detectado que para que la distribución de vorticidad en el contorno producida por la discretización en vórtices discretos sea lo más similar posible a la distribución continua de partida, el radio del núcleo de los vórtices debe ser como mínimo la mitad del espaciamiento entre vórtices, siendo preferible que sea igual al espaciamiento $(L^{(e)}/N_p)$.

Las ideas que dieron pie a la condición de contorno unificada no han sido óbice para que algunos investigadores sigan aplicando condiciones de contorno sobre las dos componentes de la velocidad. Algunos de ellos –citamos el trabajo de Ni³⁵, exclusivamente teórico– han intentado unificar las dos condiciones sin dejar de imponer ninguna de ellas, mediante el

empleo del método de paneles con el uso conjunto de fuentes de potencial y vórtices como flujos elementales. El aumento del número de incógnitas se compensa con el número de ecuaciones, dado que en cada punto de control se establece ahora velocidad normal nula y velocidad tangencial nula. Pruebas preliminares efectuadas por nosotros empleando una formulación equivalente a la de Ni han demostrado que el empleo simultáneo de ambas condiciones en un método de paneles produce resultados incorrectos, a menos que, como hacen Rouvreau y Perault⁴², se restrinjan las velocidades generadas por ambas distribuciones a únicamente velocidad normal para las fuentes de potencial y únicamente velocidad tangencial para los vórtices irrotacionales.

Resolución del movimiento de los vórtices

La operación fundamental del método de vórtices discretos, y la que diferencia claramente a esta técnica del resto de metodologías de simulación de fluidos, es el cálculo de las interacciones entre los vórtices según la ecuación (11). Por interacción entendemos la velocidad inducida en un vórtice por otro vórtice.

No obstante, esta característica es también uno de los inconvenientes del método. Debido al hecho de que cada uno de los N vórtices interactúa con los $N-1$ restantes, es fácil deducir que el número de operaciones a realizar aumenta de forma exponencial conforme el número de vórtices aumenta, o lo que es lo mismo, el orden de magnitud del número de operaciones del cálculo es $\mathcal{O}(N^2)$.

Piénsese que todas las interacciones han de calcularse para cada instante de tiempo. Además, debido al hecho constatable de que la ley de Biot-Savart decae lentamente, no es posible obviar sin más la interacción entre vórtices lejanos sin una merma apreciable en la precisión del método.

Así pues, pese a la cada vez más asequible potencia de cálculo de los equipos actuales, es usual incluir un modelo que evite tener que calcular la totalidad de las interacciones entre los vórtices presentes en el flujo en cada paso de tiempo.

Los principales métodos disponibles son:

- Método “Vortex-In-Cell” (VIC): surgido en el campo de la simulación del plasma—donde es conocido como “Cloud-In-Cell”—fue aplicado por primera vez dentro de un método de vórtices por Christiansen¹³. Este método solventa el inconveniente derivado del elevado coste del cálculo de las interacciones recurriendo a una forma alternativa para cuantificar la influencia entre vórtices, como es la ecuación de Poisson que relaciona la vorticidad y la función de corriente:

$$\nabla^2 \psi = -\zeta \quad (15)$$

Estos métodos requieren el uso de una malla de celdas regular.

- Método de correcciones locales: La filosofía del método de correcciones locales es simple: aunque la obtención de las velocidades de las partículas se acometa mediante procedimientos basados en la resolución de la ecuación de Poisson en el dominio completo del problema, es posible mejorar la simulación si tenemos en cuenta la influencia directa de los vórtices cercanos mediante el empleo de la ley de Biot-Savart. Puesto que el número de vórtices cercanos es mucho menor que el número total, el número de operaciones no viene dominado por las correcciones, manteniéndose en todo momento en unos límites mucho más bajos que en el método de la suma directa. El primero que planteó esta técnica fue Hockney, quien, a partir de trabajos preliminares, presentó en ²⁴ la implementación del método—que él denomina *PPPM*, es decir, *Particle-particle/particle-mesh*—a la resolución de interacciones culómbicas en dos dimensiones dentro del campo de la simulación de plasma.
- Métodos de agrupamiento o de descomposición zonal: La clave de estos procedimientos radica en la técnica de agrupamiento de partículas, que consiste a grandes rasgos en suponer que el efecto de un grupo de partículas sobre un punto suficientemente alejado puede aproximarse de tal forma que se requiera un cálculo menos costoso que

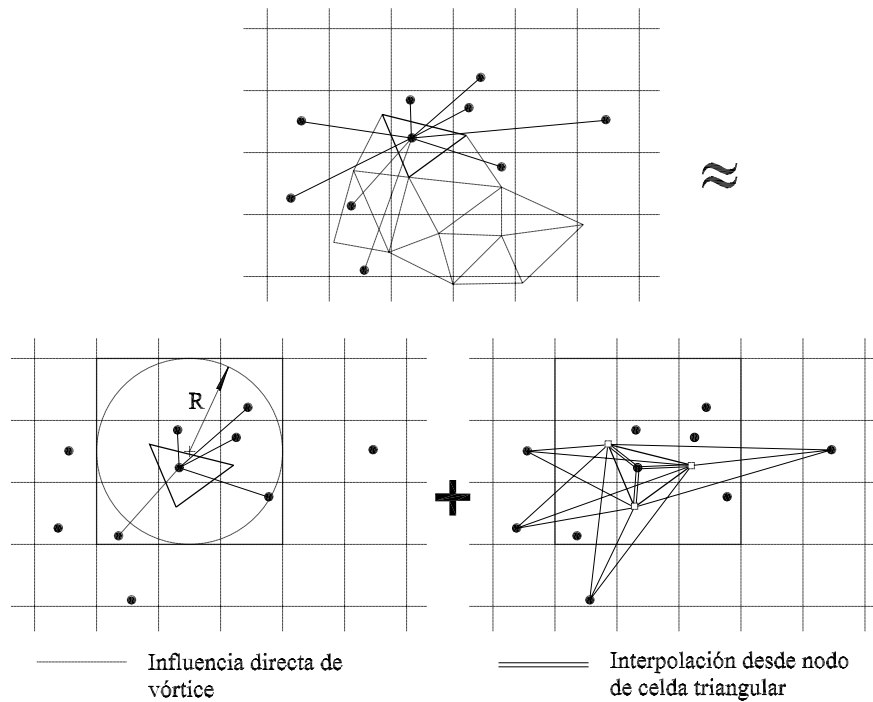


Figura 2. Esquema del método de correcciones locales incorporado al modelo

la suma directa de las interacciones de todos los elementos del grupo sobre ese mismo punto. No requieren mallas de cálculo, aunque sí jerarquías de celdas anidadas para formar los grupos. El principal método de agrupamiento es el de expansión multipolar, desarrollado por Greengard y Rokhlin²³, y Carrier et. al.⁸, utilizando un fundamento teórico similar al empleado por Spalart y Leonard⁴⁷.

En nuestro modelo se ha evitado utilizar un método de agrupamiento por su mayor complejidad. A su vez, el método “Vortex-In-Cell” se ha desestimado de entrada para evitar así introducir difusión artificial que anule la elevada resolución del movimiento convectivo propia de los métodos DVM.

De este modo, se ha optado por implementar una versión modificada del método de correcciones locales. Primeramente se limita el cálculo de las interacciones directas a una región alrededor del punto en el que se pretende calcular la velocidad, que hemos denominado *Región de interacción directa*, de tamaño representativo R_i , el *radio de interacción directa*. Posteriormente, con el fin de tener en cuenta la influencia de los vórtices fuera de esta región, se cuenta con una malla en cuyos nodos se conoce la velocidad exacta. Sustrayendo la influencia directa de los vórtices situados dentro de la región de interacción directa, en los nodos del elemento que contiene el punto de cálculo, se obtienen las velocidades corregidas, cuya interpolación lineal en el punto de cálculo constituye el efecto aproximado de los vórtices lejanos. Para una aclaración del método, véase la Figura 2.

Como principales rasgos diferenciadores del método propuesto respecto a los primeros métodos de correcciones locales aplicados al método DVM, desarrollados por Anderson¹ y Baden y Puckett², tenemos:

- En lugar de una malla regular de celdas cuadrangulares, se utiliza una malla no estructurada formada por triángulos de tres nodos, facilitándose su adaptación a geometrías complejas de forma sencilla. Como consecuencia, el cálculo se limita al dominio definido por esta malla.

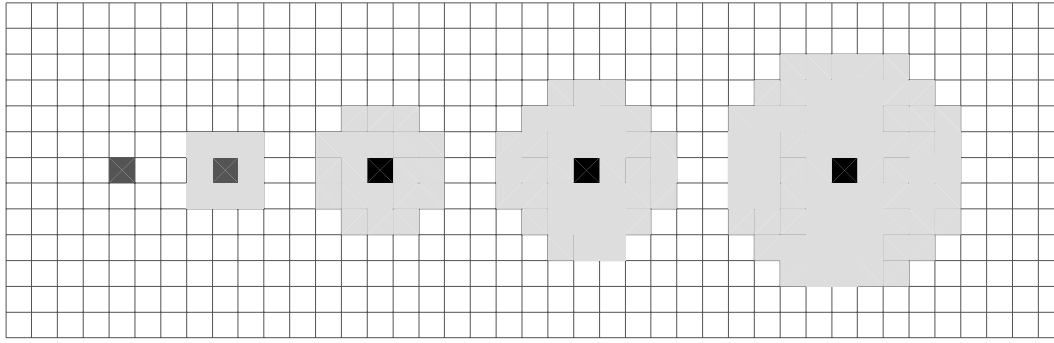


Figura 3. Regiones de interacción directa para alcances 0, 1, 2, 3 y 4

- Los valores nodales exactos no son calculados usando alguno de los métodos disponibles para la resolución de la ecuación de Poisson (15), sino mediante la interacción directa de la totalidad de los vórtices. Aunque este procedimiento aumenta el coste computacional, permite valores nodales más exactos. El ahorro en coste computacional está garantizado siempre que dentro de cada celda exista un número suficientemente alto de vórtices.

La interpolación desde los valores nodales se efectúa haciendo uso de las denominadas funciones de forma del elemento. Con el fin de identificar los vórtices cercanos a un punto, se ha utilizado el método de la lista enlazada de Hockney²⁴. Para ello, se ha superpuesto en todo el dominio de cálculo una malla regular de celdas cuadradas, denominadas *zonas*. Cada zona lleva aparejada una lista de los vórtices que recaen en la misma. De este modo, la región de interacción directa se define en esta malla de zonas, por lo que en la práctica dicha región posee un contorno discretizado, tendente a un círculo al aumentar el radio de interacción directa.

Se define así el *alcance* A_i , como el radio, cuantificado en número de zonas, que define la región de interacción directa discretizada. En la Figura 3 se muestran las regiones de interacción directa correspondientes a alcances de cero a cuatro.

De forma complementaria, la malla de elementos triangulares se utiliza también para detectar los vórtices que han salido del dominio de cálculo o se han introducido en el cuerpo sólido, ya que éstos no pueden ser asignados a ningún elemento. Los vórtices que escapan del dominio son eliminados sin más del proceso y no intervienen en los posteriores cálculos. Lo mismo ocurre con los vórtices que penetran en el contorno, por lo que se puede decir que se ha adoptado un algoritmo de absorción sin redistribución de vorticidad.

Respecto al esquema de integración temporal, se ha optado por utilizar el esquema de Euler, por su capacidad para mitigar la tendencia del random-walk a quebrantar la simetría del flujo en etapas tempranas de la simulación y por su mayor sencillez de implementación. El intervalo de cálculo adimensional utilizado ha sido:

$$T^* = \frac{t U}{D} = 0,02 \quad (16)$$

que es de uso generalizado en todos los modelos DVM.

Cálculo de la difusión de los vórtices

Como dijimos al principio, el método más ampliamente utilizado para simular la difusión de la vorticidad en los modelos de vórtices discretos se basa en la equivalencia entre la solución de la ecuación de difusión y el movimiento de un conjunto infinito de partículas sometidas a un movimiento browniano (es decir, con función de probabilidad de Gauss). El método fue utilizado por primera vez en este campo por Chorin¹¹. Como principal ventaja, cabe destacar el hecho de representar la difusión de forma sencilla mediante un desplazamiento de las partículas formulable en sentido lagrangiano.

El esquema se materializa de la siguiente forma. Sea $\mathbf{x}_i^t$ la posición del vórtice i en el instante t . Entonces la posición de dicho vórtice tras la difusión se determina según:

$$\begin{cases} x_i^{t'} = x_i^t + \eta_x \\ y_i^{t'} = y_i^t + \eta_y \end{cases} \quad (17)$$

donde η_x y η_y son variables aleatorias con distribución normal, de media cero y varianza $2\nu\Delta t$.

Los modelos de vórtices discretos que utilizan esta técnica de simulación de la difusión son conocidos como *RVM* (*Random Vortex Methods*).

No obstante su amplio uso, de cara a la implementación de nuestro modelo se ha optado por utilizar una combinación del modelo de difusión de Ogami y Akamatsu³⁷ (velocidad de difusión), y del método RVM, despreciando los otros métodos existentes, que requieren el empleo de mallas.

La velocidad de difusión $\mathbf{u}_d$ se define como:

$$\mathbf{u}_d = -\frac{\nu}{\zeta} \nabla \zeta \quad (18)$$

Entonces la ecuación diferencial que rige el movimiento de los vórtices se reduce a la componente convectiva, considerando la velocidad compuesta por la velocidad real más la velocidad de difusión:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla [(\mathbf{u} + \mathbf{u}_d) \zeta] = 0 \quad (19)$$

La principal ventaja del método de la velocidad de difusión radica en el hecho de que se trata de un modelo determinista derivado de las ecuaciones de transporte de vorticidad, y que por tanto no produce resultados aleatorios. Otra ventaja del método consiste en su sencilla implementación dentro del modelo general, debido a dos razones principalmente:

- Los valores de vorticidad y gradiente de vorticidad necesarios para calcular la velocidad de difusión de un vórtice son calculados por simple adición de los campos de vorticidad y gradientes de los vórtices circundantes, cuyo valor conocemos según la discretización adoptada.
- Una vez calculada la velocidad de difusión, el movimiento difusivo se resuelve dentro del mismo esquema de resolución del movimiento convectivo, dado que se admite que la difusión es una componente de la convección.

La principal desventaja del método estriba en que cuando la vorticidad alcanza valores bajos –como puede ser el caso de un vórtice de baja circulación en una zona poco poblada de partículas– la velocidad de difusión crece hasta valores desmesuradamente altos. Esto es consecuencia de la existencia de una singularidad evidente en la definición de la velocidad de difusión.

En nuestro modelo proponemos solventar este inconveniente acotando superiormente el desplazamiento debido a la velocidad de difusión, utilizando para ello el valor de la varianza del *random-walk* que define el desplazamiento difusivo en el método RVM. De este modo, obligando a que el desplazamiento difusivo sea como máximo cinco veces la varianza del *random-walk* correspondiente, tenemos:

$$|\mathbf{u}_d| \leq \frac{5}{\Delta t} (2\nu\Delta t) \quad (20)$$

Sin embargo el principal inconveniente del método consiste en que la velocidad de difusión es nula cuando el espaciamiento entre vórtices crece por encima de un valor dado. Contrariamente a lo que podría pensarse, esto ocurre en muchas zonas del flujo, si el número de partículas no es suficientemente alto. Debido a este hecho es por lo que se ha implementado un método combinado, de tal manera que cuando esta velocidad de difusión desciende en módulo por debajo de un valor dado, se activa como mecanismo de difusión la adición de un *random-walk* a la trayectoria de las partículas (método RVM).

Cálculo de fuerzas aerodinámicas

Puesto que el principal resultado de interés en las simulaciones a llevar a cabo va a consistir en la obtención de la fuerza total ejercida sobre el objeto modelado (el empuje y la sustentación sobre la sección transversal de un tablero de puente), se ha implementado únicamente el cálculo de las fuerzas totales, no previéndose la obtención de la distribución de presiones sobre la superficie del sólido.

En flujo externo es posible demostrar, utilizando el teorema de cantidad de movimiento aplicado a un volumen de control suficientemente alejado del contorno sólido y extrayendo éste del volumen mediante un entrante, que la fuerza ejercida por el fluido sobre dicho contorno sólido es:

$$\mathbf{F} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV \quad (21)$$

Utilizando la identidad vectorial en dos dimensiones siguiente⁴³,

$$\int_V \mathbf{r} \times \nabla \times \mathbf{a} dV = \int_V \mathbf{a} dV - \int_A \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) dA \quad (22)$$

donde $\mathbf{r}$ es el radiovector al origen y $\mathbf{a}$ es un campo vectorial cualquiera, es inmediato expresar la ecuación (21) en función de la vorticidad como:

$$\mathbf{F} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho (\mathbf{r} \times \zeta) dV \quad (23)$$

expresión denominada *Ecuación de impulso de vorticidad*, ya que se sustituye la cantidad de movimiento del fluido (función de la velocidad), por el impulso en función de la vorticidad (integrando de (23)). El *Impulso* o *Impulso hidrodinámico* es el equivalente a la cantidad de movimiento en flujos no limitados por contornos exteriores, es decir, flujos externos, donde las integrales de velocidad no tienen por qué ser absolutamente convergentes.

Spalart y Leonard⁴⁷ y Koumoutsakos y Leonard²⁹ hacen uso de esta expresión para contrastar la fuerza total obtenida por integración de las presiones. En nuestro trabajo, como hemos avanzado, se ha empleado como estrategia principal. Utilizando la discretización de la vorticidad en vórtices, la ecuación queda

$$\mathbf{F} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho (\mathbf{r} \times \zeta) dV = -\rho \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \mathbf{x}_j \times \mathbf{k} \quad (24)$$

La derivada temporal se calcula utilizando un esquema en diferencias atrasadas de primer orden. El empleo de esta técnica arroja resultados altamente fluctuantes.

La principal desventaja del método es que, desafortunadamente, no existe una expresión similar a (23) para el momento de las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo, pese a que Spalart y Leonard⁴⁷ presentan como expresión equivalente, la siguiente:

$$M = -\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_V \rho r^2 \zeta dV \quad (25)$$

que, hasta lo que ha alcanzado nuestra revisión del estado de la técnica, no ha sido utilizada de nuevo desde esa fecha (1981) en un modelo de vórtices discretos.

De hecho, acudiendo a Saffman⁴³, se concluye que la expresión correspondiente al impulso angular de un flujo ilimitado es:

$$\mathbf{I}_\alpha = \int \mathbf{r} \times \nabla \times \mathbf{f} dS = -\frac{1}{2} \int r^2 \zeta dS \quad (26)$$

donde $\mathbf{f}$ es la fuerza ejercida sobre el fluido.

La variación temporal de este impulso angular es de nuevo el momento de las fuerzas presentes considerando un contorno suficientemente alejado. El problema es que esta aseveración únicamente se demuestra para contornos de forma circular y sin entrantes, no útiles por tanto para reproducir contornos sólidos.

La obtención del momento requeriría necesariamente la obtención de la distribución de presiones, por lo que la implementación de su cálculo se deja para futuras versiones del modelo que contemplen la obtención de las presiones sobre el contorno del cuerpo modelado.

APLICACIÓN DEL MODELO A LA SIMULACIÓN DE FLUJOS ALREDEDOR DE CILINDROS DE GEOMETRÍA SIMPLE

El estudio de los resultados arrojados por el modelo en la simulación del flujo a su paso por cuerpos prismáticos de geometría sencilla resulta extremadamente útil con vistas a comprobar cuantitativamente la capacidad del modelo para reproducir las características de un flujo real, dado que para estos casos se dispone de un gran número de datos experimentales con los que comparar los resultados del modelo. Por otra parte, son casos de flujos que han sido frecuentemente utilizados como casos de validación por los autores de diferentes modelos DVM, con lo que también se hace posible la comparación con los resultados obtenidos por otros modelos numéricos similares al desarrollado en el presente trabajo.

Además, mediante estas pruebas es posible seleccionar una configuración del modelo y estudiar, mediante un análisis de sensibilidad, la influencia que los parámetros del modelo tienen en los resultados obtenidos.

Para la consecución de este objetivo se ha optado por emplear flujos a corto plazo, dado que nos encontramos con estructuras muy estables, documentadas de forma detallada en numerosos trabajos de investigación, con resultados tanto numéricos como experimentales. En concreto se ha utilizado el flujo a su paso por un cilindro circular con números de Reynolds bajos o moderados, en sus instantes iniciales, antes por tanto de la aparición de las inestabilidades propias del flujo.

Posteriormente, con el objetivo de comprobar la capacidad del modelo para simular flujos complejos, se han simulado las características y estructura de flujos a largo plazo, acometiéndose la simulación de flujos tanto a bajos Re (a su paso por un cilindro circular), como a Re moderadamente altos (cilindros cuadrangulares de generatriz cuadrada bajo diferentes ángulos de ataque y generatriz rectangular con distintos coeficientes de forma).

Calibración y análisis de sensibilidad del modelo mediante simulación de flujos a corto plazo

Entre las principales aplicaciones del modelo de vórtices discretos a la simulación del flujo alrededor de un cilindro circular se debe comenzar citando el que es sin duda el trabajo más referenciado en este campo: Chorin¹¹, en 1973, presenta un trabajo pionero en la exposición sistemática y ya completamente aplicada del método, después de trabajos más teóricos como los de Wu y Thompson⁵⁴. En él se introducen por primera vez técnicas que han tenido amplia repercusión, como la función de suavización o el método RVM para modelar la difusión, junto con otras menos empleadas, como el método de láminas vorticales para imponer las condiciones de contorno.

Smith y Stansby⁴⁶ simulan el flujo en estudio mediante vórtices-punto para valores de Re de 300, 550, 3.000 y 9.500. Para agilizar el cálculo de las interacciones utilizan el método VIC adaptado a una malla regular en coordenadas polares dispuesta alrededor del cilindro, resolviendo la ecuación de Poisson mediante la transformada rápida de Fourier. La difusión es modelada mediante la técnica del Random-Walk. Las fuerzas son obtenidas mediante integración de las presiones, calculadas en función del gradiente en dirección radial de la vorticidad en el contorno.

Cottet¹⁵ simula el flujo alrededor de un cilindro utilizando el método VIC y un modelo determinístico para resolver la difusión de la vorticidad, basado en permitir que la circulación de las partículas pueda evolucionar según la resolución aproximada de la ecuación

de difusión basada en la distribución de partículas que existe en un determinado momento superponiendo una malla en coordenadas polares en las cercanías del contorno.

Chang y Chern¹⁰ utilizan un método híbrido para reproducir el flujo alrededor de un cilindro para un espectro amplio de números de Reynolds (entre 300 y 10^6). De cara a la discretización de los vórtices se adopta una función discreta muy sencilla (vorticidad dentro del núcleo constante y nula en el exterior). La convección la resuelven mediante el método VIC, mientras que la difusión es resuelta utilizando diferencias finitas, en ambos casos utilizando una misma malla en coordenadas polares. De cara al método VIC, la ecuación de Poisson es así mismo resuelta también en diferencias finitas.

El trabajo de Clarke y Tutty¹⁴ se caracteriza entre otros aspectos por emplear una combinación del método RVM y del método de la velocidad de difusión a la hora de modelar la difusión de vorticidad. Así mismo destaca el empleo del método de paneles con singularidades tipo vórtice utilizado para imponer no deslizamiento; como novedad destaca el empleo de elementos con curvatura cuadrática y distribución de vorticidad lineal. El cálculo de las interacciones entre vórtices –con estructura gaussiana– es optimizado mediante el empleo de técnicas de descomposición zonal (en concreto el modelo de Van Dommelen y Rundensteiner¹⁸).

Koumoutsakos y Leonard²⁹ acometen simulaciones de alta resolución empleando un método de vórtices discretos con un número de vórtices muy elevado (del orden de 10^6), empleando un método de agrupamiento basado en el trabajo de Greengard y Rokhlin²³. La condición de no deslizamiento que se implementa es la desarrollada en el trabajo de Koumoutsakos, Leonard y Pepin³⁰, caracterizada por asociar la circulación obtenida en el contorno a un flujo de vorticidad en dirección radial, que actúa sobre las partículas cercanas haciendo variar su intensidad.

Walther⁵² diseña un modelo de vórtices discretos muy enfocado a su aplicación práctica en el análisis aeroelástico de tableros de puentes, aunque como método de calibración de los diferentes parámetros que intervienen (intervalo temporal, tamaño del núcleo, algoritmo de detención) se incluye la simulación del flujo a su paso por un cilindro circular (estático y en rotación), en el primer caso a números de Reynolds de 200, 3.000 y 9.500. El modelo utiliza un Random-Walk para simular la difusión y un esquema de primer y segundo orden, a elección, de cara a la integración del movimiento de los vórtices –de estructura gaussiana–, cuyas interacciones son calculadas utilizando un método de descomposición zonal. Como algoritmo de creación de vorticidad emplea la condición de contorno unificada. A diferencia de los trabajos vistos hasta ahora, se impone no penetración utilizando un método de paneles con singularidades tipo vórtice y distribución lineal. Las fuerzas son calculadas por integración de las presiones, así como mediante el empleo de la ley de conservación de cantidad de movimiento. La fricción es calculada por diferencia entre ambos resultados.

Como ejemplo de modelo que conserva las dos condiciones de contorno en velocidad, podemos citar en primer lugar a Mustto y Bodstein³⁴, quienes utilizan vórtices-burbuja tipo Lamb, Random-Walk para la difusión y un esquema de integración de primer orden (Euler). El modelo satisface no penetración construyendo un flujo potencial mediante un dipolo y el método de las imágenes. La condición de no deslizamiento se impone estableciendo nula la velocidad tangencial en $N - 1$ puntos del contorno. No se emplea ningún algoritmo para el cálculo eficiente de las interacciones entre vórtices.

Kim y Flynn²⁷ simulan el flujo alrededor de un cilindro utilizando un algoritmo de expansión multipolar y el esquema de generación de láminas vorticales de Chorin. Para la difusión se utiliza un Random-Walk, mientras que la condición de no penetración es impuesta utilizando un método de paneles a base de fuentes de potencial.

Ploumhans y Winckelmans⁴⁰ presentan algunas contribuciones novedosas al método, entre las que cabe destacar la incorporación de transformaciones del dominio para llevar a cabo simulaciones con resolución no uniforme.

De entre las más recientes aplicaciones del método, citaremos el trabajo de Rouvreau y Perault⁴², quienes simulan el flujo a su paso por un cilindro circular usando un método determinístico basado en la resolución de la ecuación del calor. Estos autores imponen explícitamente velocidad normal nula a través de una serie de fuentes de potencial dis-

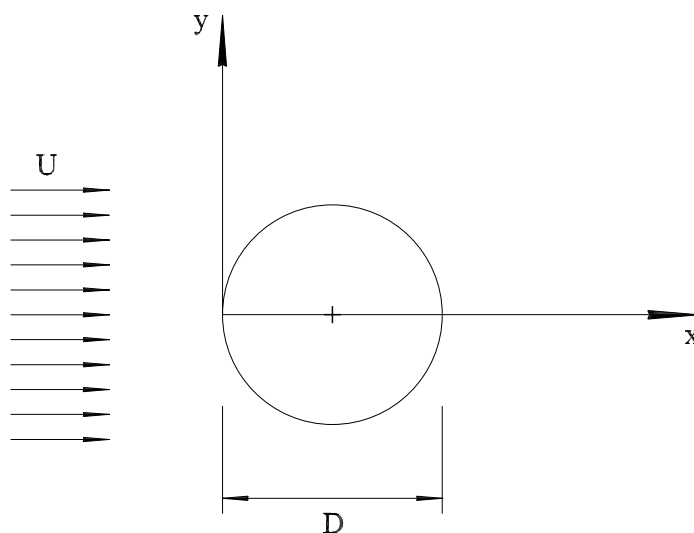


Figura 4. Esquematzación del flujo alrededor de un cilindro circular

tribuidas en el contorno, las cuales no inducen velocidad tangencial (esta componente es generada exclusivamente por medio de la distribución de vórtices discretos). De este modo, estos autores evitarían los problemas comentados anteriormente a la hora de imponer velocidad normal y tangencial nulas de forma simultánea mediante distribuciones conjuntas de vórtices y fuentes de potencial en el contorno, como ya adelantamos.

Entrando ya en la sistemática del trabajo realizado, la calibración y posterior análisis de sensibilidad del modelo se ha abordado mediante la simulación del flujo a su paso por un cilindro circular con números de Reynolds 550 y 3.000, con la esquematización y sistema de coordenadas mostrados en la Figura 4.

El cilindro posee una generatriz circular de 0,5 m de diámetro. Con vistas al cómputo del tiempo se han empleado valores adimensionales de tiempo, de expresión:

$$T^* = \frac{t U}{D} \quad (27)$$

donde D es una dimensión característica del sólido. Como límite del corto plazo se ha adoptado $T_{final}^* = 5$, que es el valor que encontramos en los trabajos consultados. La razón de esta elección estriba en que a partir de este valor de tiempo el flujo se vuelve inestable, lo que conllevaría una alta variabilidad en las condiciones reales del flujo, difícil de sistematizar de cara a comparaciones con las que obtener el error del modelo.

Los análisis llevados a cabo han contemplado los siguientes casos:

1. Estudio de la influencia del radio de interacción directa, R_i .
2. Estudio de la influencia del número de vórtices introducidos en el flujo, a través de la variable N_p .
3. Estudio de la influencia del intervalo temporal de resolución, ΔT^* .
4. Estudio de la influencia del radio del núcleo de los vórtices, σ .

Este estudio presupone, a raíz de lo establecido en la descripción de las componentes del modelo, unos valores considerados *adecuados* para algunos parámetros, que son los que exponemos aquí:

$$\Delta T_0^* = 0,02 \quad , \quad \sigma_0 = \frac{L^{(e)}}{N_p} \quad (28)$$

Sin embargo, para otros parámetros, se ha adoptado como valor base el que suponga menos simplificaciones; es el caso de R_i , donde adoptaremos:

$$R_{i0} = \infty \quad (29)$$

valor que se limitará en la práctica a la mitad de la longitud de la diagonal del dominio de cálculo.

Por último, para N_p , se ha adoptado un valor base que estimamos suficiente a priori, igual a 10, sin recurrir a ninguna justificación teórica para ello.

La principal conclusión a obtener respecto a la comparativa 1 es que, para ambos números de Reynolds, aunque sobre todo para $Re=550$, el error cometido al utilizar el método de correcciones locales no difiere considerablemente respecto al cometido extendiendo el cálculo de las interacciones a la totalidad del dominio de cálculo, no existiendo diferencias significativas entre utilizar un radio de interacción u otro. Se puede concluir que un radio de interacción tan pequeño como el 6 % de D funciona bien (en el resto de comparativas se ha adoptado en todos los casos el método de correcciones locales con un alcance $A_i=0$).

El ahorro de tiempo empleando el método de correcciones locales es considerable, reduciéndose el tiempo de cálculo hasta un valor igual al 15 % del tiempo empleado con el método exacto. Al pasar de un alcance de 4 a 2, la reducción del tiempo de cálculo es proporcional a la reducción del radio del círculo de interacción (60 %). Al disminuir el alcance más allá de este valor (al pasar de un alcance de interacción directa de 2 a 0), el tiempo de cálculo se reduce a la mitad, mientras que el radio de interacción se ha reducido a la quinta parte. Esto viene a demostrar que la eficiencia en la reducción del coste computacional va bajando conforme disminuye el radio de interacción directa, y además que el ahorro conseguido no es en modo alguno proporcional a la disminución del área de la región de interacción directa.

El número de vórtices final es independiente del radio de interacción directa empleado para ambos números de Reynolds. Se comprueba así mismo que el tiempo de cálculo utilizando el método de correcciones locales es sensiblemente proporcional al número de vórtices presentes en el flujo, que es la principal cualidad que debe poseer un método eficiente de cálculo de las interacciones entre vórtices, lo que entronca con la siguiente comparativa.

Así, respecto a la comparativa 2, se concluye que al aumentar el número de vórtices creados por panel aumenta de forma importante –y obvia por otra parte– el número de vórtices final presente en el flujo, aunque el error de la simulación prácticamente se mantiene en los mismos valores que con el número de vórtices inicial. En el sentido contrario, al disminuir el número de vórtices creados por panel, el número de vórtices final baja considerablemente, y el error relativo aumenta de forma importante, sobre todo para los instantes finales de la simulación con $Re=3.000$. Esto podría significar que al aumentar el número de Reynolds se hace necesario un mayor número de vórtices para reproducir convenientemente el flujo. Se aprecia por otra parte una ligera reducción en la magnitud de las fluctuaciones con un menor número de vórtices, aunque las diferencias finales en la estimación de la evolución del coeficiente de empuje son prácticamente nulas para todos los casos.

Por otra parte, la principal consecuencia derivada de la adopción de un intervalo temporal más corto o más largo es que las fluctuaciones del coeficiente de empuje aumentan o disminuyen respectivamente muy notablemente, encontrándose desviaciones apreciables del valor filtrado en este último caso para $Re=3.000$ respecto a los resultados numéricos con los que se ha comparado.

Aunque las conclusiones en cuanto al error cometido en la estimación de las velocidades a sotavento no coinciden para ambos Re , podemos concluir que el intervalo temporal adoptado de partida (0,02) no es el peor en ningún caso y además coincide con las recomendaciones de la mayoría de los trabajos de investigación consultados, aunque no podamos exponer un argumento teórico ni experimental que sustente dicha elección.

Por último, respecto a la comparativa 4, el error de las simulaciones apenas difiere del obtenido en la simulación base empleando un radio del núcleo mayor o menor. Además, el número de vórtices final y el tiempo empleado en el cálculo no dependen del radio del núcleo. La gráfica del coeficiente de empuje presenta fluctuaciones más mitigadas con radios del núcleo mayores, mientras que las fluctuaciones aumentan con radios más pequeños. Pese a la aparente ventaja que podría conllevar fluctuaciones menores, se ha desechado aumentar

σ en vista del error en la gráfica de C_d en los instantes finales, además de que la reducción de las fluctuaciones no es excesiva.

En todo caso, es de destacar la escasez de grados de libertad que posee el modelo, así como la notable insensibilidad que presenta ante variaciones en los valores de los parámetros, lo que demuestra la robustez de este tipo de modelos, siempre que no se introduzcan submodelos más sofisticados (por ejemplo para simular la difusión).

Admitiendo como óptima la configuración del modelo mencionada, se muestran a continuación los resultados más destacados de las simulaciones.

En la Figura 5 se muestra la distribución de velocidades horizontales a sotavento del cilindro obtenida con el modelo para $Re=550$ (caso CC0550A4), comparada con los resultados experimentales de Bouard y Coutenceau⁷. En la Figura 6 se muestra para este mismo caso la evolución del coeficiente de empuje (el coeficiente de sustentación es nulo por simetría), junto con el valor filtrado ($n=10$) y los resultados numéricos de Koumoutsakos y Leonard³⁰ y Chang y Chern¹⁰.

En las Figuras 7 y 8 se observan las líneas de corriente obtenidas con el modelo para $T^*=3$ y $T^*=5$, respectivamente, en las que se aprecia perfectamente cómo el modelo ha sido capaz de reproducir el fenómeno de protuberancia y el fenómeno de vórtice secundario, descritos por Bouard y Coutenceau en 1980⁷, y cuyos esquemas son mostrados en las mismas figuras. Este trabajo experimental, que ha servido de referencia desde entonces, tuvo como principal mérito haber logrado líneas de corriente muy visibles con las que apreciar la fenomenología del flujo con total claridad, lo que permitió que estos autores establecieran una serie de configuraciones del flujo en las proximidades del cilindro que ellos denominaron *fenómenos*, y que, si bien antes habían sido mencionados en parte por otros autores, fueron entonces establecidos definitivamente. Aunque estos fenómenos han sido descritos como característicos de distintos Re , es posible, como en este caso, que ambos se den de forma sucesiva a medida que va evolucionando el flujo.

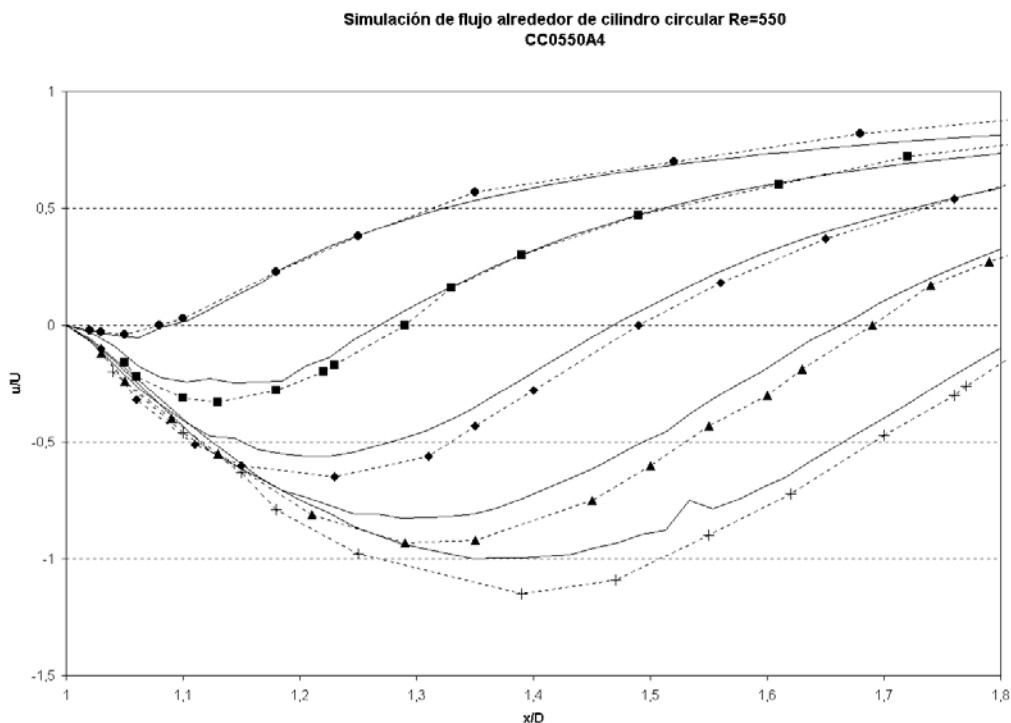


Figura 5. Caso CC0550A4. Velocidades horizontales a sotavento

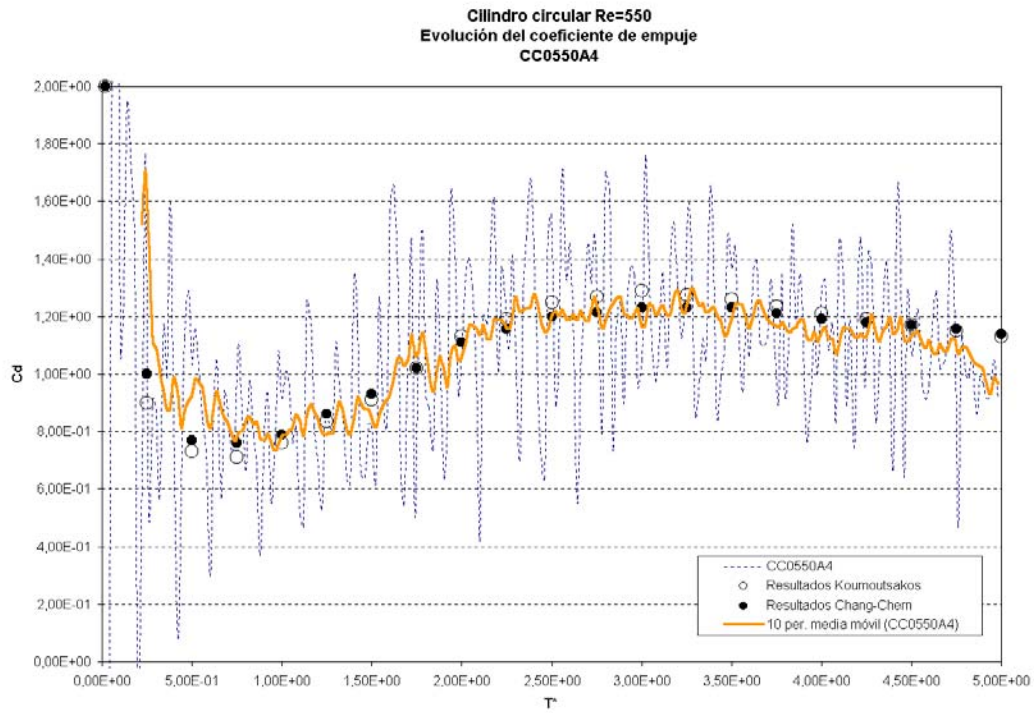


Figura 6. Caso CC0550A4. Evolución del coeficiente de empuje

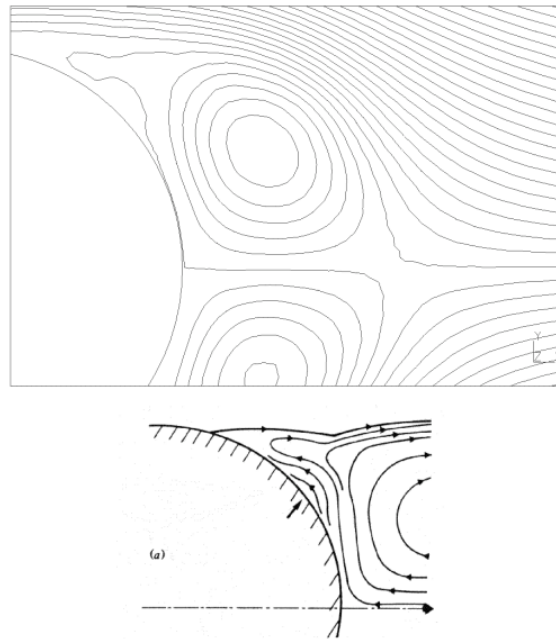


Figura 7. Detalle de la configuración del flujo obtenida con el modelo en la zona de recirculación para $Re=550$ y $T^*=3$. Comparación con el esquema del fenómeno de protuberancia (de Bouard y Coutanceau⁷)

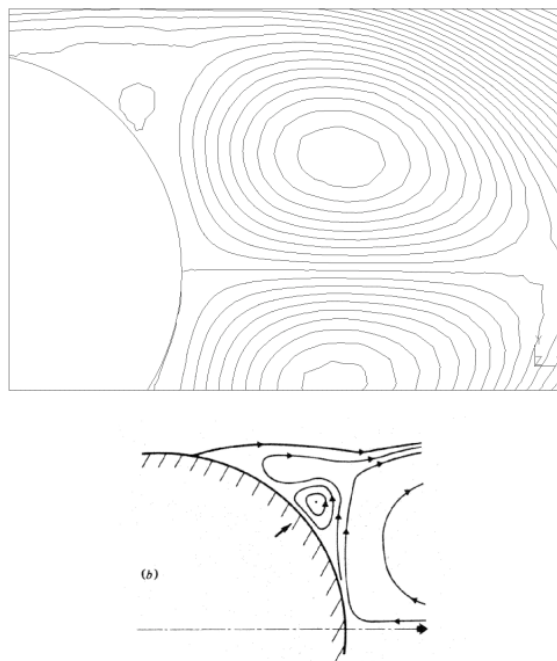


Figura 8. Detalle de la configuración del flujo obtenida con el modelo en la zona de recirculación para $Re=550$ y $T^*=5$. Comparación con el esquema del fenómeno de vórtice secundario (de Bouard y Coutanceau⁷)

Entrando ya en los resultados para $Re=3.000$, en la Figura 9 se muestra la distribución de velocidades horizontales a sotavento del cilindro obtenida con el modelo, comparada con los resultados experimentales de Bouard y Coutanceau⁷. Por otra parte, en la Figura 10 se muestra la evolución del coeficiente de empuje para este mismo caso (el coeficiente de sustentación es de nuevo nulo por simetría), junto con el valor filtrado ($n=10$) y los resultados numéricos de Koumoutsakos y Leonard³⁰ y Chang y Chern¹⁰.

Además, se muestran en las Figuras 11 y 12, las comparaciones entre las líneas de corriente calculadas con el modelo y las visualizaciones del flujo obtenidas experimentalmente por Bouard y Coutanceau para los intervalos $T^*=2$ y $T^*=5$. Es de destacar que a partir de $T^*=3$ es perfectamente visible el fenómeno α de Bouard y Coutanceau en la configuración del flujo modelado. Se representan en la Figura 13 las velocidades calculadas para $T^*=4$, observándose de forma más nítida la configuración del flujo con los dos remolinos secundarios característicos de este fenómeno –cuyo esquema se muestra en la misma figura–, demostrándose la capacidad del modelo para reproducir la configuración del flujo hasta un nivel de detalle considerable.

Con el fin de validar definitivamente la capacidad del modelo para reproducir los instantes iniciales en flujos sencillos, se ha modelizado, con la configuración adoptada como idónea, el flujo a su paso por un cilindro circular con número de Reynolds 9.500.

En la Figura 14 se muestra la comparación entre las velocidades calculadas a sotavento del cilindro con las obtenidas experimentalmente por Bouard y Coutanceau⁷, apreciándose el correcto ajuste de los resultados. En la Figura 15 se muestra la evolución del coeficiente de empuje, junto con la obtenida por Koumoutsakos y Leonard²⁹ y Chang y Chern¹⁰. Se concluye definitivamente que el fenómeno de las fluctuaciones es claramente proporcional a Re , dado que nos encontramos con fluctuaciones mayores que las obtenidas en los anteriores casos. El ajuste de la línea de tendencia vuelve a ser bueno, aunque en este caso se aprecia que, a partir de $T^*=2$, los valores arrojados por el modelo se apartan de los obtenidos por los autores mencionados, y a la vez los de éstos difieren entre sí, lo que puede estar causado por un aumento de la inestabilidad del flujo debido al incremento experimentado por Re . En

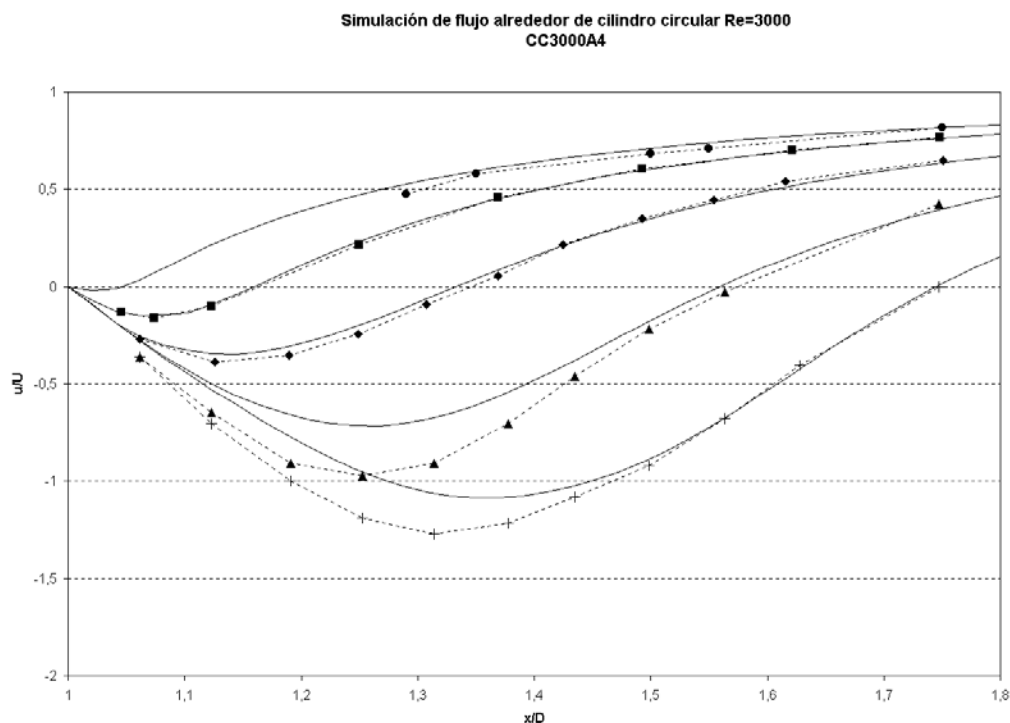


Figura 9. Caso CC3000A4. Velocidades horizontales a sotavento

las Figuras 16 y 17 se muestra la configuración del flujo por medio de la representación de la función de corriente, para dos instantes de tiempo dados, comparada con las visualizaciones incluidas en el trabajo de Bouard y Coutanceau. Se aprecia que los estados evolutivos del flujo coinciden de forma satisfactoria con los visualizados experimentalmente.

Validación del modelo mediante simulación de flujos a largo plazo

En primer lugar se ha simulado el flujo alrededor de un cilindro circular de las mismas características que el ensayado en el punto anterior, alargando el tiempo de cálculo hasta $T^*=35$ (esta vez con $D=0,5$), con el fin de estudiar la capacidad del modelo para reproducir determinadas características del flujo a largo plazo, como la aparición de los remolinos de Von Karman.

Se ha optado por un número de Reynolds bajo ($Re=200$) para que la estela de remolinos sea lo más estable posible, de modo que cualquier desviación de la pauta regular de desprendimiento de remolinos pueda ser atribuida a un error del modelo y no a fenómenos de inestabilidad. De esta forma la simulación puede darse por válida si se logra obtener un número de Strouhal, o frecuencia adimensional de desprendimiento de remolinos, lo más cercana al valor experimental.

En la tabla siguiente se muestran los valores del número de Strouhal y coeficiente de empuje promedio obtenidos (el coeficiente de sustentación es nulo por simetría), comparados con los resultados numéricos de Franke *et al.*²¹ mediante diferencias finitas, y Walther⁵² mediante vórtices discretos.

Caso	St	C_D
CC0200A6	0,185	1,30
Franke <i>et al.</i>	0,194	1,31
Walther	0,19	1,319

Tabla I. Resultados de la simulación CC0200A6 comparados con los de otros modelos

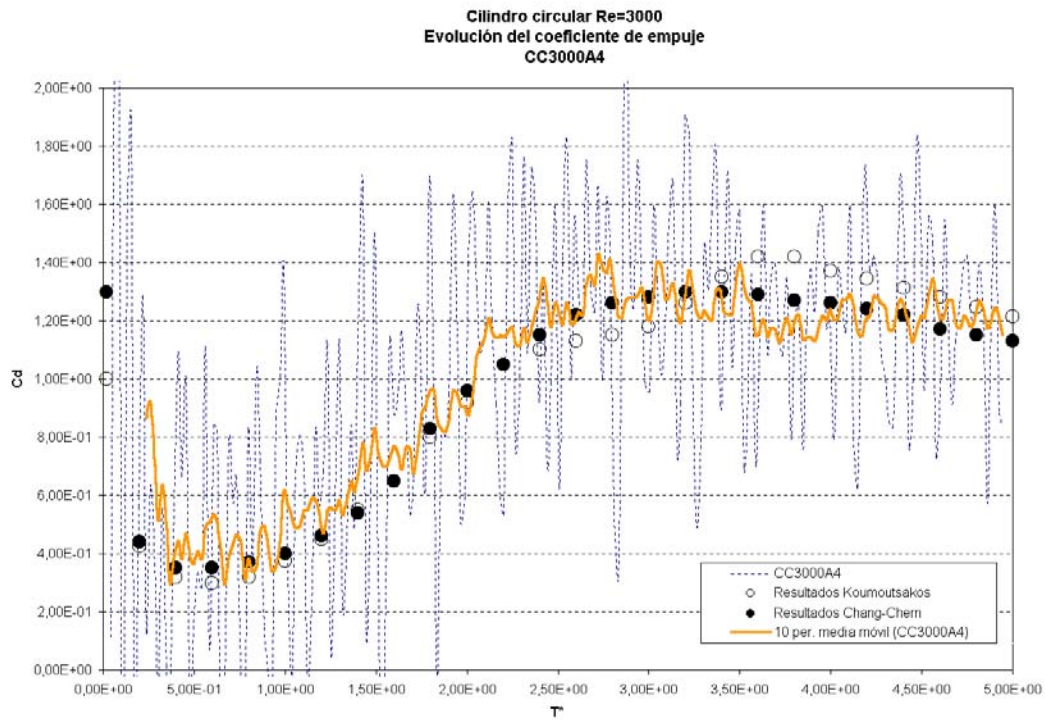


Figura 10. Caso CC3000A4. Evolución del coeficiente de empuje

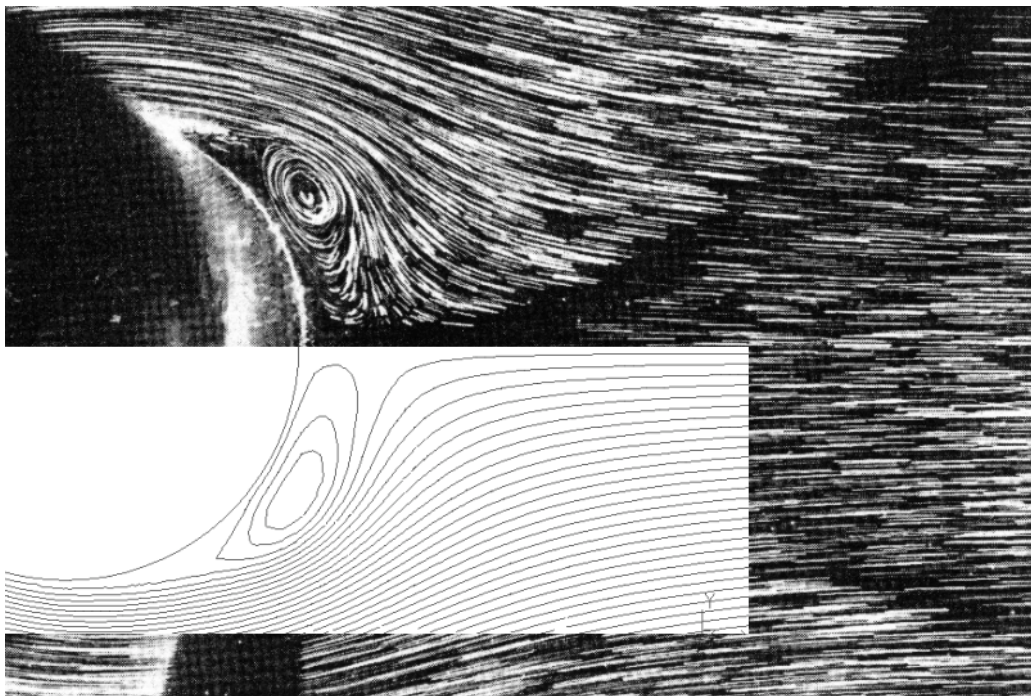


Figura 11. Líneas de corriente obtenidas con el modelo para $Re=3.000$ y $T^*=2$ comparadas con la visualización de Bouard y Coutanceau ⁷

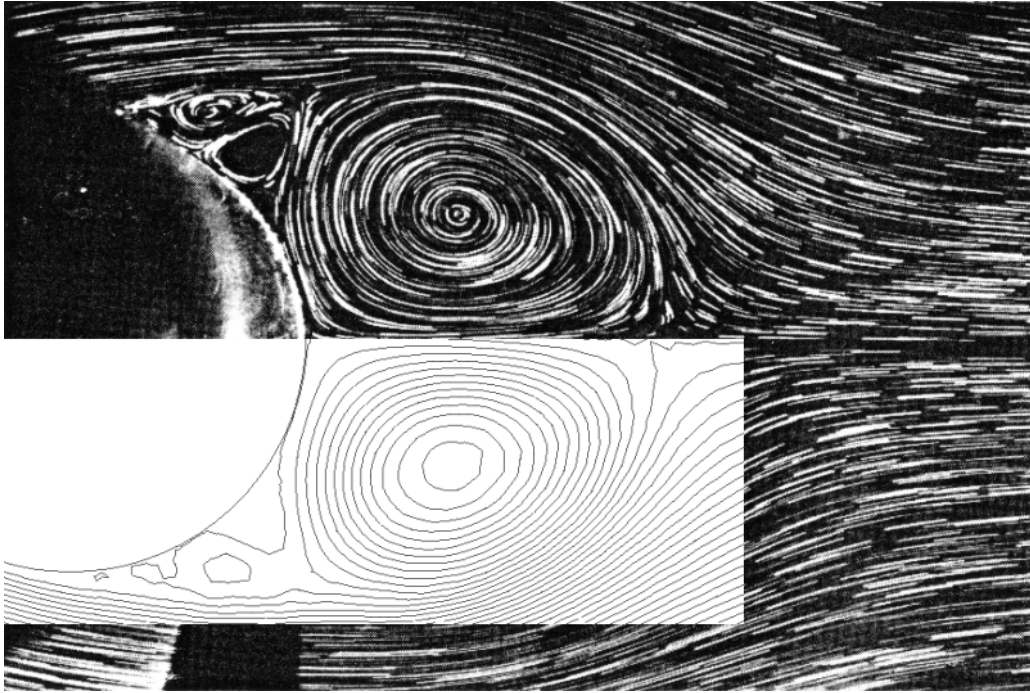


Figura 12. Líneas de corriente obtenidas con el modelo para $Re=3.000$ y $T^*=5$ comparadas con la visualización de Bouard y Coutanceau⁷

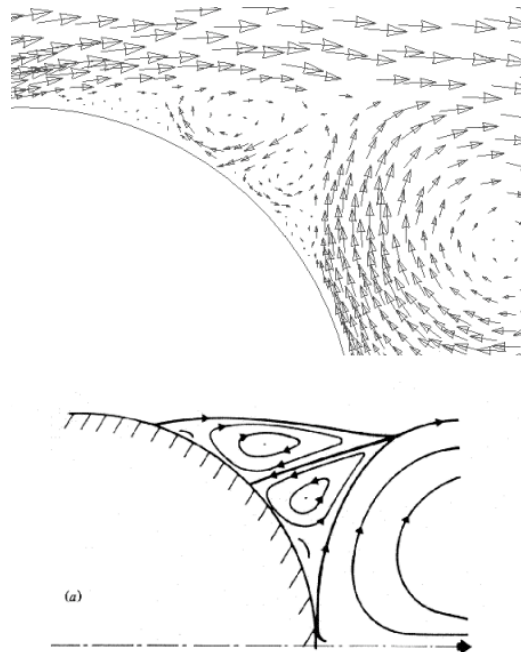


Figura 13. Detalle de las velocidades obtenidas con el modelo para $Re=3.000$ y $T^*=4$. La velocidad de aproximación es 0,0900 m/s. La velocidad máxima es 0,1526 m/s. Comparación con el fenómeno α (de Bouard y Coutanceau⁷)

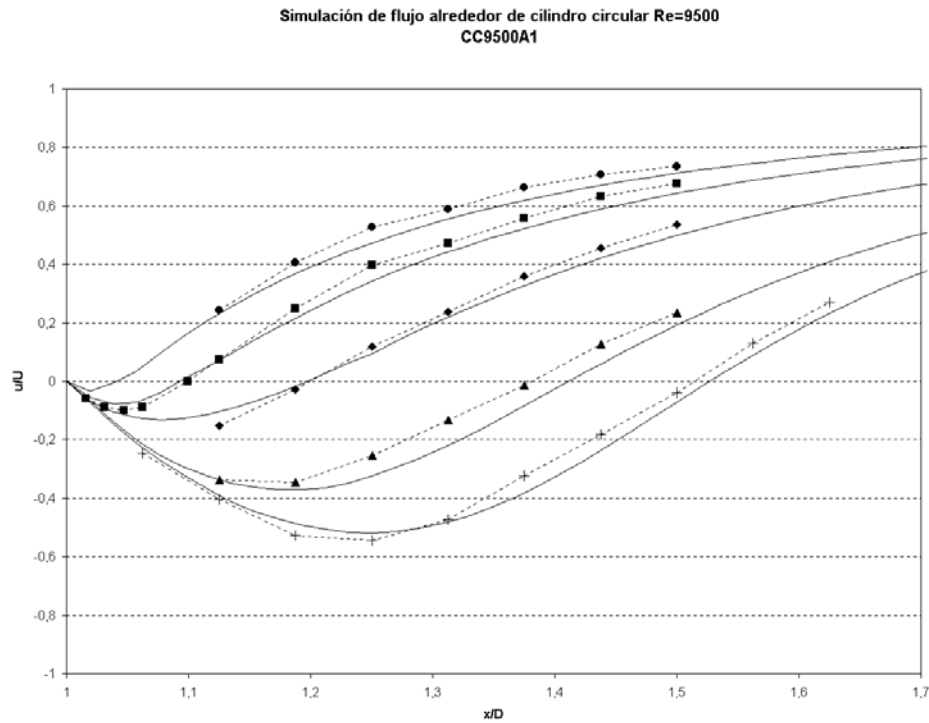


Figura 14. Caso CC9500A1. Velocidades horizontales a sotavento

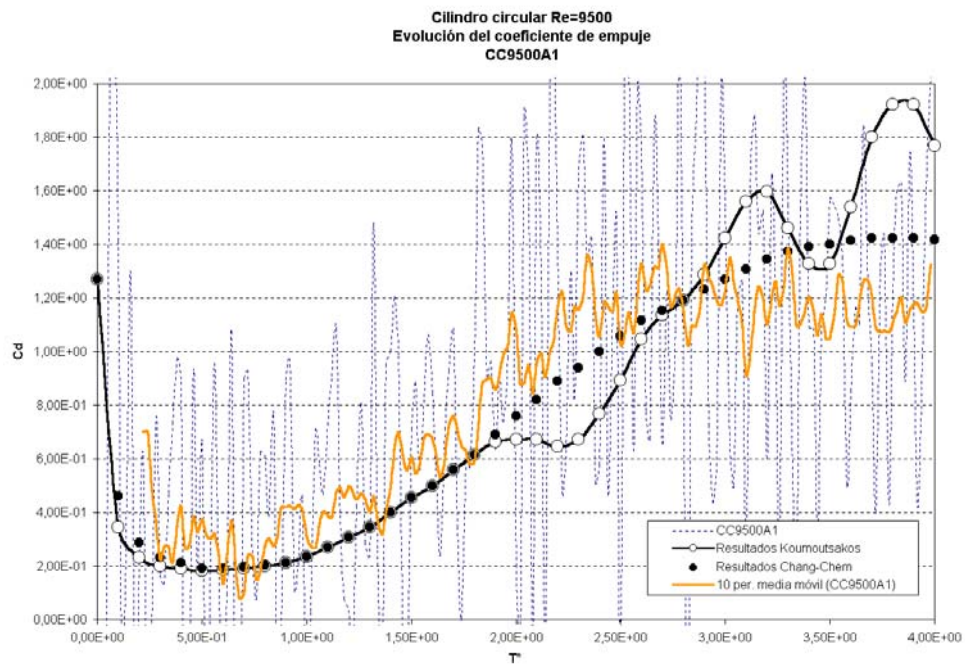


Figura 15. Caso CC9500A1. Evolución del coeficiente de empuje

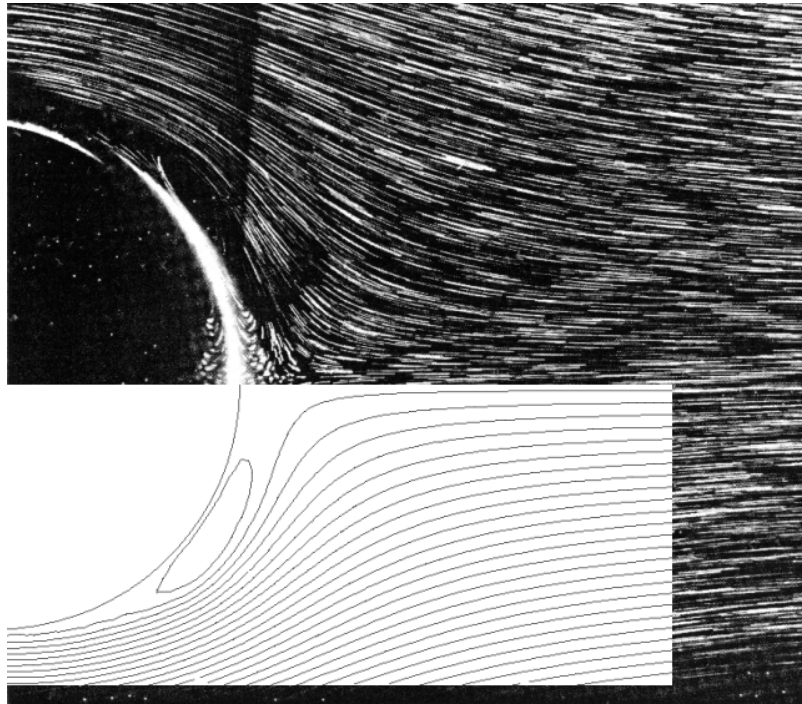


Figura 16. Líneas de corriente obtenidas con el modelo para $Re=9.500$ y $T^*=1,6$ comparadas con la visualización de Bouard y Coutanceau⁷

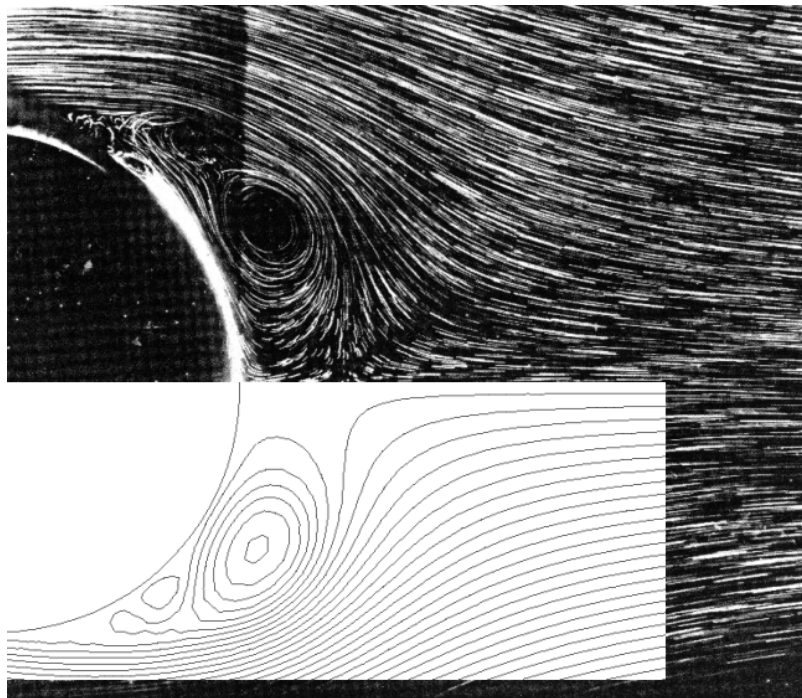


Figura 17. Líneas de corriente obtenidas con el modelo para $Re=9.500$ y $T^*=2,8$ comparadas con la visualización de Bouard y Coutanceau⁷



Figura 18. Caso CC0200A6. Distribución de vórtices en la estela para $T^*=35$

En la Figura 18 se puede observar la distribución de vórtices en la estela del cilindro al final de la simulación, cuando se ha alcanzado un estado estacionario en las proximidades del cilindro. Se aprecia la regularidad geométrica de la estela y la gran difusión sufrida por los remolinos (ambos fenómenos debidos al bajo Re). Se aprecia así mismo la expansión creciente de la estela.

En segundo lugar se ha procedido a simular flujos a largo plazo alrededor de cilindros cuadrangulares.

El flujo a su paso por cilindros de generatriz cuadrangular permite validar la capacidad del modelo para reproducir zonas de separación muy marcadas, como las que tienen lugar a sotavento debido a la presencia de las esquinas, lo que produce una configuración irregular y asimétrica de la estela. Dado que en ingeniería civil las estructuras no poseen formas aerodinámicas, estas simulaciones constituyen un paso previo necesario para dar por válida la utilización del modelo en ingeniería estructural.

Es precisamente esta característica la que provoca que dichos ensayos sean mucho menos dependientes del número de Reynolds que otros, dado que las zonas de separación se hallan confinadas a determinadas áreas preestablecidas, por lo que no es de esperar grandes variaciones en los coeficientes de fuerza debido a la forma. Los cálculos que han sido recogidos en las referencias suelen acometer un único cálculo a un número de Reynolds moderadamente elevado, por lo general alrededor de $Re=20.000$.

Comenzando ya con las referencias de trabajos de investigación en este campo concreto, podemos comenzar citando a Sarpkaya e Ihrig⁴⁴, quienes simulan el flujo a su paso por cilindros rectangulares a un número de Reynolds alto ($Re=20.000$). Imponen no penetración mediante un método de paneles con distribución puntual de vórtices y dos puntos de control por panel, aunque los vórtices discretos (representados por vórtices punto) son únicamente los desprendidos de las esquinas, dotados con una circulación $0,5 V^2 \Delta t$, siendo V el promedio de las velocidades tangenciales de los puntos de control adyacentes al nodo de esquina. La difusión no es simulada, salvo en el momento del desprendimiento del contorno. La convección se resuelve con un esquema de segundo orden, dado el elevado valor de Re .

Bienkiewicz y Kutz⁴ utilizan un método de vórtices discretos para la simulación del flujo alrededor de cilindros de generatriz cuadrada y rectangular con diferentes ángulos de incidencia. El flujo se supone invíscido y la condición de no penetración se impone utilizando un método de paneles con flujos elementales puntuales tipo vórtice irrotacional, eliminando un punto de control para imponer conservación total de la vorticidad. Sin embargo, los vórtices que formarán parte del flujo (representados como vórtices punto) son únicamente los ubicados en los nodos correspondientes a las esquinas o puntos de separación determinados a priori. Con el fin de acelerar la inestabilidad de la estela, que presenta excesiva simetría debido al escaso número de vórtices y al hecho de que sean desprendidos únicamente en las esquinas, uno de los vórtices en las etapas iniciales del cálculo es retenido. Las fuerzas son calculadas utilizando el teorema de Blasius.

Okajima³⁸ utiliza un método de vórtices discretos muy similar para simular el flujo a altos números de Reynolds (hasta $Re = 10^4$) a su paso por cilindros de generatriz rectangular con relaciones de aspecto entre 0,6 y 8 y ángulo de incidencia nulo (para números de Reynolds menores utiliza el método de diferencias finitas). No se incluye ningún algoritmo para la difusión de vorticidad, aceptando que, salvo en el momento de la separación del

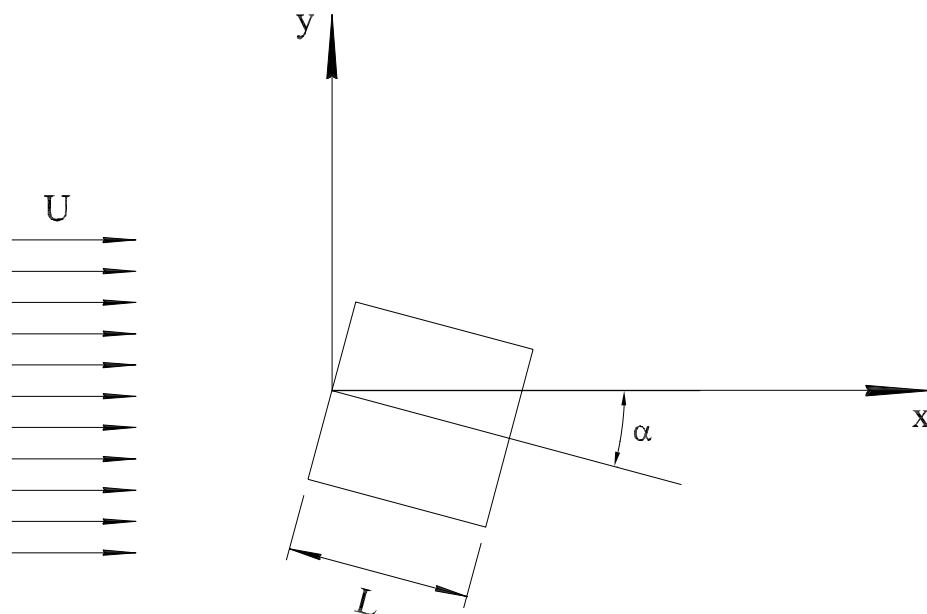


Figura 19. Esquematación del flujo alrededor de un cilindro cuadrado

contorno, tiene poca influencia en el movimiento de los vórtices. La vorticidad se desprende de las esquinas y la circulación de los nuevos vórtices (vórtices-punto) parece obtenerse imponiendo no penetración mediante un método de paneles con vórtices puntuales. Destaca en el artículo el estudio de la influencia de Re en el coeficiente de arrastre y el número de Strouhal, comprobándose que éstos tienden a ser constantes para Re elevados.

Taylor y Vezza⁴⁹ aplican un modelo de vórtices discretos desarrollado en un trabajo anterior a la simulación del flujo alrededor de cilindros cuadrangulares. Se utiliza Random-Walk para modelar la difusión y la técnica de expansión multipolar de Carrier *et al.*⁸ para agilizar el cálculo de las interacciones entre vórtices. La vorticidad es creada imponiendo, mediante un método de paneles con distribución de vorticidad lineal, flujo másico en dirección normal al contorno nulo, lo que constituye una forma alternativa de la condición de contorno de no penetración. Los vórtices son ubicados a una distancia inicial del contorno. Como principal novedad del método hay que destacar la incorporación de un modelo conceptual de decaimiento de la circulación de las partículas de la estela, que intenta simular la transferencia de circulación que tiene lugar debido a la expansión de las estructuras vorticales en dirección transversal al flujo, lo que provoca que los remolinos de la estela pierdan intensidad con el paso del tiempo.

Centrándonos ya en nuestro trabajo, se ha simulado el flujo alrededor de un cilindro de generatriz cuadrada ante diferentes ángulos de inclinación del flujo de aproximación (ángulo de ataque). Los ángulos varían de 0 a 45, con incrementos de 5, con lo que se abarca el comportamiento aerodinámico del cuerpo ante cualquier ángulo de ataque. La duración adimensional del tiempo simulado ha sido de 52,5, suficiente para que se alcance un estado prácticamente estacionario de desprendimiento de remolinos en las proximidades del cilindro en todos los casos. El número de Reynolds simulado ha sido de 20.000. La dimensión característica del cilindro es 0,5 m (longitud del lado). En la Figura 19 puede verse un esquema del problema con el sistema de coordenadas utilizado y la orientación del ángulo de ataque.

Los resultados experimentales utilizados en las comparaciones han sido los procedentes de las investigaciones experimentales de Lyn *et al.*³² y Durao *et al.*¹⁹, recogidos por Rodi⁴¹, además de otros directamente obtenidos del trabajo de Lyn *et al.* A partir de ahora se referirán dichos resultados como los debidos a Lyn o Durao, sin indicar la referencia exacta de donde se obtuvieron.

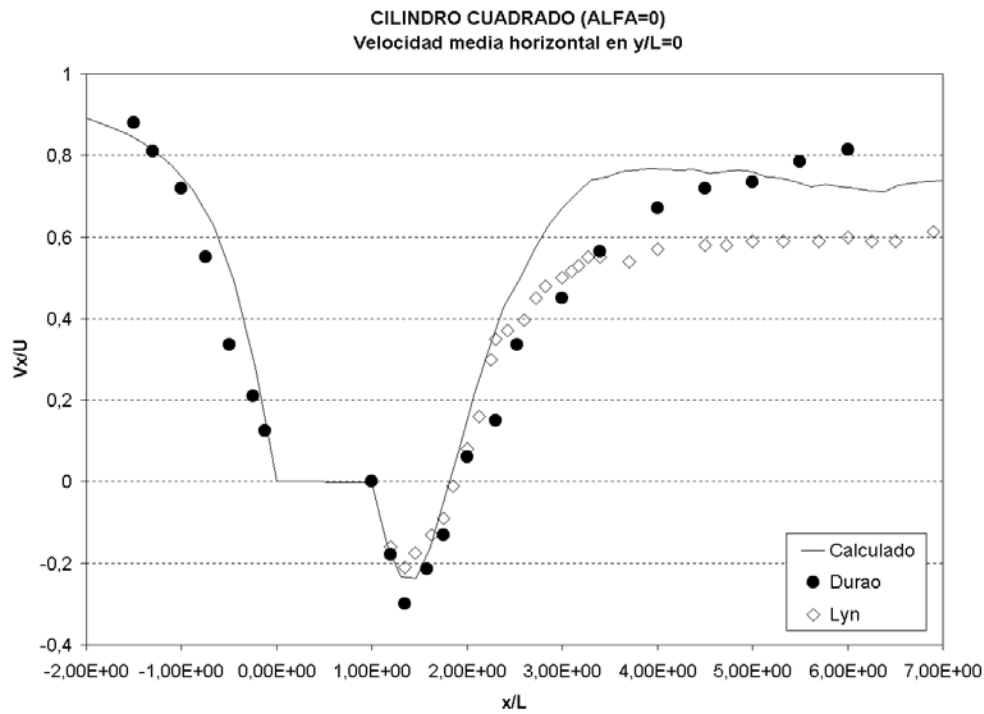


Figura 20. Caso SC2E0400. Velocidades horizontales medias en $y/L=0$

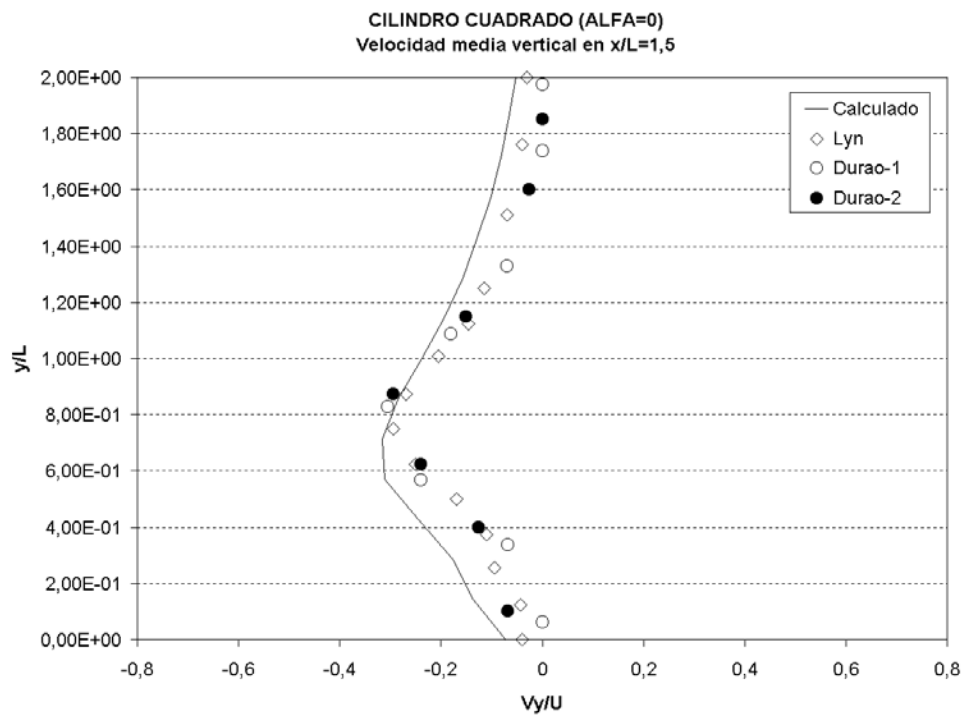


Figura 21. Caso SC2E0400. Velocidades verticales medias en $x/L=1,5$

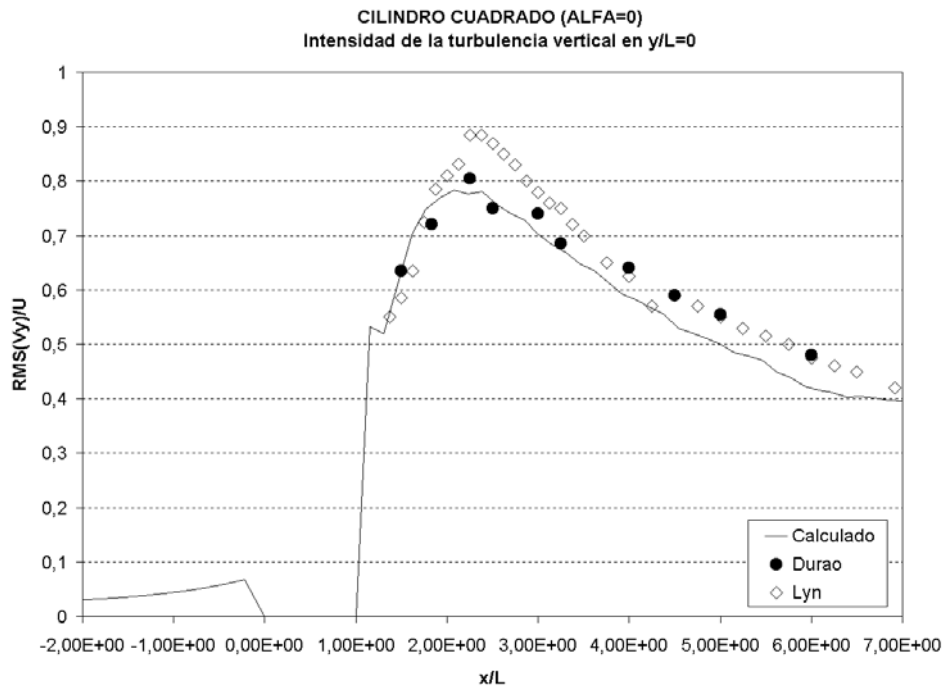


Figura 22. Caso SC2E0400. Intensidad de la turbulencia vertical en $y/L=0$

Se presentan en las Figuras 20 y 21, las distribuciones de velocidades medias obtenidas por el modelo en los ejes $y/L=0$ (velocidad horizontal) y $x/L=1,5$ (velocidad vertical), comparadas con los resultados experimentales de Lyn y Durao. Los resultados de Durao distinguen entre rama superior e inferior del eje $x/L=1,5$, lo que se ha recogido como Durao-1 y Durao-2.

Para estos mismos ejes se dispone de resultados concernientes a la intensidad de la turbulencia. Recordemos que en un flujo turbulento se denomina *intensidad de la turbulencia* a la desviación típica de las fluctuaciones (horizontales o verticales), expresada en proporción al valor medio de la velocidad de aproximación, es decir:

$$I_u = \frac{\sigma_{u'}}{U} \quad , \quad I_v = \frac{\sigma_{v'}}{U} \quad (30)$$

Debido a que nos encontramos en un flujo dominado por el fenómeno de desprendimiento de remolinos, la intensidad de la turbulencia recoge las oscilaciones periódicas producidas por los remolinos, además de las fluctuaciones turbulentas de menor escala superpuestas a éstas. Esta es la razón de que se alcancen valores de la intensidad de hasta 80 %. En la Figura 22 se refleja la intensidad de la turbulencia vertical arrojada por el modelo en el eje $y/L=0$ comparada con los resultados experimentales de Durao y Lyn. En la Figura 23 se representa la energía total de la turbulencia, k , en la estela del cilindro, comparada con los resultados experimentales. La energía de la turbulencia se define como:

$$k = I_u^2 + I_v^2 \quad (31)$$

y es una medida de la variabilidad total de las fluctuaciones en ambas direcciones.

El trabajo experimental de Lyn incluye también resultados de velocidades instantáneas, entre los que se encuentran los resultados de velocidades verticales instantáneas en la estela del cilindro (eje $y/L=0$). Dichas velocidades corresponden al inicio y mitad de un ciclo de desprendimiento de remolinos (en su trabajo, Lyn divide este ciclo en 20 fases, correspondiendo las distribuciones de velocidad referenciadas a las fases 1 y 9). En nuestro trabajo, dichas fases pueden hacerse corresponder, entre otros, con los instantes adimensionales 48,427 y 52,315, respectivamente. Los resultados comentados pueden verse en las Figuras 24 y 25.

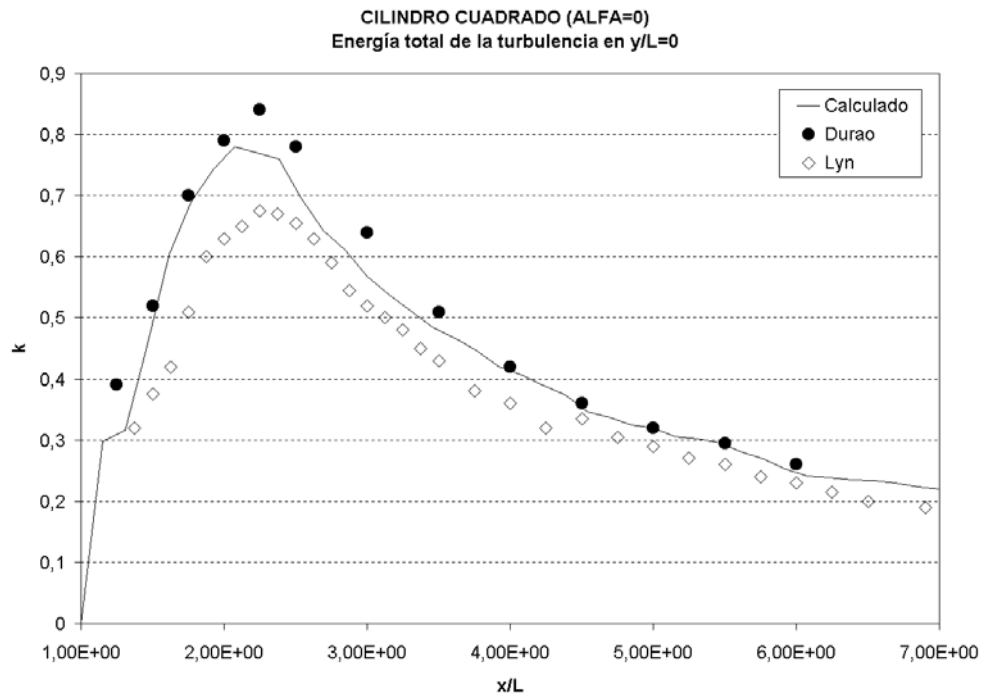


Figura 23. Caso SC2E0400. Energía total de la turbulencia en $y/L=0$

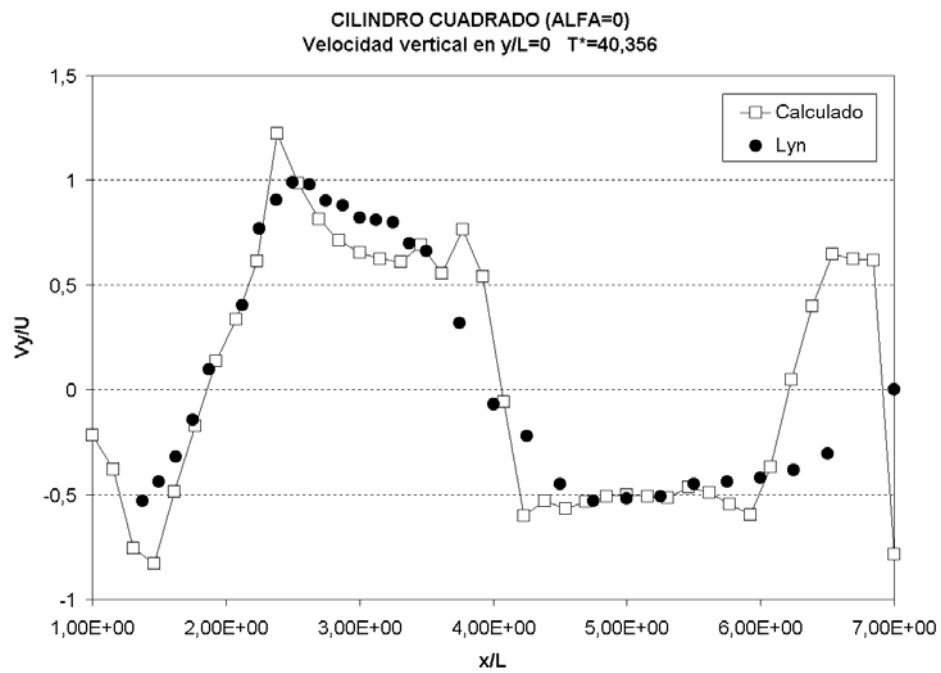


Figura 24. Caso SC2E0400. Velocidades verticales instantáneas en $y/L=0$ al inicio de un ciclo

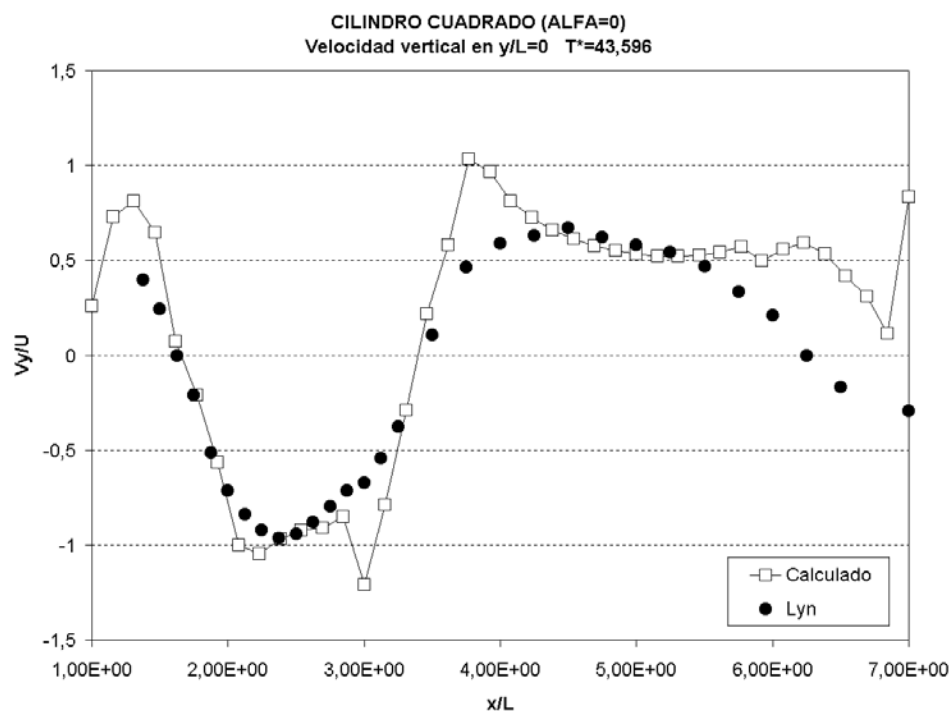


Figura 25. Caso SC2E0400. Velocidades verticales instantáneas en $y/L=0$ a mitad de un ciclo

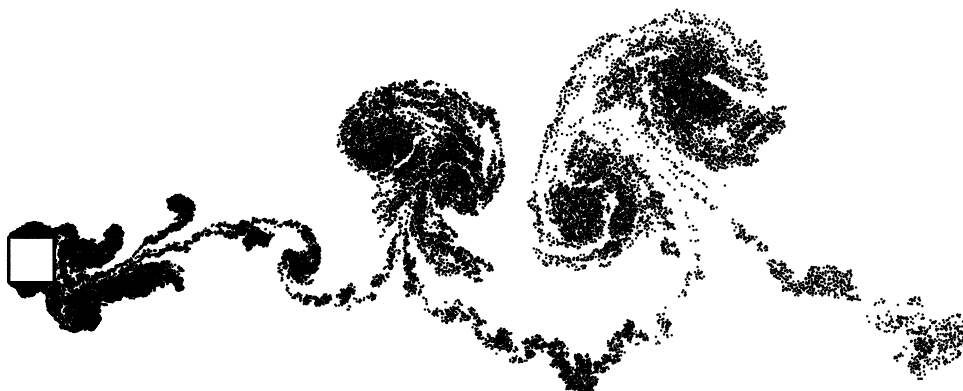


Figura 26. Caso SC2E0400. Distribución de vórtices discretos en la estela

En la Figura 26 se aprecia en detalle el aspecto de la estela de remolinos obtenida con el modelo, mediante la representación de los vórtices discretos presentes en el flujo. Se observa la aparición de estructuras coherentes propias de las estelas turbulentas, como las parejas de vórtices.

Esta estructura del flujo ha sido descrita con detalle por Couder y Basdevant¹⁶, y se caracteriza por la existencia de dos vórtices adyacentes de similar circulación y signo opuesto que escapan de la zona central de la estela con un movimiento de traslación muy marcado. Las parejas de vórtices se crean como degeneración de dos vórtices en chorro (la estructura más común en estelas turbulentas) que en un momento dado, debido a su cercanía y similitud, interactúan de forma independiente del resto del flujo, de tal manera que las

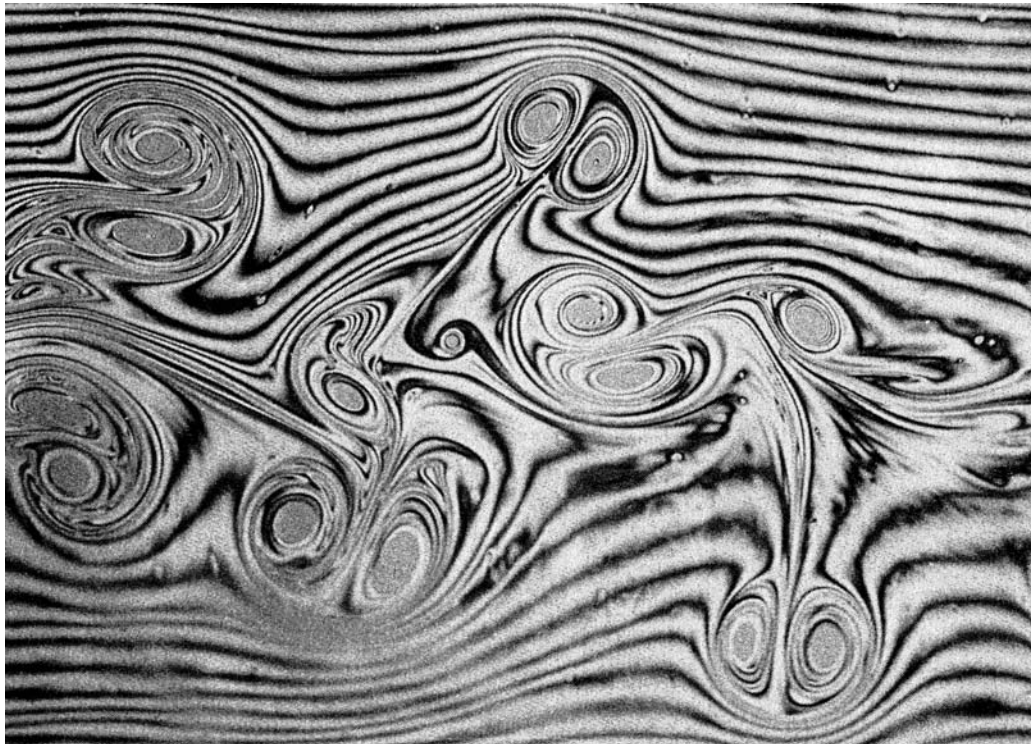


Figura 27. Visualización de una estela mostrando parejas de vórtices (de Couder y Basdevant¹⁶)

velocidades creadas por un vórtice impulsan al otro vórtice y viceversa. En la Figura 27 se muestra la visualización de una estela mostrando varias estructuras de este tipo, extraída del citado trabajo, apreciándose la gran similitud con las estructuras obtenidas numéricamente con el modelo de vórtices discretos.

La gama de resultados experimentales para el resto de ángulos de ataque es mucho más limitada, y se restringe a los coeficientes de fuerza y a el número de Strouhal. Debido al carácter fuertemente transitorio del problema, los valores son valores promedios, una vez alcanzado el estado estacionario de desprendimiento de remolinos. Los datos experimentales utilizados para contrastar los resultados del modelo provienen de diferentes autores, recogidos por Taylor y Vezza⁴⁹. Se recogen también los resultados numéricos de estos autores así como los obtenidos con otros modelos DVM, también incluidos por éstos en sus comparaciones.

En la siguiente tabla se recogen los autores cuyos trabajos se muestran en las gráficas que incluimos a continuación, indicando el número de Reynolds de la simulación, así como si se trata de un modelo numérico DVM o experimental.

Autores	Año	Ref.	Tipo de modelo	Re	C_D	C_L	St
Taylor+Vezza	1999	⁴⁹	DVM	20.000	X	X	X
Bienkiewicz+Kutz	1993	⁵	DVM	-	X	X	X
Igarashi	1984	²⁵	Experimental	37.000		X	X
Obasaju	1983	³⁶	Experimental	47.400	X		X
ESDU	1971	²⁰	Experimental	10.000	X	X	

Tabla II. Referencias utilizadas en la comparación de resultados para la familia de simulaciones SC2E04

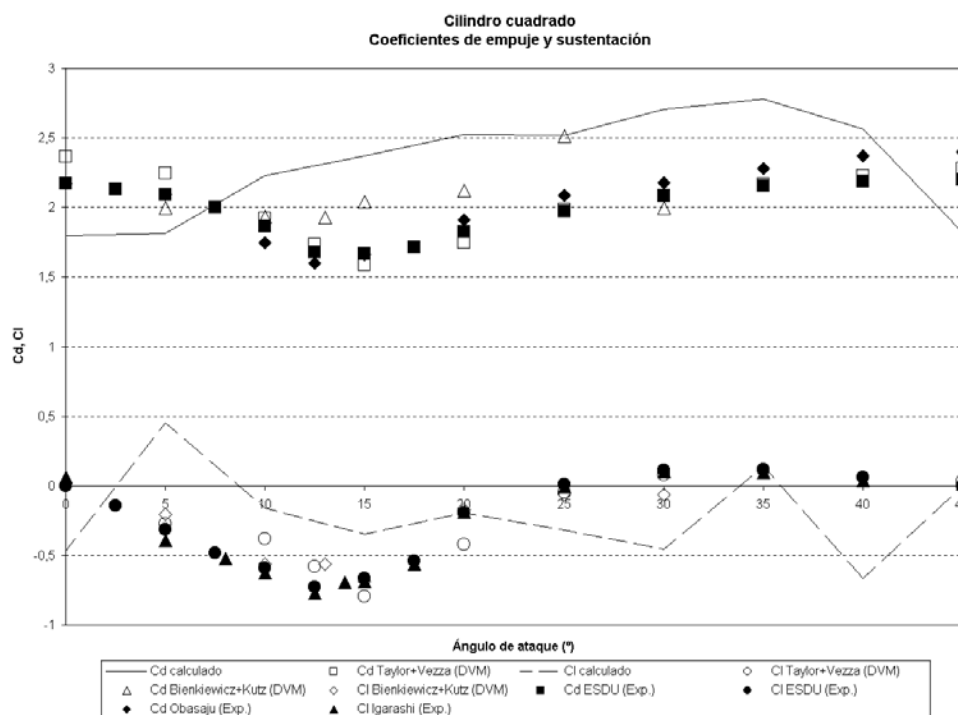


Figura 28. Flujo alrededor de un cilindro cuadrado. Coeficientes de empuje y sustentación en función del ángulo de ataque

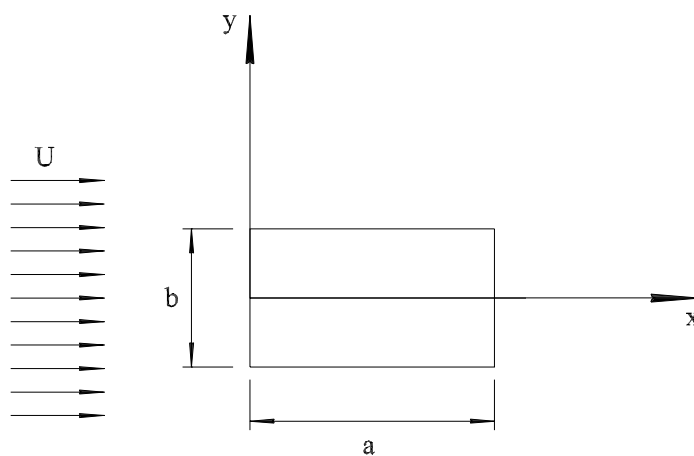


Figura 29. Esquemmatización del flujo alrededor de un cilindro rectangular

La Figura 28 muestra los coeficientes de arrastre y sustentación en función del ángulo de ataque obtenidos con el modelo, comparados con los resultados provenientes de los trabajos antes mencionados, según quedan recogidos en el referido artículo de Taylor y Vezza.

El siguiente caso de validación del modelo ha sido la simulación del flujo alrededor de un cilindro de sección rectangular con ángulo de ataque cero.

Se han ensayado diferentes secciones con distinta relación de aspecto (cociente a/b entre las longitudes de los lados del rectángulo), siendo el rango ensayado desde 0,5 hasta 4 (la relación de aspecto igual a 1 se corresponde con el cilindro cuadrangular). En la Figura 29 se muestra el esquema geométrico del problema y el sistema de coordenadas utilizado.

El número de Reynolds ensayado, basado en la dimensión transversal al flujo, ha sido de 20.000. La duración adimensional del tiempo de simulación ha sido de 30, lo que permite la aparición de una pauta de desprendimiento de remolinos prácticamente estable.

Los trabajos experimentales y numéricos con los que se han comparado los resultados han sido nuevamente extraídos en su mayor parte del trabajo de Taylor y Vezza⁴⁹. Además de éstos, se ha incluido el trabajo de Okajima³⁸. De nuevo presentamos en forma de tabla los autores recopilados.

Autores	Año	Ref.	Tipo de modelo	Re	C_D	St
Taylor+Vezza	1999	⁴⁹	DVM	20.000	X	X
Bienkiewicz+Kutz	1993	⁵	DVM	-	X	X
Okajima	1990	³⁸	DVM	$10^2 - 10^5$	X	X
Blevins	1989	⁶	DVM	-	X	
Courchesne+Laneville	1979	¹⁷	Experimental	-	X	
Otsuki <i>et al.</i>	1974	³⁹	Experimental	-		X
ESDU	1971	²⁰	Experimental	10.000	X	

Tabla III. Referencias utilizadas en la comparación de resultados para la familia de simulaciones RC2E04

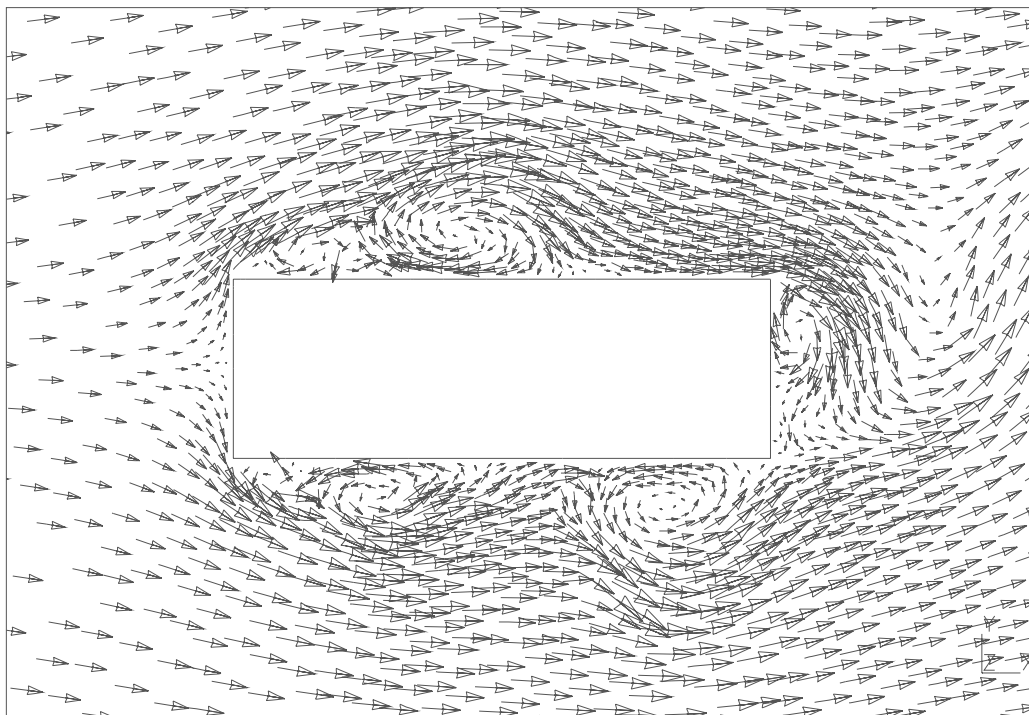


Figura 30. Flujo alrededor de un cilindro rectangular con relación de aspecto 3. Velocidades instantáneas para $T^*=18,48$. La velocidad de aproximación es 0,600 m/s. La velocidad máxima es 1,156 m/s

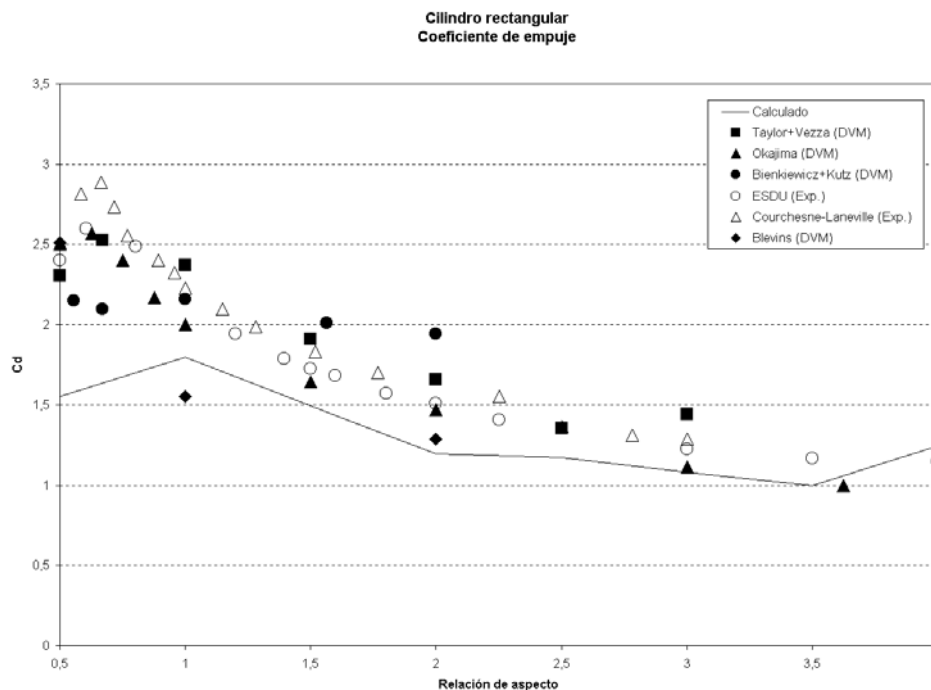


Figura 31. Flujo alrededor de un cilindro rectangular. Coeficiente de empuje en función de la relación de aspecto

En la Figura 30 se muestra el campo de velocidades instantáneas en las proximidades del cilindro para el caso de relación de aspecto igual a tres. Se observa que las zonas de separación se alargan y permiten la coexistencia de varios de los remolinos originados de forma sucesiva en las esquinas a barlovento, formando lo que hemos denominado trenes de vórtices. Tras trasladarse por las caras superior e inferior, son desprendidos en los extremos a sotavento de dichas caras. En el instante mostrado en la figura un remolino del tren superior acaba de desprenderse en la esquina superior a sotavento, contribuyendo desde dicho instante a conformar la estela del flujo.

En la Figura 31 se muestran los resultados del coeficiente de empuje medio en función de la relación de aspecto, comparados con los resultados de los autores recopilados.

Se observa que el ajuste de los resultados del coeficiente de empuje con los valores experimentales es peor para relaciones de aspecto bajas, aumentando la convergencia con los resultados recopilados en la literatura con relaciones de aspecto más altas. La razón estriba en que para relaciones de aspecto bajas la inexistencia de trenes de vórtices en las caras superior e inferior del cilindro hace más caótico el flujo y por tanto más difícil de simular. La dispersión de los resultados numéricos recogidos respecto a los experimentales es también mayor en esta zona, siendo en general menores los arrastres obtenidos que los medidos experimentales (coincidiendo de este modo con nuestro modelo). En nuestro caso, la falta de precisión en la reproducción de la zona de separación podría deberse a un número de vórtices insuficiente.

APLICACIÓN DEL MODELO A LA DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES AERODINÁMICOS DEL PUENTE DEL BIMILENARIO DE ELCHE

Como colofón del presente trabajo, se ha utilizado el modelo de vórtices discretos desarrollado para simular el flujo de viento alrededor del tablero del puente del Bimilenario de Elche y, en concreto, poder determinar sus coeficientes aerodinámicos de arrastre y sustentación. Con esta simulación se pretende, una vez comprobado el aceptable comportamiento

del modelo reproduciendo flujos alrededor de cuerpos de geometría sencilla, poner a prueba el mismo en una aplicación práctica, es decir, un caso real de estructura. La descripción de los experimentos en túnel de viento que se realizaron durante la etapa de diseño del puente –con los que se han comparado los resultados numéricos obtenidos– vienen recogidos en un informe²⁸.

Entre los trabajos que han aplicado el método de vórtices discretos a la determinación de las cargas estáticas sobre tableros de puente, mencionaremos dos modelos que ya hemos analizado anteriormente, como son el de Bienkiewicz y Kutz⁴ y el de Walther⁵², además del de Vejrum⁵¹.

En ⁴ se simula el flujo alrededor del puente de Ruck-a-Chucky. Los autores definen dos pares de puntos de separación en la sección del puente, dependiendo del signo del ángulo de ataque. Los coeficientes de empuje y sustentación son comparados con los datos experimentales para ángulo de ataque entre -6 y 6. El ajuste es sólo regular debido, entre otras posibles razones, al escaso número de vórtices empleado y a la hipótesis de flujo invíscido.

Walther⁵² simula el flujo a su paso por el tablero del puente del Gran Belt Este, extendiendo la simulación lo máximo posible ($t^* = 10 - 20$). Se utiliza un esquema de segundo orden para el avance de los vórtices. Pese a que los experimentos en túnel de viento contaron con un flujo de aproximación turbulento (con una intensidad del 7 %) y el modelo contaba con barandillas y barreras de seguridad, no incluidas en la simulación numérica, los resultados –coeficientes de empuje, sustentación y momento para ángulos de ataque entre -10 y 10– son buenos. Estos coeficientes son calculados teniendo en cuenta únicamente las presiones. Un análisis espectral de las series temporales de velocidades en la estela del tablero muestra un posible ajuste a espectros de turbulencia obtenidos por otros autores, lo que reflejaría la capacidad del modelo para reproducir de manera correcta el flujo turbulento de la estela, pese a no contar con modelos constitutivos de turbulencia. En su trabajo, Walther extiende el estudio a la determinación de las derivadas aerodinámicas.

Vejrum *et al.*⁵¹ emplean un modelo de vórtices discretos análogo al elaborado por Walther para incidir en las repercusiones que sobre el comportamiento aerodinámico tendrían diversas variantes de diseño del tablero del puente colgante de *Lion's Gate*, en Vancouver, con el fin de demostrar así que estos modelos, en conjunción con experimentos en túnel para permitir su correcta calibración, pueden ser una herramienta valiosa de diseño. Los coeficientes aerodinámicos obtenidos representan sin embargo sólo una aproximación a los experimentales, observándose errores apreciables, quizá atribuibles a la forma plana de la sección, lo que penalizaría con errores numéricos la determinación de la sustentación para pequeños ángulos de ataque (experimentalmente nula).

Determinación de los coeficientes aerodinámicos del puente del Bimilenario de Elche

El puente de Elche salva el cauce del río Vinalopó a su paso por la ciudad. Es un puente colgante de pila única, razón por la cual podría denominarse puente semi-colgante, ya que uno de los extremos consiste en un estribo simple en el que apoya el tablero y sobre el que se anclan los dos cables sustentadores principales, formados por dieciseis cables de 125 mm. En el otro extremo, una alta pila prismática de hormigón de 45,9 m de altura sujeta los cables y los reconduce a sendos macizos de anclaje situados en la rotonda de entrada al puente. La longitud total de la estructura, contando la pila y los accesos, es de 292,2 m, siendo la luz libre del vano suspendido de 161,90 m. Las 24 parejas de péndolas que parten de los cables principales, y que están formadas por cables de 60 mm, se hallan equiespaciadas cada 6 metros a lo largo del tablero. El tablero es muy aerodinámico; tiene una anchura de 23 m, y es de canto variable con un máximo de 0,95 m en su centro, a lo que se añade en la parte superior un cajón no estructural para paso de servicios de 0,95 m de alto. La sección estructural del tablero es mixta, y se halla constituida por una losa superior de hormigón armado y una estructura inferior metálica formada por 9 almas longitudinales continuas y almas transversales con rigidizadores en los ejes de sustentación. En la Figura 32 se han incluido dos vistas isométricas del puente y del tablero, extraídas de ²⁸.

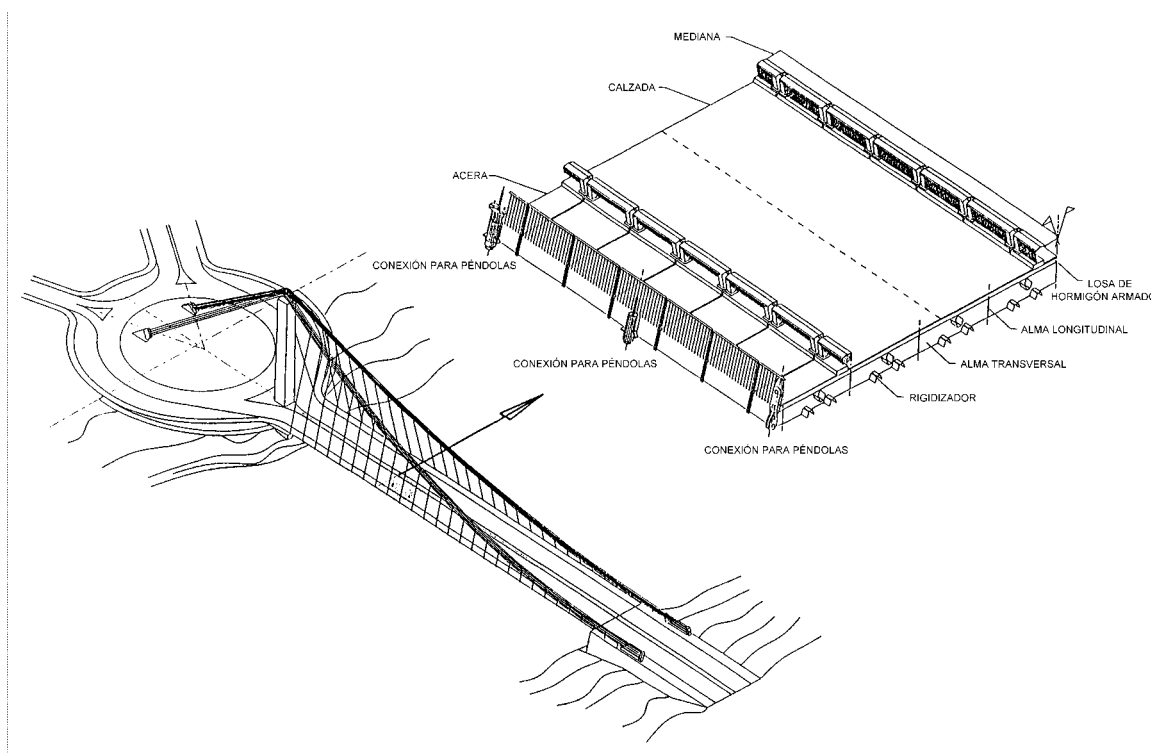


Figura 32. Vistas isométricas del puente del Bimilenario de Elche (de ²⁸)

El ensayo en túnel de viento en la universidad Western Ontario fue encargado por la empresa Fhecor Ingenieros Consultores, S.A. como parte de la labor de diseño y concepción del puente, que fue auspiciado por la Conselleria d'Obres Públiques, Urbanisme i Transports de la Generalitat Valenciana, ahora Conselleria de Infraestructures i Transport.

El objetivo del estudio era comprobar la seguridad del puente frente a viento, aspecto crucial dada la gran esbeltez del tablero y el hecho de ser un puente colgante sobre un cauce de unos 30 m de profundidad, sometido por tanto a vientos de cierta intensidad. Para ello se llevaron a cabo una serie de ensayos en túnel de viento sobre un modelo del tablero a escala 1:60 de 1,22 m de longitud, tanto de un modo estático, como de un modo dinámico. Los ensayos tuvieron lugar con viento de aproximación laminar (intensidad de la turbulencia $I_u=0,5\%$) y con viento turbulento ($I_u=9\%$).

Basándonos en los resultados estáticos (coeficientes de empuje y sustentación) se ha pretendido estudiar si el modelo de vórtices discretos arroja resultados suficientemente fiables como para sustituir, en fase de prediseño, las pruebas estáticas en túnel de viento por simulaciones numéricas, mucho menos costosas, de tal modo que seamos capaces de depurar el diseño del tablero en gabinete en la fase de anteproyecto, para posteriormente realizar las pruebas finales en túnel de viento sobre secciones más cercanas al óptimo buscado.

Para ello, se han reproducido los ensayos incluidos en el referido informe. Se ha simulado el flujo de viento alrededor de la sección del modelo a escala ensayado. Se han despreciado las barreras de seguridad y las barandillas laterales del puente, y se ha simplificado el cajón central para el paso de servicios. En la Figura 33 se muestra un esquema del modelo de tablero ensayado en túnel de viento, extraído de ²⁸, y en la Figura 34 se incluye el esquema geométrico de la sección introducida en el modelo numérico, con indicación de los ejes y la orientación del ángulo de ataque.

En ²⁸ no se cita la gama de números de Reynolds ensayados, habiéndose optado en nuestro trabajo por un número de Reynolds de 30.000 basado en la anchura del tablero del modelo a escala. Al respecto recordemos que normalmente se admite que el flujo alrededor

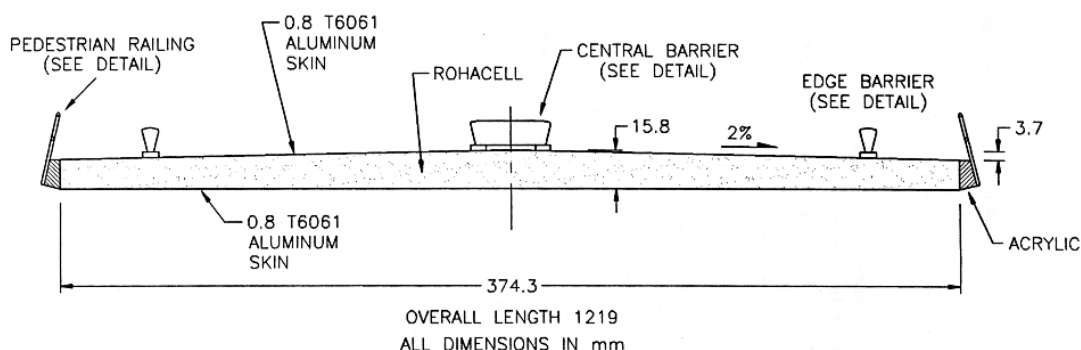


Figura 33. Esquema de la sección modelada en los ensayos en túnel de viento (de ²⁸)

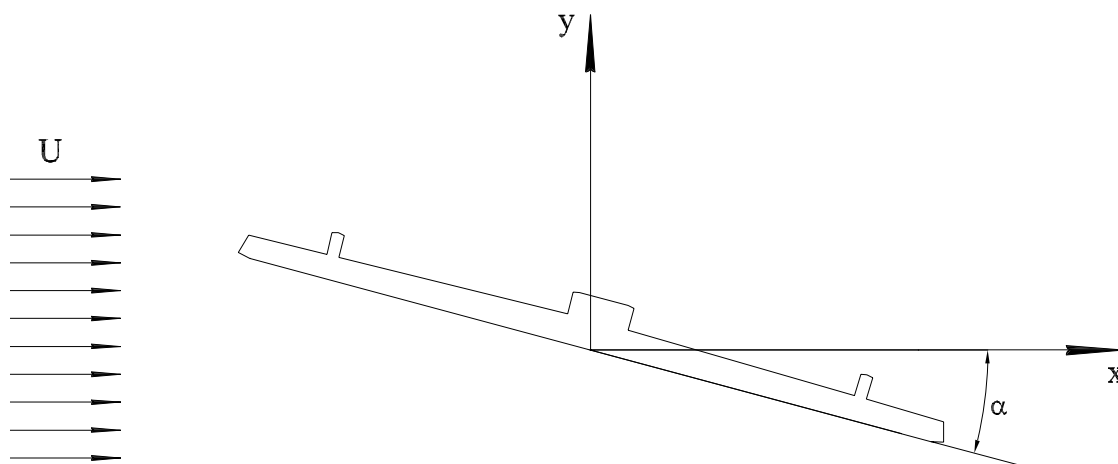


Figura 34. Esquematización del flujo alrededor del tablero del puente de Elche

de cuerpos de formas angulosas (por ejemplo un tablero de puente) es poco sensible al número de Reynolds. No obstante, trabajos experimentales recientes, como el de Schewe y Larsen⁴⁵ o el de Matsuda *et al.*³³, aportan nuevos datos al respecto, pudiéndose asegurar que los coeficientes aerodinámicos obtenidos experimentalmente en túneles de viento (por tanto con números de Reynolds más bajos) son conservadores respecto a los esperables en condiciones reales, con Re mucho mayores. La insensibilidad al número de Reynolds es menor en cuerpos estilizados, debido a que la configuración de la estela se torna muy sensible a pequeños cambios en las condiciones del flujo.

Por otro lado, la turbulencia del flujo de aproximación en el modelo es nula, dado que el modelo no admite turbulencia de entrada, por lo que los resultados obtenidos deberían concordar más con los correspondientes a flujo de aproximación laminar. Los ángulos de ataque ensayados comprenden la misma gama ensayada experimentalmente.

No es posible comparar resultados referentes al flujo, como velocidades, espectros de turbulencia en la estela, o configuración del flujo, dado que, lamentablemente, los ensayos experimentales estáticos obtuvieron como único resultado los coeficientes de fuerza medios (arrastre, sustentación y momento torsional o equivalentes según ejes coordenados) referidos a la anchura del puente, en función del ángulo de ataque.

En las Figuras 35 y 36 se observan los resultados de los coeficientes C_D y C_L deducidos con el modelo, en función del ángulo de ataque, comparados con los resultados experimentales.

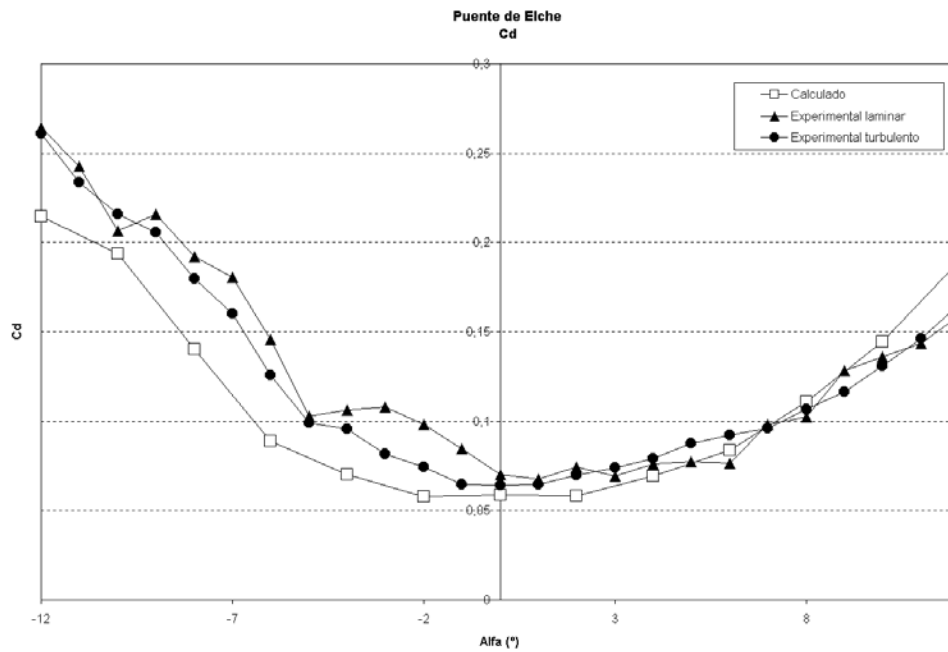


Figura 35. Comparación entre los coeficientes de empuje del tablero del puente de Elche obtenidos experimentalmente y los calculados con el modelo

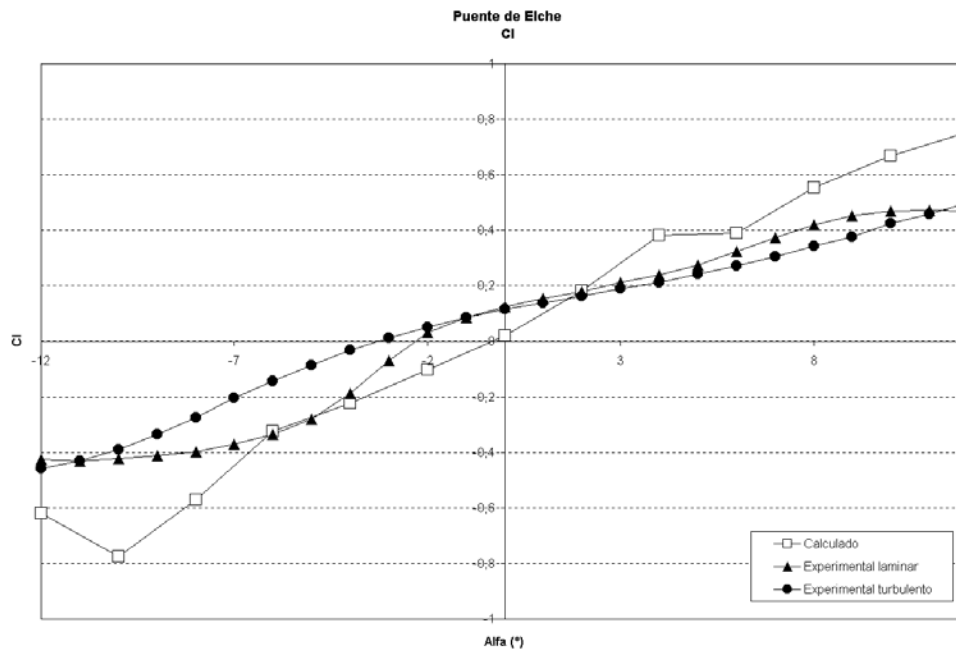


Figura 36. Comparación entre los coeficientes de sustentación del tablero del puente de Elche obtenidos experimentalmente y los calculados con el modelo

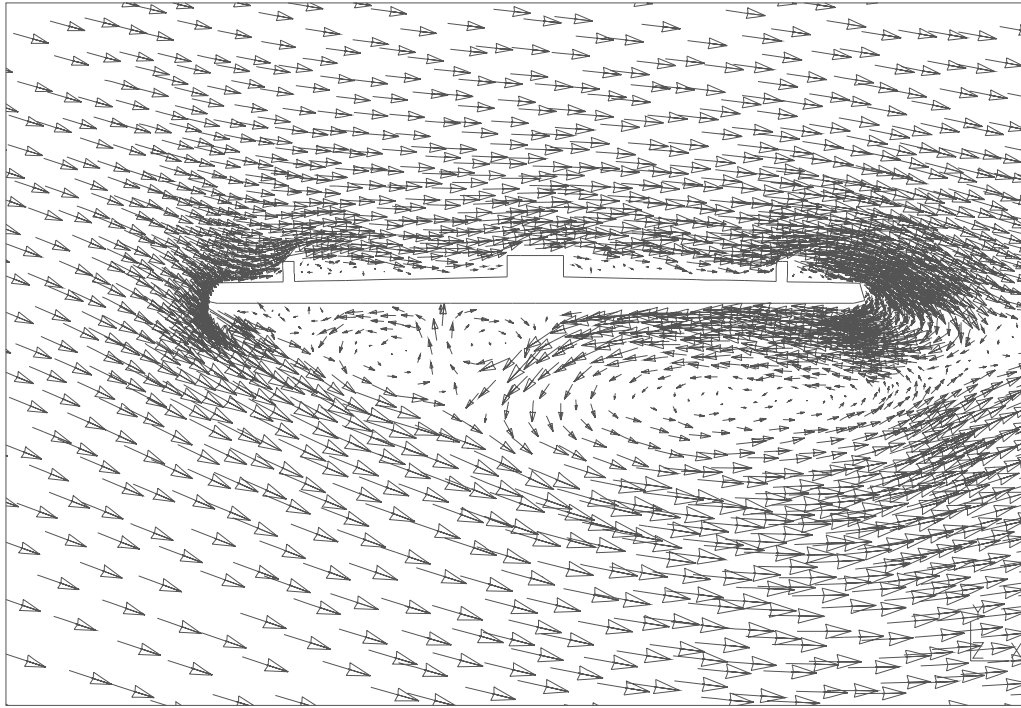


Figura 37. Velocidades alrededor del tablero para $\alpha=-8$. La velocidad de aproximación es 1,125 m/s. La velocidad máxima es 1,758 m/s

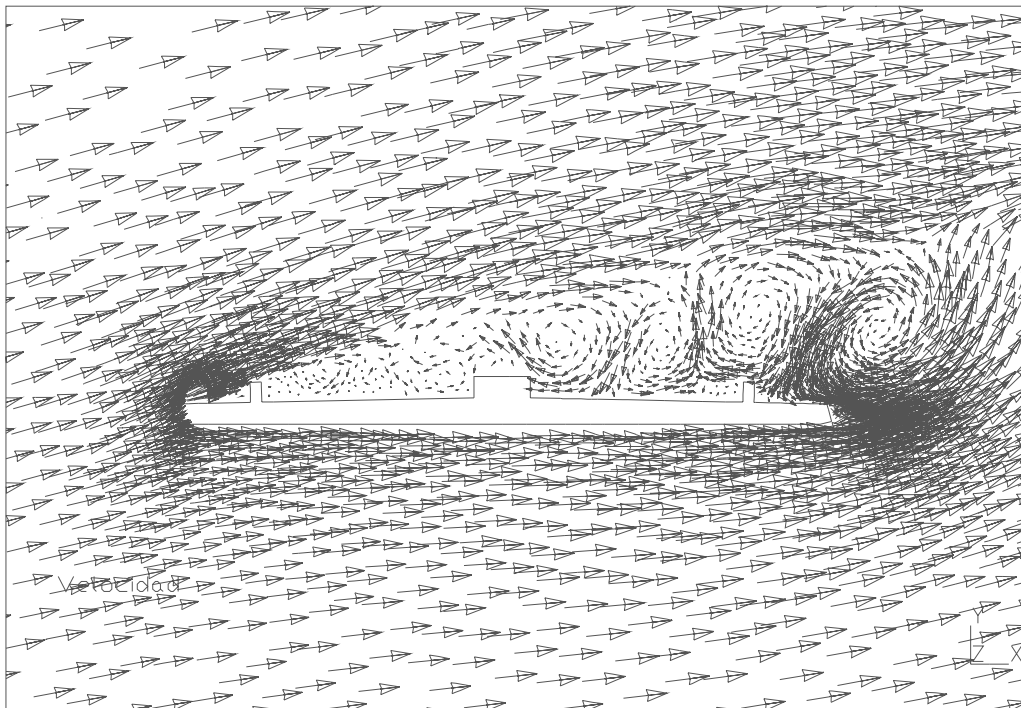


Figura 38. Velocidades alrededor del tablero para $\alpha=12$. La velocidad de aproximación es 1,125 m/s. La velocidad máxima es 1,649 m/s

En general, puede afirmarse que los resultados obtenidos con el modelo concuerdan bastante bien con los experimentales. Valorando el conjunto de ángulos, la estimación numérica es menos acertada para el coeficiente C_L , dado que los valores de este coeficiente estimados mediante el modelo son como promedio un 33 % superiores a los experimentales. En ambos casos la simulación numérica se ajusta más en módulo a los datos experimentales para ángulos de ataque positivos, lo que podría deberse a que en estos casos la porción de sección sometida a más simplificaciones geométricas y la que da origen a fenómenos más complejos se halla a sotavento, enmascarada en la zona de recirculación.

En la Figura 37 se observa el campo de velocidades instantáneas en las proximidades de la sección para $\alpha=8$. Se aprecia, además de la fuerte aceleración del flujo en la parte superior del extremo a sotavento de la sección debida a la contracción de las venas fluidas, el fuerte reflujo que tiene lugar en la cara inferior de la sección, también en la parte de sotavento, como consecuencia del paso de un gran remolino en la zona de recirculación.

En la Figura 38 se observa el campo de velocidades instantáneas para $\alpha=12$. Se comprueba la fuerte aceleración del flujo que tiene lugar a la salida de la sección, como consecuencia de la conjunción de dos acciones: un fuerte vórtice de circulación positiva a punto de desprenderse en la cara superior, y un flujo rectilíneo en la parte inferior que, no sólo no sufre merma de velocidad respecto a la velocidad de aproximación debido a la ausencia de obstáculos, sino que es sometido a una aceleración por la aproximación de las líneas de corriente que impone el extremo de la sección. Así mismo se aprecia que el tren de vórtices superior, debido al fuerte ángulo de ataque, llega a constar de cuatro vórtices claramente formados (incluyendo el mencionado anteriormente), de circulaciones alternantes, entre la zona de paso de servicios y el extremo de la sección.

CONCLUSIONES

El objetivo fundamental del presente trabajo ha sido el desarrollo de un modelo de vórtices discretos, con el fin de disponer de una herramienta de modelación numérica del flujo de viento a su paso por un tablero de puente.

Desde un punto de vista teórico se han obtenido conclusiones relativas a la concepción del modelo. Así, en relación al cálculo de fuerzas, pese a que algunos autores aplican la ecuación de impulso angular de la vorticidad a la determinación del momento, se ha concluido que este resultado requiere ineludiblemente el cálculo de las presiones sobre el contorno. La aplicación de esta fórmula a la determinación del momento produce resultados erróneos, dado que en realidad no existe una expresión equivalente a la ecuación de impulso de vorticidad válida para el momento en el caso de flujo alrededor de contornos. Otra conclusión teórica obtenida es que la imposición simultánea de la condición de contorno de no penetración y no deslizamiento produce resultados inestables.

Otro hecho importante es que la magnitud de las fluctuaciones presentes en la evolución temporal de los coeficientes aerodinámicos es proporcional al número de vórtices y a la longitud del intervalo temporal de cálculo e inversamente proporcional al radio del núcleo de los vórtices discretos y al intervalo temporal. Todo parece indicar, pues, que una distribución de vorticidad más suavizada hace disminuir las fluctuaciones. En todo caso, con altos números de Reynolds, se requiere un mayor número de vórtices para conseguir cotas de error similares.

Además, la eficiencia en la reducción del coste computacional empleando el método de correcciones locales disminuye conforme se hace menor el radio de interacción directa, y en todo caso el ahorro en tiempo no es proporcional a la disminución del área de interacción directa. El método no afecta al mecanismo de generación de vórtices y consigue el objetivo fundamental de hacer proporcional la duración de la simulación al número de vórtices. Mediante la aplicación del modelo se ha concluido que con un radio de interacción tan pequeño como el 6 % de la dimensión representativa del cuerpo modelado se obtienen buenos resultados, que apenas difieren de los obtenidos calculando la totalidad de las interacciones.

Desde un punto de vista práctico, las predicciones del modelo referentes al campo de velocidades en flujos alrededor de cilindros concuerdan muy bien con los valores experimentales (líneas de corriente, velocidad media, intensidad de la turbulencia, energía cinética, velocidades instantáneas,...). Sin embargo, en la aplicación del modelo a flujos alrededor de

contornos con esquinas, la precisión en la determinación de los coeficientes aerodinámicos y el número de Strouhal es peor, presumiblemente debido a una duración de las simulaciones menor que la requerida, que somete la media a un mayor error. En este caso, el algoritmo de creación de vórtices, pese a su carácter homogéneo, concentra la presencia de vórtices alrededor de los puntos de separación, verificándose así su buen comportamiento. En flujos alrededor de cilindros rectangulares los resultados empeoran con relaciones de aspecto bajas, es decir, cuando la zona de recirculación ocupa un área proporcionalmente mayor respecto al sólido, lo que también ocurre en otros modelos.

En todo caso las simulaciones muestran en la configuración de cada flujo fenómenos comprobados experimentalmente. Así, la aplicación del modelo al flujo alrededor de un cilindro circular nos ha permitido comprobar, como principal conclusión desde el punto de vista fluidodinámico, que los fenómenos de protuberancia y vórtice secundario, tal y como fueron descritos por Bouard y Coutanceau, pueden darse sucesivamente en una misma simulación de flujo a bajos números de Reynolds ($Re=550$). Si atendemos a la capacidad del modelo para reproducir correctamente los fenómenos α y β –según la terminología de los mismos autores–, es posible que el modelo esté mostrándonos ciertamente una pauta que sigue el flujo en la realidad. En el caso de cilindros cuadrangulares y rectangulares, se han reproducido otros fenómenos fundamentales, tales como los trenes de vórtices y las parejas de vórtices. Respecto a este segundo fenómeno, y en base a la experiencia obtenida con las simulaciones efectuadas, se aventura aquí la hipótesis de que su aparición pueda relacionarse con el hecho de que los dos vórtices principales de la estela sean de similar tamaño, hecho que se da con una configuración de flujo similar en los dos puntos de separación principales. Así, en el flujo alrededor de un cuadrado, cabría esperar la aparición de parejas de vórtices sóloamente con ángulos de ataque muy bajos o muy altos.

En definitiva, se ha comprobado que el modelo es capaz de simular de forma razonablemente fiel el flujo de viento interceptado por un contorno de formas no aerodinámicas, con presencia de grandes zonas de recirculación y estelas turbulentas, por lo que se concluye que es viable su aplicación a secciones transversales de tableros de puente con el objetivo de determinar las fuerzas ejercidas sobre la estructura y profundizar de paso en el conocimiento de los fenómenos implicados. En este sentido, mediante la simulación del flujo alrededor de la sección del tablero del puente del Bimilenario de Elche, se ha confirmado la capacidad del modelo como herramienta de diseño, puesto que los resultados relativos a los coeficientes de empuje y sustentación se aproximan razonablemente bien a los experimentales.

AGRADECIMIENTOS

El primer autor desearía dar las gracias al Departamento de Ingeniería Hidráulica de la UPV, y en especial al profesor Juan B. Marco Segura, por la oportunidad que se le brindó de desarrollar la presente investigación como objeto de su Tesis Doctoral, así como al Laboratorio de Tecnología de Computadores de esta universidad, y en concreto al profesor José Vicente Busquets, por el uso desinteresado de sus instalaciones y equipos. Finalmente, este autor agradece a Lorenzo Mataix Brotons la información sobre el cálculo aerodinámico del Puente de Elche, facilitada tan amablemente.

REFERENCIAS

- 1 CH.R. Anderson, A method of local corrections for computing the velocity field due to a distribution of vortex blobs, *Journal of Computational Physics*, Vol. **62**, pp. 111-123, (1986).
- 2 S.B. Baden y E.G. Puckett, A fast vortex method for computing 2D viscous flow, *Journal of Computational Physics*, Vol. **91**, pp. 278-297, (1990).
- 3 P.K. Banerjee y R. Butterfield, *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill. (1981).
- 4 B. Bienkiewicz y R.F. Kutz, Applying the discrete vortex method to flow about bluff bodies, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. **36**, pp. 1011-1020, (1990).

- 5 B. Bienkiewicz y R.F. Kutz, Aerodynamic loading and flow past bluff bodies using discrete vortex method, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. **46-47**, pp. 619-628, (1993).
- 6 R.D. Blevins, Application of the discrete vortex method to fluid-structure interaction, *Proceedings of Flow Induced Vibrations*, Pub. ASME, Pressure Vessels and Piping Division, Vol. **154**, pp. 131-140, (1989).
- 7 R. Bouard y M. Coutanceau, The early stage of development of the wake behind an impulsively started cylinder for $40 < Re < 10^4$, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. **101**, pp. 583-607, (1980).
- 8 J. Carrier, L. Greengard y V. Rokhlin, A fast adaptive multipole algorithm for particle simulations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. **9**, N° 4, pp. 669-686, (1988).
- 9 C.-C. Chang, Random Vortex Methods for the Navier-Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. **76**, pp. 281-300, (1988).
- 10 C.-C. Chang y R.-L. Chern, A numerical study of flow around an impulsively started circular cylinder by a deterministic vortex method, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. **233**, pp. 243-263, (1991).
- 11 A.J. Chorin, Numerical study of slightly viscous flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. **57**, N° 4, pp. 785-796, (1973).
- 12 A.J. Chorin, Vortex sheet approximation of boundary layers, *Journal of Computational Physics*, Vol. **27**, pp. 428-442, (1978).
- 13 J.P. Christiansen, Numerical simulation of hydrodynamics by the method of point vortices, *Journal of Computational Physics*, Vol. **13**, N° 3, pp. 363-379, (1973).
- 14 N.R. Clarke y O.R. Tutty, Construction and validation of a discrete vortex method for the two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, *Computers & Fluids*, Vol. **23**, N° 6, pp. 751-783, (1994).
- 15 G.H. Cottet, A particle-grid superposition method for the Navier-Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. **89**, pp. 301-318, (1990).
- 16 Y. Couder y C. Basdevant, Experimental and numerical study of vortex couples in two-dimensional flows, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. **173**, pp. 225-251, (1986).
- 17 J. Courchesne y A. Laneville, A comparison of correction methods used in the evaluation of drag coefficient measurements for two-dimensional rectangular cylinders, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. **101**, pp. 506-510, (1979).
- 18 L. Van Dommelen y E.A. Rundensteiner, Fast, adaptive summation of point forces in the two-dimensional Poisson equation, *Journal of Computational Physics*, Vol. **83**, pp. 126-147, (1989).
- 19 D.F.G. Durao, M.V. Heitor y J.C.F. Pereira, Measurements of turbulent and periodic flows around square cross-section cylinder, *Experiments in Fluids*, Vol. **6**, N° 5, pp. 298-304, (1988).
- 20 ESDU, *Fluid forces, pressures and moments on rectangular blocks*, Engineering Sciences Data Item Number 71016, (1971).
- 21 R. Franke, W. Rodi y B. Schöning, Numerical calculation of laminar vortex-shedding flow past cylinders, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. **35**, pp. 237-257, (1990).
- 22 C. Geuzaine y J.F. Remacle, *Gmsh, a three-dimensional mesh generator with built-in pre- and post-processor facilities*, <http://www.geuz.org/gmsh/>.
- 23 L. Greengard y V. Rokhlin, A fast algorithm for particle simulations, *Journal of Computational Physics*, Vol. **73**, pp. 325-348, (1987).

- 24 R.W. Hockney, S.P. Goel y J.W. Eastwood, Quiet high-resolution computer models of a plasma, *Journal of Computational Physics*, Vol. **14**, pp. 148-158, (1974).
- 25 T. Igarashi, Characteristics of the flow around a square prism, *Bull. JSME.*, Vol. **27**, N° 231, pp. 1858-1865, (1984).
- 26 J. Katz y A. Plotkin, *Low Speed Aerodynamics*, Cambridge University Press, (2001).
- 27 T. Kim y M.R. Flynn, Numerical simulation of air flow around multiple objects using the discrete vortex method, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. **56**, pp. 213-234, (1995).
- 28 J.P.C. King y A.G. Davenport, *A study of wind effects for the Elche Bridge, Spain*, The Boundary Layer Wind Tunnel Laboratory - Faculty of Engineering Science, the University of Western Ontario, (1993).
- 29 P. Koumoutsakos y A. Leonard, High resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. **296**, pp. 1-38, (1995).
- 30 P. Koumoutsakos, A. Leonard y F. Pépin, Boundary conditions for viscous vortex methods, *Journal of Computational Physics*, Vol. **113**, pp. 52-61, (1994).
- 31 A. Leonard, Review: vortex methods for flow simulations, *Journal of Computational Physics*, Vol. **37**, pp. 89-335, (1980).
- 32 D.A. Lyn, S. Einav, W. Rodi y J.-H. Park, A Laser-Doppler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. **304**, pp. 285-319, (1995).
- 33 K. Matsuda, K.R. Cooper, H. Tanaka, M. Tokushige y T. Iwasaki, An investigation of Reynolds number effects on the steady and unsteady aerodynamic forces on a 1:10 scale bridge deck section model, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. **89**, pp. 619-632, (2001).
- 34 A.A. Mustto y G.C.R. Bodstein, Vortex method simulation of the flow around a circular cylinder, *AIAA Journal*, Vol. **38**, N° 6, pp. 1100-1102, (2000).
- 35 A.L. Ni, Boundary conditions for the vorticity-velocity formulation of Navier-Stokes equations, *AIAA Journal*, Vol. **34**, N° 2, pp. 416-418, (1995).
- 36 E.D. Obasaju, An investigation of the effects of incidence of the flow around a square section cylinder, *Aeronaut. Quart.*, Vol. **34**, pp. 243-259, (1983).
- 37 Y. Ogami y T. Akamatsu, Viscous flow simulation using the discrete vortex model-the diffusion velocity method, *Computers & Fluids*, Vol. **19**, N° 3/4, pp. 433-441, (1991).
- 38 A. Okajima, Numerical simulation of flow around rectangular cylinders, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. **33**, pp. 171-180, (1990).
- 39 Y. Otsuki, K. Washizu, H. Tomizawa y A. Ohya, A note on the aeroelastic instability of a prismatic bar with square section, *Journal of sound Vibration*, Vol. **34**, N° 2, pp. 233-248, (1974).
- 40 P. Ploumhans y G.S. Winckelmans, Vortex methods for high-resolution simulations of viscous flow past bluff bodies of general geometry, *Journal of Computational Physics*, Vol. **165**, pp. 354-406, (2000).
- 41 W. Rodi, On the simulation of turbulent flow past bluff bodies, *Journal of Wind Engineering and industrial Aerodynamics*, Vol. **46-47**, pp. 3-19, (1993).
- 42 S. Rouvreau y L. Perault, Two-dimensional viscous vortex flow around a circular cylinder, *Aerospace and Science Technology*, Vol. **5**, pp. 85-94, (2001).

- 43 P.G. Saffman, *Vortex Dynamics*, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, Cambridge University Press, (1995).
- 44 T. Sarpkaya y C.J. Ihrig, Impulsively started steady flow about rectangular prisms: experiments and discrete vortex analysis, *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. **108**, pp. 47-54, (1986).
- 45 G. Schewe y A. Larsen, Reynolds number effects in the flow around a bluff bridge deck cross section, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. **74-76**, pp. 829-838, (1998).
- 46 P.A. Smith y P.K. Stansby, Impulsively started flow around a circular cylinder by the vortex method, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. **194**, pp. 45-77, (1988).
- 47 P.R. Spalart y A. Leonard, Computation of separated flows by a vortex-tracing algorithm, *AIAA Journal*, Vol. **81**, pp. 1246-1259, (1981).
- 48 P.R. Spalart, *Vortex methods for separated flows*, Von Karman Inst. for Fluid Mech., Lecture series, pp. 1988-05, (1988).
- 49 I. Taylor y M. Vezza, Prediction of unsteady flow around square and rectangular section cylinders using a discrete vortex method, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. **82**, pp. 247-269, (1999).
- 50 G. Turkiyyah, D. Reed y J. Yang, Fast vortex methods for predicting wind-induced pressures on buildings, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. **58**, pp. 51-79, (1995).
- 51 T. Vejrum, D.J. Queen, G.L. Larose y A. Larsen, Further aerodynamic studies of Lion's Gate Bridge - 3 lane renovation, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. **88**, pp. 325-341, (2000).
- 52 J.H. Walther, Discrete vortex method for two-dimensional flow past bodies of arbitrary shape undergoing prescribed rotary and traslational motion, Ph.D. Thesis. Technical University of Denmark, (1994).
- 53 J.C. Wu, Numerical boundary conditions for viscous flow problems, *AIAA Journal*, Vol. **14** N°8, pp. 1042-1049, (1976).
- 54 J.C. Wu y J.F. Thompson, Numerical solutions of time-dependent incompressible Navier-Stokes equations using an integro-differential formulation, *Computers & Fluids*, Vol. **1**, pp. 197-215, (1973).