

Métodos Runge-Kutta implícitos de alto orden para flujos incompresibles

A. Montlaur · S. Fernandez-Mendez · A. Huerta

Recibido: Marzo 2010, Aceptado: Noviembre 2010
©Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España 2011

Resumen Las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible se interpretan como un sistema de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas (EDA), es decir un sistema de EDOs correspondiendo a la ecuación de conservación del momento, más restricciones algebraicas correspondiendo a la condición de incompresibilidad. Se analiza la estabilidad asintótica de los métodos Runge-Kutta aplicados a estos sistemas EDA. Se comparan métodos de Runge-Kutta semi-implícitos y totalmente implícitos desde el punto de vista de orden de convergencia y de estabilidad. Ejemplos numéricos usando una formulación de Galerkin discontinuo de alto orden, con aproximaciones solenoidales, muestran la aplicabilidad de la propuesta y comparan sus cualidades con métodos clásicos para flujo incompresible.

HIGH-ORDER IMPLICIT RUNGE-KUTTA METHODS FOR UNSTEADY INCOMPRESSIBLE FLOWS

Summary The spatial discretization of the unsteady incompressible Navier-Stokes equations is stated as system of Differential Algebraic Equations (DAEs), corresponding to the conservation of momentum equation plus the constraint due to the incompressibility condition. Asymptotic stability of Runge-Kutta methods applied to the solution of the resulting index-2 DAE

system is analyzed, allowing a critical comparison of semi-implicit and fully implicit Runge-Kutta methods, in terms of order of convergence and stability. Numerical examples, considering a Discontinuous Galerkin formulation with piecewise solenoidal approximation, demonstrate the applicability of the approach, and compare its performance with classical methods for incompressible flows.

1. Introducción

En el pasado, el desarrollo de técnicas numéricas para flujo computacional se ha centrado principalmente en cálculos estacionarios, sobretodo debido a las restricciones en coste computacional. No obstante, muchos fenómenos físicos son naturalmente transitorios, como por ejemplo flujos de estela o actuadores de fluidos, haciendo necesarias formulaciones numéricas eficientes para flujos transitorios, modelizados por ejemplo por las ecuaciones de Navier-Stokes. Buenas propiedades de estabilidad y altos ordenes de precisión son requisitos primordiales, especialmente en problemas con capas límite o con número de Reynolds alto. Una dificultad importante en la simulación de flujos incompresibles surge del acoplamiento de la velocidad y de la presión a través de la condición de incompresibilidad. Los métodos con proyección, como los métodos de paso fraccionado, pueden superar esta dificultad, véase [1,2]. Siguiendo las ideas originales de Chorin y Temam, varios autores han usado métodos de paso fraccionado con éxito para flujos incompresibles, véase por ejemplo [3,4,5,6]. Los términos de presión/incompresibilidad se tratan implícitamente, mientras los términos viscoso y convectivo se tratan de manera explícita, semi-implícita o totalmente implícita. Sin embargo, mientras los esquemas explícitos tie-

A. Montlaur^{1,2} · S. Fernandez-Mendez^{1,3} · A. Huerta^{1,3}
1: Laboratori de Càlcul Numèric, Universitat Politècnica de Catalunya
Mòdul C2, Jordi Girona 1-3, E-08034 Barcelona, España
{adeline.de.montlaur, sonia.fernandez, antonio.huerta}@upc.edu,
<http://www-lacan.upc.edu>
2: Escola Politècnica Superior de Castelldefels
3: E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

nen un coste menor, no hay tantos problemas realistas que permitan utilizar esquemas explícitos. En efecto, en numerosas situaciones, grandes variaciones del tamaño de los elementos, necesarias para resolver escalas espaciales múltiples encontradas en un flujo con número de Reynolds alto o en capas límite, hacen poco práctico el uso de técnicas explícitas de integración temporal. En estos casos, se deben usar esquemas implícitos, como por ejemplo métodos de paso fraccionado implícito, métodos de Crank-Nicolson [7], o α -generalizados [8]. Desgraciadamente, estos métodos clásicos para flujos incompresibles sólo llegan a segundo orden de precisión temporal. Por otro lado, integradores temporales de alto orden se han usado ampliamente para flujos compresibles, como por ejemplo métodos multipaso de diferencia regresiva [9] o métodos Runge-Kutta (RK) de alto orden. En particular, los métodos RK presentan dos ventajas importantes frente a los métodos de multipaso: sus regiones de estabilidad son mayores y la implementación de paso de tiempo variable es simple. Por eso los métodos RK de alto orden se han aplicado con éxito a problemas de flujo compresible, cuya discretización espacial (por ejemplo con elementos finitos o volúmenes finitos) lleva a un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), [10,11].

En este trabajo, se exploran las posibilidades de aplicar métodos implícitos RK (IRK) de alto orden a la simulación de flujos incompresibles. Para ello, se interpreta la discretización espacial de las ecuaciones transitorias de Navier-Stokes para flujos incompresibles como un sistema de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas (EDA) de índice 2, [12]; es decir, un sistema de EDO correspondiendo a la ecuación de conservación del momento, más restricciones algebraicas correspondiendo a la condición de incompresibilidad. Esta interpretación ya se consideró en [13] para la implementación de métodos RK implícitos de tercer y quinto orden. Aquí se realiza una comparación general y crítica, en términos de precisión y de estabilidad: se recuerdan los órdenes de convergencia de los métodos RK para EDA de índice 2 y se presenta un análisis de estabilidad de la solución de las ecuaciones transitorias de Navier-Stokes. Se recomiendan métodos RK específicos para simular flujos incompresibles, con estabilidad incondicional y precisión de alto orden. Es más, ejemplos numéricos, usando una formulación de Galerkin discontinuo con aproximaciones solenoidales, permiten comparar los métodos RK recomendados con otros métodos clásicos como el método de Crank-Nicolson y un método de paso fraccionado.

Este artículo se estructura de la siguiente manera. La Sección 2 recuerda los conceptos básicos de los métodos RK implícitos aplicados a EDA de índice 2, moti-

vados por su aplicación a problemas de flujo incompresible. La metodología propuesta en [14,15] se particulariza al análisis de estabilidad de los métodos RK aplicados a sistemas EDA de índice 2 con una estructura matricial como la que proviene de la discretización espacial de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible. En la Sección 3 se recuerda el método *Discontinuous Galerkin* (DG) con penalización interior propuesto en [16,17] para las ecuaciones estacionarias de Stokes y Navier-Stokes, y se extiende a las ecuaciones transitorias de Navier-Stokes. El esquema resultante IRK-DG tiene propiedades de alto orden tanto en tiempo como en espacio. Además, el uso de aproximaciones solenoidales a trozos conduce a una reducción importante del número de grados de libertad. En la Sección 4, ejemplos numéricos demuestran la aplicabilidad de los métodos, validan el estudio teórico de la estabilidad asintótica y comparan la precisión y el coste computacional de los métodos RK con los esquemas clásicos de Crank-Nicolson y de paso fraccionado.

2. Métodos de Runge-Kutta para flujo no estacionario incompresible

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$ un dominio abierto con frontera $\partial\Omega$, y n_{sd} la dimensión espacial. La forma fuerte del problema transitorio de Navier-Stokes para flujo incompresible se puede escribir como

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - 2\nabla \cdot (\nu \nabla^s \mathbf{u}) + \nabla p + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (1b)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{en } \Gamma_D, \quad (1c)$$

$$-p\mathbf{n} + 2\nu(\mathbf{n} \cdot \nabla^s) \mathbf{u} = \mathbf{t} \quad \text{en } \Gamma_N, \quad (1d)$$

donde $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ es un término fuente, \mathbf{u} la velocidad del flujo, p su presión, ν la viscosidad kinemática y $\nabla^s = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T)$.

Aquí la discretización espacial de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible se efectúa usando un método DG con penalización interior y aproximaciones solenoidales a trozos, como se detalla en la Sección 3. No obstante, los algoritmos analizados en este trabajo se pueden aplicar de la misma manera a otros esquemas de discretización, por ejemplo usando otras formulaciones DG o Galerkin continuo. En cualquier caso, la discretización espacial de las ecuaciones transitorias de Navier-Stokes para flujo incompresible (1) se puede escribir como

$$\begin{cases} \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{C}(\mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{G}p = \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{G}^T \mathbf{u} = \mathbf{f}_2 \end{cases} \quad (2)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa, \mathbf{K} la matriz de difusión, \mathbf{C} la matriz de convección, \mathbf{G} la matriz de presión, \mathbf{u} y \mathbf{p} los vectores de valores nodales, o coeficientes de aproximación de velocidad y presión respectivamente, y \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_2 vectores correspondientes al término fuente y a las condiciones de contorno, véase por ejemplo [18]. Este sistema de n_{dof} grados de libertad, se puede escribir también como

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathcal{F}(t, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \\ 0 = \mathcal{G}(t, \mathbf{u}) \end{cases} \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t, \mathbf{u}, \mathbf{p}) &= \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{f}_1 - \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{C}(\mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{p}), \\ \mathcal{G}(t, \mathbf{u}) &= \mathbf{G}^T \mathbf{u} - \mathbf{f}_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Nótese que $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{G}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}$ es invertible y, por lo tanto, (3) es un sistema EDA de índice 2 de Hessenberg [19].

Los sistemas de EDA tienen su origen en la modelización de numerosos fenómenos físicos y químicos, y se han estudiado en profundidad en los últimos años [19,20]. Se clasifican en función de su índice, es decir el número mínimo de veces que se tiene que derivar el sistema de EDA para obtener un sistema de EDO. Por ejemplo, las ecuaciones discretas de Stokes, Oseen y Navier-Stokes para flujos incompresibles, son sistemas EDA de índice 2.

Muchos métodos originalmente definidos para EDO se han adaptado a EDA, como por ejemplo las fórmulas de diferencia regresiva [21] o los métodos de Runge-Kutta [20]. En un principio, los métodos de Runge-Kutta (RK) se han considerado como pobres competidores frente a los métodos de multipaso, principalmente porque para la mayoría de los sistemas EDA y de los métodos RK, el orden de convergencia obtenido era menor al obtenido para EDO, y cuanto mayor era el índice del sistema EDA, mayor la reducción de orden. Sin embargo, resultados posteriores de [12] demostraron que métodos RK adecuados pueden formar la base de un código competitivo, porque son incondicionalmente estables, y pueden alcanzar ordenes de convergencia igual de altos que cuando se aplican a sistemas de EDO.

En este trabajo, se consideran métodos de Runge-Kutta para sistemas EDA de índice 2 [12]. Un método de Runge-Kutta de s etapas para (3) se escribe como

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{l}_i \\ \mathbf{p}^{n+1} &= \mathbf{p}^n + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{k}_i \end{aligned} \quad (5)$$

donde \mathbf{l}_i y \mathbf{k}_i se definen como la solución del sistema

$$\mathbf{l}_i = \mathcal{F} \left(t^n + c_i \Delta t, \mathbf{u}^n + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{l}_j, \mathbf{p}^n + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{k}_j \right) \quad (6a)$$

$$0 = \mathcal{G} \left(t^n + c_i \Delta t, \mathbf{u}^n + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{l}_j \right) \quad (6b)$$

para $i = 1, \dots, s$. Los coeficientes a_{ij}, b_i, c_i provienen de la tabla de Butcher, cuya forma general se puede ver en la Tabla 1.

Tabla 1. Tabla de Butcher

c_1	a_{11}	a_{12}	\cdots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	\cdots	a_{2s}
\vdots	\vdots	\vdots	\cdots	\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	a_{ss}
	b_1	b_2	\cdots	b_s

Según la forma de la tabla de Butcher, se obtiene un método de Runge-Kutta implícito, semi-implícito o explícito. Se dice que un método de Runge-Kutta es explícito si su tabla de Butcher es estrictamente triangular inferior, es decir $a_{ij} = 0$ para $j \geq i$. Si no, el método es implícito (IRK). En particular, un método implícito es semi-implícito o diagonalmente implícito (DIRK) si $a_{ij} = 0$ para $j > i$ y $a_{ii} \neq 0$ para algún i . Si además todos los coeficientes diagonales (a_{ii}) son iguales, se dice que el método es singularmente diagonalmente implícito (SDIRK). Los métodos SDIRK son especialmente interesantes para problemas lineales, como por ejemplo el problema de Stokes, ya que se puede usar repetidamente la factorización LU almacenada de la matriz.

Este trabajo se centra en métodos totalmente implícitos y semi-implícitos por sus buenas propiedades de estabilidad. En realidad, los métodos explícitos de Runge-Kutta no se pueden aplicar directamente en la forma (5)-(6) a los sistemas EDA de índice 2, porque el sistema resultante (6) es indeterminado. Sin embargo, en [22] métodos explícitos de Runge-Kutta se aplican a EDA, usando una formulación diferente a (5)-(6). En este caso, y sin usar ningún tipo de corrección de la presión, el orden de convergencia de los métodos explícitos de Runge-Kutta es menor que el orden alcanzado para una EDO. Por ejemplo, el esquema RK explícito de 4 etapas aplicado a las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos incompresibles en [22], sólo lleva a un segundo orden de precisión para velocidad y presión, véase [23].

2.1. Métodos IRK y SDIRK

La Tabla 2 muestra los órdenes de convergencia, para la resolución de sistemas EDA de índice 2 y de EDO, para los métodos Radau IA, IIA y Lobatto IIIC de s etapas. Otros métodos como Gauss o Lobatto IIIA se han descartado porque presentan una reducción de orden más alta cuando se aplican a sistemas EDA. Como se ve en la Tabla 2, los órdenes de convergencia más altos para velocidad y presión se obtienen para el método Radau IIA-IRK, manteniendo el orden de convergencia de la velocidad tan alto como para un sistema de EDO.

Tabla 2. Órdenes de convergencia de las soluciones de sistemas EDA de índice 2 y de EDO para métodos Radau IA, IIA y Lobatto IIIC de s etapas [12,24]

Método	EDA: error en \mathbf{u}	EDA: error en p	ODE: error
Radau IA	h^s	h^{s-1}	h^{2s-1}
Radau IIA	h^{2s-1}	h^s	h^{2s-1}
Lobatto IIIC	h^{2s-2}	h^{s-1}	h^{2s-2}

La Tabla 3 muestra la tabla de Butcher para métodos Radau IIA-IRK de 2 y 3 etapas. Los métodos Radau IIA-IRK son un caso especial de los métodos IRK que satisfacen la propiedad adicional $b_j = a_{sj}$ para $j = 1, \dots, s$. Estos métodos destacan de los demás métodos IRK para aplicaciones a EDA dado que en la última etapa \mathbf{u}^{n+1} verifica directamente $\mathcal{G}(t^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) = 0$.

Tabla 3. Diagrama de Butcher para métodos Radau IIA-IRK de 2 (arriba) y 3 (abajo) etapas

	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$	
	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	
		$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	
$\frac{4 - \sqrt{6}}{10}$	$\frac{88 - 7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{296 - 169\sqrt{6}}{1800}$	$-\frac{2 + 3\sqrt{6}}{225}$	
$\frac{4 + \sqrt{6}}{10}$	$\frac{296 + 169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{88 + 7\sqrt{6}}{360}$	$-\frac{-2 - 3\sqrt{6}}{225}$	
1	$\frac{16 - \sqrt{6}}{36}$	$\frac{16 + \sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$	
	$\frac{16 - \sqrt{6}}{36}$	$\frac{16 + \sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$	

Debido a esta propiedad adicional, y a sus altos órdenes de convergencia, se recomiendan los métodos Radau IIA-IRK de 2 y 3 etapas frente a otros métodos IRK.

Nótese que la resolución de un sistema EDA de índice 2, como (3), con un método RK totalmente implícito

de s etapas requiere resolver un sistema de ecuaciones de dimensión $s\mathbf{n}_{\text{dof}}$ en cada paso de tiempo, donde \mathbf{n}_{dof} es el número de grados de libertad en (3). Una alternativa para reducir el coste computacional consiste en usar un método SDIRK.

Por ejemplo, la Tabla 4 enseña el diagrama de Butcher para un método SDIRK de 2 etapas. El coste computacional de un método semi-implícito es considerablemente menor que el de un método totalmente implícito, efectivamente se deben resolver s sistemas de dimensión \mathbf{n}_{dof} en lugar de un problema de dimensión $s\mathbf{n}_{\text{dof}}$ en el esquema totalmente implícito.

Tabla 4. Diagrama de Butcher para un método SDIRK de 2 etapas, con $\gamma = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$

	γ	γ	0
$1 - \gamma$	$1 - 2\gamma$	γ	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Desgraciadamente, como se ve en la Tabla 5, los métodos SDIRK no alcanzan altos órdenes de convergencia.

A la diferencia de los problemas de EDO, aumentar el número de etapas de los métodos SDIRK no mejora el orden de convergencia para sistemas EDA de índice 2. Los órdenes de convergencia de los métodos SDIRK para sistemas EDA de índice 2, se limitan a 2 para la velocidad y 1 para la presión, para 2, 3, 5 etapas¹. Note que se llega al mismo orden con el esquema clásico de Crank-Nicolson, que tiene un coste computacional considerablemente menor (un sistema de dimensión \mathbf{n}_{dof} en cada paso de tiempo), de manera que los métodos SDIRK no aportan ninguna ventaja.

Tabla 5. Ordenes de convergencia para métodos SDIRK para sistemas EDA de índice 2 y para EDO [12,24]

Número de etapas	EDA: error en \mathbf{u}	EDA: error en p	ODE: error
2	2	1	3
3	2	1	4
5	2	1	6

Así, en este trabajo se recomiendan los métodos totalmente implícitos Radau IIA-IRK entre los demás métodos RK para resolver problemas de flujo incompresible. En la Sección 4.3, estos métodos se comparan con

¹ Norsett en [25] dio elementos de prueba que para cualquier s par y más grande que 2, no existe ningún método SDIRK con un orden $s + 1$ para un sistema de EDO. Por eso no aparece ningún método SDIRK de 4 etapas en la Tabla 5.

el método clásico de Crank-Nicolson del punto de vista de precisión y coste computacional. A continuación se comentan sus propiedades de estabilidad asintótica.

2.2. Estabilidad asintótica

Un paso hacia el estudio de las propiedades asintóticas de la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible consiste en considerar las ecuaciones lineales de Oseen. Los resultados de la estabilidad asintótica para este problema pueden luego extenderse a las ecuaciones no lineales de Navier-Stokes. La forma fuerte del problema transitorio de Oseen homogéneo para flujo incompresible es

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - 2\nabla \cdot (\nu \nabla^s \mathbf{u}) + \nabla p + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega, \quad (7a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (7b)$$

donde \mathbf{w} es un campo de velocidad dado, con las condiciones de contorno y de interfaz (1c)-(1d), y la condición inicial $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0$ en Ω . Su forma discretizada es

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{K} + \mathbf{C}) \mathbf{u} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad (8a)$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{u} = 0. \quad (8b)$$

donde ahora \mathbf{C} es también una matriz constante.

Siguiendo los razonamientos en [14,15] sobre las propiedades asintóticas de las soluciones de los sistemas de EDA lineales, y en particular los casos de sistemas de EDA de índice 2, el sistema (7) se reescribe como un sistema de EDA equivalente más simple. Con este propósito se definen $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{K} + \mathbf{C})$ y $\mathbf{H} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T$. De la ecuación (8b) se obtiene

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Multiplicando (8a) por \mathbf{G}^T y resolviendo para \mathbf{p} se obtiene

$$\mathbf{p} = -(\mathbf{G}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T [\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A} \mathbf{u}]. \quad (10)$$

Substituyendo (10) en (8a) se llega a

$$\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T [\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{A} \mathbf{u}] = \mathbf{0},$$

que se puede escribir como

$$(\mathbf{I} - \mathbf{H}) \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

o bien, usando (9) y el hecho que \mathbf{H} es constante con el tiempo,

$$\dot{\mathbf{z}} = -(\mathbf{I} - \mathbf{H}) \mathbf{A} \mathbf{z}, \quad (11)$$

con $\mathbf{z} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \mathbf{u}$. Así el sistema (8) se escribe en tres ecuaciones: una EDO (11) para la variable $\mathbf{z} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \mathbf{u}$ y dos ecuaciones algebraicas (9) y (10), para \mathbf{z} , \mathbf{u} and \mathbf{p} . Así, a partir de los valores propios de $(\mathbf{I} - \mathbf{H}) \mathbf{A}$ y utilizando las funciones de estabilidad de los esquemas de Runge-Kutta, se obtiene una condición necesaria para la estabilidad asintótica de la solución. Es decir, una condición necesaria para un esquema estable es que todos los valores propios de $(\mathbf{I} - \mathbf{H}) \mathbf{A}$ se encuentren en la región de estabilidad del esquema RK escogido. Por ejemplo para los métodos Radau IIA-IRK de 2 y 3 etapas, véase [12], las funciones de estabilidad son

$$R(z) = \frac{6 + 2z}{6 - 4z + z^2}$$

para Radau IIA-IRK de 2 etapas,

$$R(z) = \frac{60 + 24z + 3z^2}{60 - 36z + 9z^2 - z^3}$$

para Radau IIA-IRK de 3 etapas,

con $z = \lambda \Delta t$, y una condición necesaria para la estabilidad es $|R(\lambda \Delta t)| \leq 1$ para todos los valores propios λ de $(\mathbf{I} - \mathbf{H}) \mathbf{A}$ y un paso de tiempo dado Δt . Las regiones de estabilidad se pueden ver en la Figura 1.

Como se comprobará en la Sección 4.1, si el término convectivo se trata de manera conveniente, vea la Observación 1 en la Sección 3, la discretización de las ecuaciones de Oseen o de Navier-Stokes conduce siempre a un sistema de EDA tal que todos los valores propios de $(\mathbf{I} - \mathbf{H}) \mathbf{A}$ tienen parte real negativa. Así, cualquier método que incluya la parte real negativa del plano complejo ($Re(z) \leq 0$) en su región de estabilidad, como es el caso de los métodos Radau IIA-IRK de 2 y 3 etapas, satisface la condición necesaria de estabilidad. La Sección 4.1 corrobora las conclusiones de este análisis teórico a través de ejemplos numéricos, y muestra que la condición de estabilidad establecida previamente es en la practica una condición necesaria y suficiente.

3. Formulación de Galerkin discontinuo para las ecuaciones transitorias de Navier-Stokes para flujo incompresible

En esta sección se presenta la discretización del problema (1) siguiendo una formulación DG con penalización interior (IP) [16,17]. Para ello, se supone que Ω se divide en n_{e1} sub-dominios Ω_i ,

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n_{e1}} \overline{\Omega}_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ para } i \neq j,$$

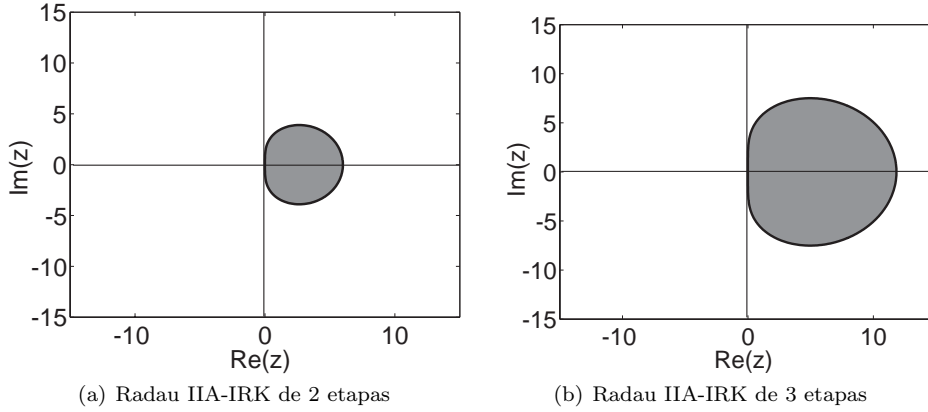


Figura 1. Regiones de estabilidad para métodos Radau IIA-IRK. La región estable corresponde a la parte blanca

con fronteras $\partial\Omega_i$, que definen una interfaz interior Γ

$$\Gamma := \left[\bigcup_{i=1}^{n_{el}} \partial\Omega_i \right] \setminus \partial\Omega.$$

Los operadores de *salto* $\llbracket \cdot \rrbracket$ y *media* $\{ \cdot \}$ se definen en la interfaz Γ usando valores de los elementos a la izquierda y a la derecha de la interfaz (por ejemplo Ω_i y Ω_j) y se extienden en la frontera exterior usando sólo valores en Ω ,

$$\llbracket \odot \rrbracket = \begin{cases} \odot_i + \odot_j & \text{en } \Gamma, \\ \odot & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad y$$

$$\{ \odot \} = \begin{cases} \kappa_i \odot_i + \kappa_j \odot_j & \text{en } \Gamma, \\ \odot & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Normalmente se considera $\kappa_i = \kappa_j = 1/2$ pero en general, estos dos escalares sólo tienen que verificar $\kappa_i + \kappa_j = 1$, véase por ejemplo [26]. La diferencia principal entre la media y el salto es que este último siempre se aplica con el vector normal a la interfaz o a la frontera del dominio. Por ejemplo, dados dos subdominios vecinos Ω_i y Ω_j , sus vectores normales unitarios se notan respectivamente \mathbf{n}_i y \mathbf{n}_j (recuerde que $\mathbf{n}_i = -\mathbf{n}_j$) y en $\partial\Omega$ se nota \mathbf{n} ; entonces el salto para una función escalar p es

$$\llbracket p \mathbf{n} \rrbracket = \begin{cases} p_i \mathbf{n}_i + p_j \mathbf{n}_j = \mathbf{n}_i(p_i - p_j) & \text{en } \Gamma \\ p \mathbf{n} & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

véase [16] para vectores o tensores.

Se definen también los espacios discretos de elementos finitos siguientes

$$\mathcal{V}^h = \{ \mathbf{v} \in [\mathcal{L}_2(\Omega)]^{\text{nsd}} ; \mathbf{v}|_{\Omega_i} \in [\mathcal{P}^k(\Omega_i)]^{\text{nsd}} \quad \forall \Omega_i \}$$

$$\mathcal{Q}^h = \{ q \in [\mathcal{L}_2(\Omega)] ; q|_{\Omega_i} \in [\mathcal{P}^{k-1}(\Omega_i)] \quad \forall \Omega_i \}$$

donde $\mathcal{P}^k(\Omega_i)$ es el espacio de las funciones de polinomios de grado máximo $k \geq 1$ en Ω_i .

Finalmente, en las siguientes ecuaciones (\cdot, \cdot) denota el producto escalar \mathcal{L}_2 en Ω , es decir

$$(p, q) = \int_{\Omega} p q \, d\Omega \quad \text{para escalares,}$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad \text{para vectores,}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} \, d\Omega \quad \text{para tensores de segundo orden.}$$

De la misma manera, $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ denota el producto escalar \mathcal{L}_2 en cualquier dominio $\Upsilon \subset \Gamma \cup \partial\Omega$. Por ejemplo,

$$(p, q)_{\Gamma} = \int_{\Gamma} p q \, d\Gamma$$

para escalares.

En [17] se obtuvo un método de penalización interior para las ecuaciones estacionarias de Navier-Stokes. Su extensión para una formulación transitoria es: encontrar $\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}^h$ y $p_h \in \mathcal{Q}^h$ tal que

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t}, \mathbf{v} \right) + a_{\text{IP}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h) + (\{p_h\}, \llbracket \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \rrbracket)_{\Gamma \cup \Gamma_D} = l_{\text{IP}}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^h,$$

$$b(\mathbf{u}_h, q) + (\{q\}, \llbracket \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_h \rrbracket)_{\Gamma \cup \Gamma_D} = (q, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_D)_{\Gamma_D} \quad \forall q \in \mathcal{Q}^h, \quad (12)$$

donde se definen las expresiones siguientes,

$$a_{\text{IP}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (2\nu \nabla^{\text{S}} \mathbf{u}, \nabla^{\text{S}} \mathbf{v}) + C_{11} (\llbracket \mathbf{n} \otimes \mathbf{u} \rrbracket, \llbracket \mathbf{n} \otimes \mathbf{v} \rrbracket)_{\Gamma \cup \Gamma_D} - (2\nu \{ \nabla^{\text{S}} \mathbf{u} \}, \llbracket \mathbf{n} \otimes \mathbf{v} \rrbracket)_{\Gamma \cup \Gamma_D} - (\llbracket \mathbf{n} \otimes \mathbf{u} \rrbracket, 2\nu \{ \nabla^{\text{S}} \mathbf{v} \})_{\Gamma \cup \Gamma_D}, \quad (13a)$$

$$l_{\text{IP}}(\mathbf{v}) := (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{t}, \mathbf{v})_{\Gamma_N} + C_{11} (\mathbf{u}_D, \mathbf{v})_{\Gamma_D} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}_D, 2\nu \nabla^{\text{S}} \mathbf{v})_{\Gamma_D}, \quad (13b)$$

$$c(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{1}{2} \left[-((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u}) + ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n_{e1}} \int_{\partial \Omega_i \setminus \Gamma_N} \frac{1}{2} [(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_i)(\mathbf{u}^{ext} + \mathbf{u}) - |\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_i| \right. \\ \left. (\mathbf{u}^{ext} - \mathbf{u})] \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Gamma_N} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \right] \quad (14a)$$

y

$$b(\mathbf{v}, p) := - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega, \quad (14b)$$

El parámetro de penalización (un escalar positivo C_{11} de orden $\mathcal{O}(h^{-1})$, con h el tamaño característico de los elementos), tiene que ser suficiente grande para asegurar la coercividad de la forma bilinear $a_{IP}(\cdot, \cdot)$, véase [16]. La definición del término convectivo $c(\cdot; \cdot, \cdot)$ se basa en (14a), un flujo numérico clásico *upwind*, véase por ejemplo [27], donde \mathbf{u}^{ext} denota la traza exterior de \mathbf{u} calculada en el lado/cara considerado, es decir

$$\mathbf{u}^{ext}(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{u}(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n}_i) \quad \text{para } \mathbf{x} \in \partial \Omega_i.$$

Observación 1 Nótese que en [17] el término convectivo se define como

$$c(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) := -((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u}) + \\ \sum_{i=1}^{n_{e1}} \int_{\partial \Omega_i \setminus \Gamma_N} \frac{1}{2} [(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_i)(\mathbf{u}^{ext} + \mathbf{u}) - |\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}_i| (\mathbf{u}^{ext} - \mathbf{u})] \\ \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Gamma_N} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Gamma. \quad (15)$$

No obstante, cuando se resuelven las ecuaciones transitorias de Navier-Stokes para flujo incompresible, se debe substituir el término convectivo original de la forma fuerte $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ por $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}$, lo cual es una modificación legítima para un campo de velocidad de divergencia nula [2]. Así, el término convectivo trilinear definido en (14a) es antisimétrico, es decir, $c(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$. Eso garantiza la estabilidad incondicional en el caso de un integrador temporal implícito o semi-implícito [18].

Siguiendo [28,16,29], se descompone el espacio de velocidad \mathbf{V}^h en la suma directa de una parte solenoidal y una parte irrotacional $\mathbf{V}^h = \mathcal{S}^h \oplus \mathcal{I}^h$, donde

$$\mathcal{S}^h = \left\{ \mathbf{v} \in [\mathcal{H}^1(\Omega)]^{n_{sd}} \mid \mathbf{v}|_{\Omega_i} \in [\mathcal{P}^k(\Omega_i)]^{n_{sd}}, \nabla \cdot \mathbf{v}|_{\Omega_i} = 0 \right. \\ \left. \text{para } i = 1, \dots, n_{e1} \right\},$$

$$\mathcal{I}^h \subset \left\{ \mathbf{v} \in [\mathcal{H}^1(\Omega)]^{n_{sd}} \mid \mathbf{v}|_{\Omega_i} \in [\mathcal{P}^k(\Omega_i)]^{n_{sd}}, \nabla \times \mathbf{v}|_{\Omega_i} = \mathbf{0} \right. \\ \left. \text{para } i = 1, \dots, n_{e1} \right\}.$$

Por ejemplo, una base solenoidal de segundo grado ($k = 2$) para triángulos en 2D es

$$\mathcal{S}^h = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 2xy \\ -y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (16)$$

y la parte complementaria irrotacional para $k = 2$ es

$$\mathcal{I}^h = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Véase por ejemplo [30] para la construcción de estos espacios.

En estas circunstancias, se puede dividir el problema IP (12) en dos problemas *desacoplados*. El primero resuelve para velocidades de *divergencia nula* y *presiones híbridas*: encontrar $\mathbf{u}_h \in \mathcal{S}^h$ and $\tilde{p}_h \in \mathbf{P}^h$ solución de

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t}, \mathbf{v} \right) + a_{IP}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) \\ \quad + (\tilde{p}_h, \llbracket \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \rrbracket)_{\Gamma \cup \Gamma_D} = l_{IP}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{S}^h, \\ (\tilde{q}, \llbracket \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_h \rrbracket)_{\Gamma \cup \Gamma_D} = (\tilde{q}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_D)_{\Gamma_D} \quad \forall \tilde{q} \in \mathbf{P}^h, \end{cases} \quad (17)$$

con las formas definidas en (13), (14a) y (14b). Nótese que este problema, a resolver en cada paso de tiempo, muestra una reducción importante del número de grados de libertad con respecto al problema (12). En [20], se muestra una comparación en número de grados de libertad entre elementos finitos continuos y una formulación de Galerkin continuo, con aproximaciones nodales o solenoidales.

El espacio de presiones híbridas (presiones en los lados en 2D o caras en 3D) es simplemente:

$$\mathbf{P}^h := \left\{ \tilde{p} \mid \tilde{p} : \Gamma \cup \Gamma_D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ y} \right. \\ \left. \tilde{p} = \llbracket \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \rrbracket \text{ para algunos } \mathbf{v} \in \mathcal{S}^h \right\}.$$

De hecho, la referencia [28] demuestra que \mathbf{P}^h corresponde a presiones polinomiales a trozos en los interfaces interiores Γ .

El segundo problema, que requiere la solución del anterior, evalúa las presiones *interiores*: encontrar $p_h \in \mathcal{Q}^h$ tal que

$$b(\mathbf{v}, p_h) = l_{IP}(\mathbf{v}) - \left(\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t}, \mathbf{v} \right) - a_{IP}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) \\ - (\tilde{p}_h, \llbracket \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \rrbracket)_{\Gamma \cup \Gamma_D} - c(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{I}^h. \quad (18)$$

Es importante remarcar que la ecuación (18) se puede resolver elemento a elemento y que la presión es su única incógnita. El segundo problema (18) es un post-proceso que permite calcular la presión en el interior de los elementos, normalmente al final del cálculo o bien después de las iteraciones en cada paso de tiempo. Por ejemplo, si se necesita calcular la presión interior p_h en el tiempo t^n , se resuelve la ecuación (18) en el tiempo t^n , donde se puede aproximar \mathbf{u}_h^t usando

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} \right|^n = \frac{\mathbf{u}_h^{t^n} - \mathbf{u}_h^{t^{n-1}}}{\Delta t}, \quad (19a)$$

para primer orden de precisión en tiempo,

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} \right|^n = \frac{\mathbf{u}_h^{t^{n+1}} - \mathbf{u}_h^{t^{n-1}}}{2\Delta t}, \quad (19b)$$

para segundo orden de precisión en tiempo,

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} \right|^n = \frac{-\mathbf{u}_h^{t^{n+2}} + 8\mathbf{u}_h^{t^{n+1}} - 8\mathbf{u}_h^{t^{n-1}} + \mathbf{u}_h^{t^{n-2}}}{12\Delta t}, \quad (19c)$$

para cuarto orden de precisión en tiempo.

En particular, para los métodos Radau IIA-IRK se considera (19c) en (18) para recuperar la presión interior.

4. Ejemplos Numéricos

Se consideran ahora ejemplos numéricos para demostrar la aplicabilidad de los métodos propuestos. En primer lugar, se comprueba la estabilidad asintótica incondicional para métodos IRK. Se estudia luego el ejemplo del flujo alrededor de un cilindro para confirmar el buen comportamiento de los métodos. Finalmente, se considera un ejemplo con solución analítica para comparar los métodos RK con métodos clásicos de Crank-Nicolson y de paso fraccionado, desde el punto de vista de la precisión y coste computacional. En todos los ejemplos se usa la formulación IPM-DG descrita en la Sección 3 con aproximaciones solenoidales discontinuas.

4.1. Estabilidad asintótica

Esta sección busca validar el estudio de estabilidad asintótica desarrollado para las ecuaciones de Oseen en la Sección 2.2, extender las conclusiones para las ecuaciones de Navier-Stokes y justificar la necesidad de considerar el término convectivo antisimétrico definido en (14a). En esta sección se usa un método Radau IIA-IRK de 2 etapas.

Se considera el ejemplo con solución analítica propuesto en [5] en el que las ecuaciones de Navier-Stokes

para flujo incompresible se resuelven en un dominio cuadrado (2D) $\Omega =]0, \frac{1}{2}[\times]0, \frac{1}{2}[$ con condiciones de contorno Dirichlet en tres lados y Neumann en el cuarto lado $\{x = 0\}$. Se impone el término fuente

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 2\nu \sin(x+t)\sin(y+t) + \cos(x-y+t) \\ + \sin(x+y+2t) + \sin(x+t)\cos(x+t) \\ 2\nu \cos(x+t)\cos(y+t) - \cos(x-y+t) \\ - \sin(x+y+2t) - \sin(y+t)\cos(y+t) \end{pmatrix}$$

para obtener la solución analítica

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sin(x+t)\sin(y+t) \\ \cos(x+t)\cos(y+t) \end{pmatrix},$$

$$p = \sin(x-y+t).$$

Se usan aproximaciones de tercer orden para velocidad, segundo orden para presión ($k = 3$) y un tamaño de elemento característico $h = 0,25$.

Primero se considera el término convectivo (15), que no es antisimétrico. La Figura 2 muestra la distribución de $\lambda\Delta t$, con $\Delta t = 0,001$, donde los λ son los valores propios de $(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{A}$, para dos números de Reynolds, $Re = 300$ y $Re = 400$.

Cuando se usa el término convectivo (15) que no es antisimétrico, existen valores propios cuya parte real pasa a ser positiva cuando se incrementa el valor del número de Reynolds, entrando en la zona inestable del método Radau IIA-IRK de 2 etapas como se puede ver en la Figura 2(d).

La Figura 3 muestra los vectores de velocidad obtenidos en $t = 1$, con $Re = 300, 400$. Se puede ver que para $Re = 300$ la solución es estable ya que todos los valores propios se encuentran en la parte estable, $\max(|R(z)|) = 1,000$, with $z = \lambda\Delta t$. Mientras que para $Re = 400$, la solución obtenida no es correcta debido a que algunos valores propios tienen parte real positiva. En este caso, $\max(|R(z)|) = 1,002 > 1$. Así, en la practica la condición de estabilidad establecida en la Sección 2.2 es una condición necesaria y suficiente.

Se usa ahora la forma antisimétrica (14a). Se considera un número de Reynolds alto, $Re = 1000$, para demostrar que el esquema obtenido es ahora incondicionalmente estable. Efectivamente, se ve en la Figura 4 que todos los λ , tienen parte real negativa y por lo tanto $\lambda\Delta t$ permanecen en la región de estabilidad. En este caso, el esquema Radau IIA-IRK de 2 etapas para la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible es incondicionalmente estable para cualquier número de Reynolds.

Aunque el análisis de la Sección 2.2 establece una condición necesaria para la estabilidad asintótica de las

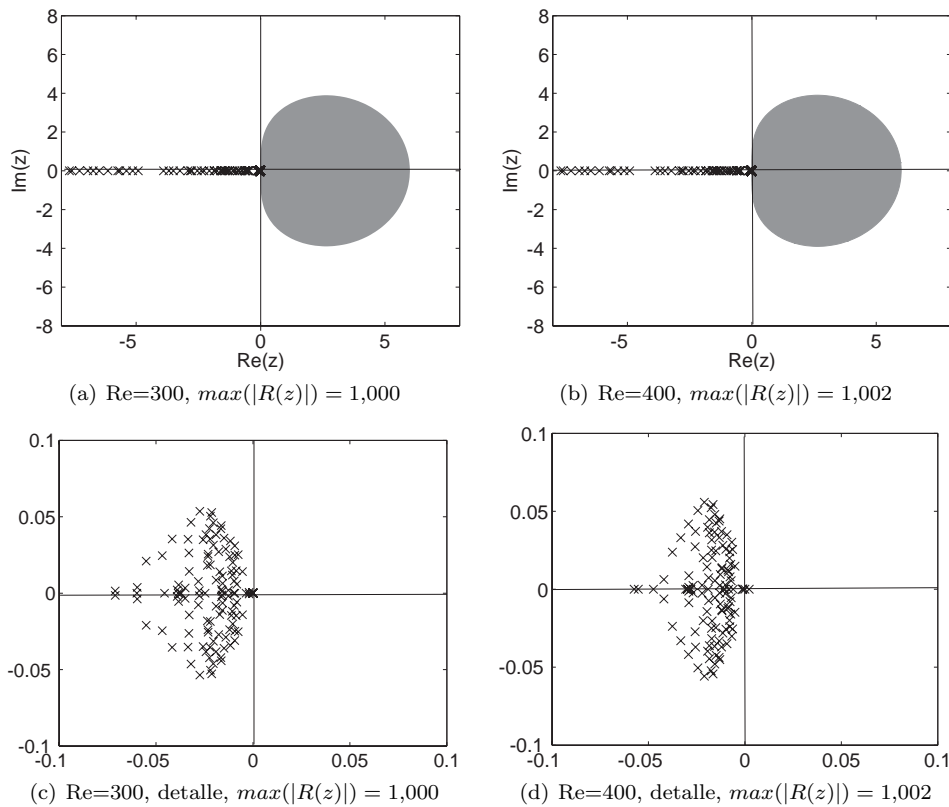


Figura 2. Distribución de $\lambda\Delta t$, con $\Delta t = 0,001$, marcados con \times , usando un término convectivo no antisimétrico, con $Re = 300, 400$, $k = 3$, $h = 0,25$, $\Delta t = 0,001$, y región de estabilidad para esquema Radau IIA-IRK de 2 etapas

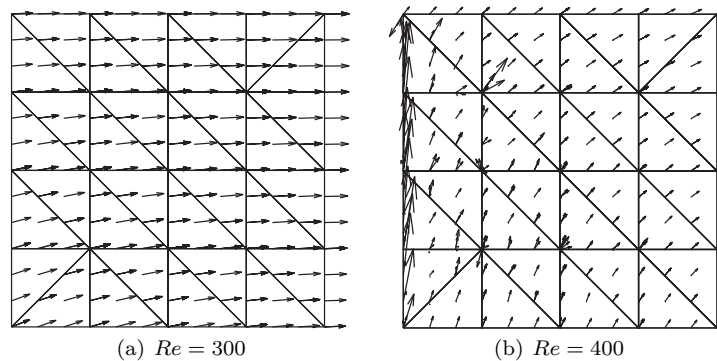


Figura 3. Vectores de velocidad en $t = 1$ con $Re = 300, 400$, $k = 3$, $h = 0,25$, $\Delta t = 0,001$

ecuaciones de Oseen para flujo incompresible, los experimentos numéricos indican que en la práctica es también una condición suficiente y que la misma condición se aplica a las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible.

4.2. Flujo alrededor de un cilindro

En esta sección se considera un problema, con condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann, que simula

el flujo alrededor de un cilindro de diámetro $D = 1$, colocado en una corriente uniforme. En este ejemplo se usa el generador de mallas de alto orden *EZ4U*, véase [31].

Se usa una malla no estructurada de 472 elementos de cuarto orden, como se puede apreciar en la Figura 5. Estos elementos de cuarto orden se usan para la integración numérica y el post-proceso de visualización de resultados. Aproximaciones solenoidales de cuarto orden ($k = 4$) se usan para aproximar la velocidad y

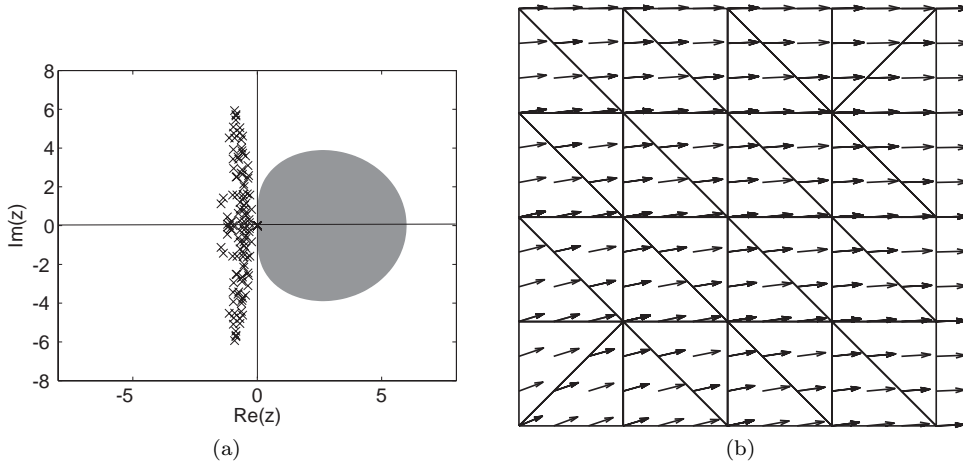


Figura 4. Distribución de $\lambda\Delta t$, con $\Delta t = 0,1$, marcados con \times , y vectores de velocidad en $t = 1$, usando un término convectivo antisimétrico, con $Re = 1000$, $k = 3$, $h = 0,25$ y $\Delta t = 0,1$

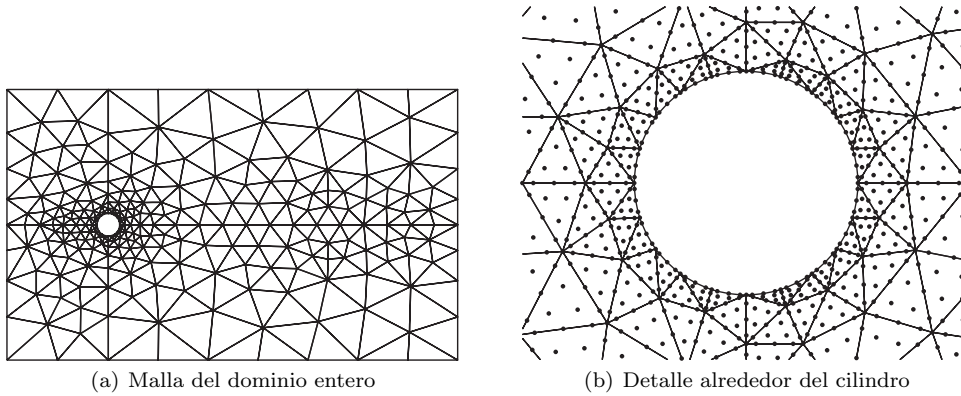


Figura 5. Flujo detrás de un cilindro: malla no estructurada de 472 elementos de cuarto orden

de tercer orden para la presión, vea la Sección 3. Se imponen condiciones de Dirichlet, $\mathbf{u}_D = (1, 0)$ en la entrada y no-deslizamiento $\mathbf{u}_D = (0, 0)$ en el cilindro, y condiciones nulas de Neumann en los tres otros lados. Las condiciones iniciales fijan un campo de velocidad $\mathbf{u}_0 = (1, 0)$ en todo el dominio. Se usa el método Radau IIA-IRK de 3 etapas para la integración temporal. La forma del flujo depende del número de Reynolds, definido aquí como $Re = \frac{u_\infty D}{\nu}$, donde u_∞ es la velocidad media del flujo o, lo que aquí es lo mismo, la velocidad de entrada, aquí $u_\infty = 1$.

Para número de Reynolds bajo ($1 \leq Re \leq 50$), la solución llega a un estado estacionario. Aquí se considera un número de Reynolds $Re = 100$ que lleva el flujo a una solución periódica. Se usa un paso de tiempo $\Delta t = 0,03$ en el intervalo de tiempo $[0, 100]$, y $\Delta t = 0,005$ en $[100, 120]$, para medir con más precisión el periodo del movimiento del flujo. Una vez el flujo llega a la solución en régimen permanente, se observa una generación de vórtices detrás del cilindro: el flujo se despega sucesivamente de la parte superior e inferior

del cilindro creando vórtices, llamados vórtices de Van Karman, como se puede ver en la Figura 6 y con más precisión en la Figura 7.

Se puede también observar el comportamiento periódico del flujo a través de la evolución del coeficiente de sustentación C_L , definido por la siguiente integral a lo largo del cilindro

$$C_L = \int_0^{2\pi} \tau_y d\theta$$

donde τ_y es la componente y de la componente normal del tensor de Cauchy $\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{n} + 2\nu(\mathbf{n} \cdot \nabla^s)\mathbf{u}$. La Figura 8 muestra la evolución temporal del coeficiente de sustentación C_L . Después de una fase transitoria, el flujo llega a una solución periódica. Roshko, véase [32], estableció experimentalmente la relación entre el número de Strouhal y el número de Reynolds, para flujos alrededor de un cilindro con número de Reynolds entre 90 y 150 como

$$S = 0,212 \left(1 - \frac{21,2}{Re} \right). \quad (20)$$

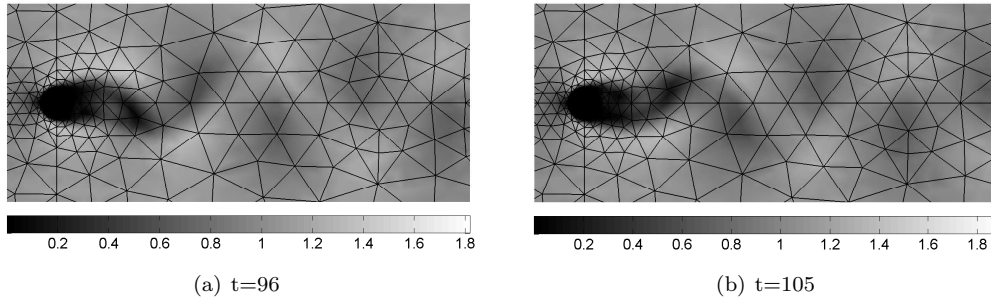


Figura 6. Flujo alrededor de un cilindro: módulo de la velocidad del flujo para $Re = 100$, fase periódica

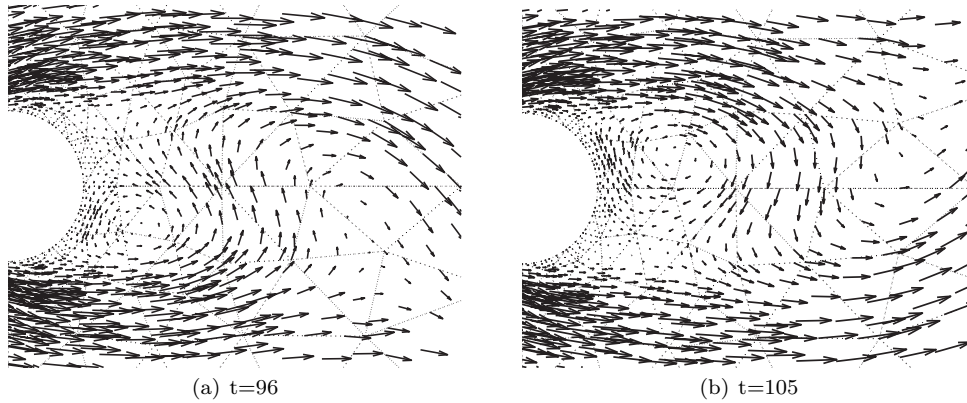


Figura 7. Flujo alrededor de un cilindro: vectores de velocidad del flujo en la cercanía del cilindro para $Re = 100$, fase periódica

El número de Strouhal es un número adimensional, que describe mecanismos de flujos oscilatorios, definido a partir de la frecuencia f_S de la generación de vórtices como

$$S = \frac{f_S D}{u_\infty},$$

donde D y u_∞ , previamente definidas, representan la dimensión y la velocidad características del problema. En la Figura 8, se mide el periodo del movimiento $T = 5,96$, lo cual corresponde a $S = 0,1678$. Este valor concuerda con los resultados experimentales y las simulaciones numéricas referenciados en [32] y [33], como se ve en la Tabla 6 y confirma el buen comportamiento de los métodos Radau IIA-IRK.

Tabla 6. Flujo alrededor de un cilindro: resultados del número de Strouhal para $Re = 100$

	IRK de 3 etapas	IRK de 2 etapas	Roshko (20)	Simo [33]
S	0,168	0,168	0,1671	0,167

4.3. Comparación de la precisión y del coste de los métodos de Runge-Kutta, de Crank-Nicolson y de paso fraccionado

Se usa ahora el ejemplo transitorio con solución analítica descrito en la Sección 4.1 para comparar la precisión y el coste computacional de los métodos Radau IIA-IRK de 2 y 3 etapas, de Crank-Nicolson (CN) y de paso fraccionado (Fractional-Step FS) descrito en [5].

Se elige una aproximación polinómica de grado $k = 4$ para la velocidad, 3 para la presión, y una malla no estructurada de 128 elementos, véase la Figura 9. Aquí el tamaño h de los elementos varía entre 0,01 y 0,1. El tiempo final del cálculo es $t = 40$.

La Figura 10 muestra la evolución de la norma \mathcal{L}_2 del error en la solución del problema (17) para Δt decreciente. CN exhibe su orden de convergencia teórico, 2 para velocidad y presión híbrida, FS orden 2 para la velocidad y 1 para la presión, mientras los métodos IRK muestran ordenes de convergencia óptimos para presión híbrida, respetivamente 2 y 3 para los métodos de 2 y 3 etapas, pero tienen órdenes sub-óptimos para la velocidad: casi 4 en lugar de 5 para el esquema IRK de 3 etapas y alrededor de 2.6 en lugar de 3 para el esquema IRK de 2 etapas. Sin embargo se nota un incremento

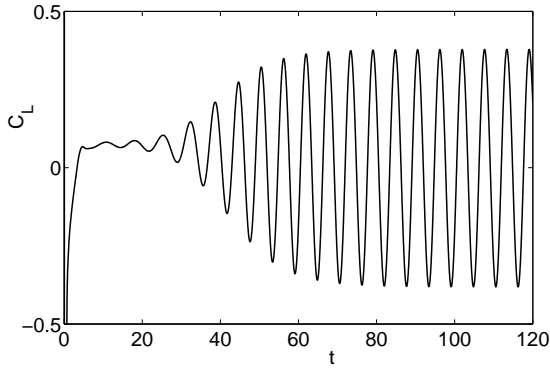


Figura 8. Flujo alrededor de un cilindro: evolución temporal del coeficiente de sustentación

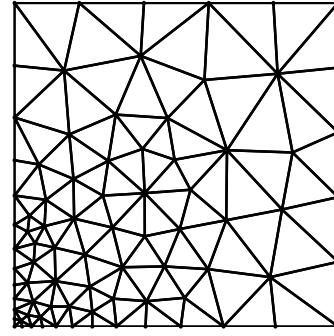
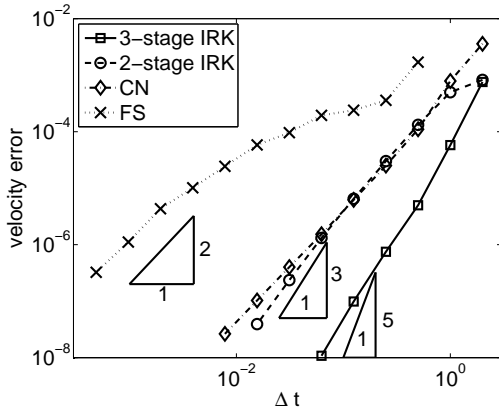
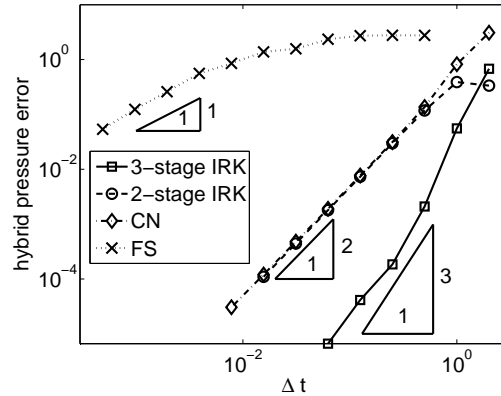


Figura 9. Ejemplo analítico: malla no-estructurada de 128 elementos, $0,01 \leq h \leq 0,1$



(a) Error de la velocidad



(b) Error de la presión híbrida

Figura 10. Ejemplo analítico: errores en norma \mathcal{L}_2 de la velocidad y de la presión híbrida para métodos IRK de 2 y 3 etapas, CN y FS, $k = 4$, $0,01 \leq h \leq 0,1$

en la pendiente de las gráficas de convergencia. Este comportamiento se ha observado también en ejemplos numéricos escalares mostrando órdenes de convergencia óptimos para pasos de tiempo más pequeños. En cualquier caso, el método IRK de 3 etapas proporciona los mejores resultados en precisión y orden de convergencia.

La Figura 11 muestra la evolución de la norma \mathcal{L}_2 del error en la presión interior, calculada como un post-proceso, resolviendo (18) con la aproximación de cuarto orden de la derivada temporal (19c). Para todos los métodos, la presión interior llega al orden óptimo de convergencia.

Las Figuras 10 y 11 muestran como para el mismo paso de tiempo, el método IRK de 3 etapas llega a más precisión que los otros métodos. No obstante es también el método más caro. Comparado con CN, el método IRK de 3 etapas necesita tres veces más evaluaciones del residuo convectivo y lleva a un sistema de ecuaciones

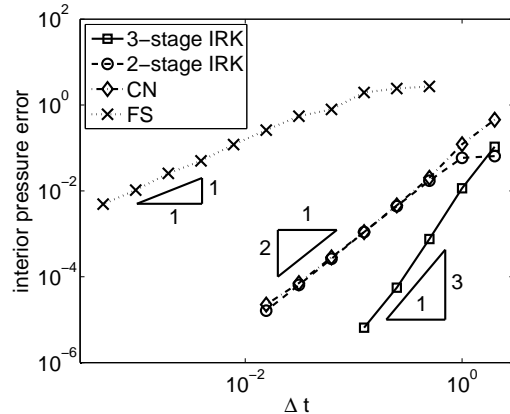


Figura 11. Ejemplo analítico: error en norma \mathcal{L}_2 de la presión interior para métodos IRK de 2 y 3 etapas, CN y FS, $k = 4$, $0,01 \leq h \leq 0,1$

tres veces más grande a resolver en cada paso de tiempo.

Por lo tanto es necesario estudiar si su mayor precisión compensa su alto coste computacional.

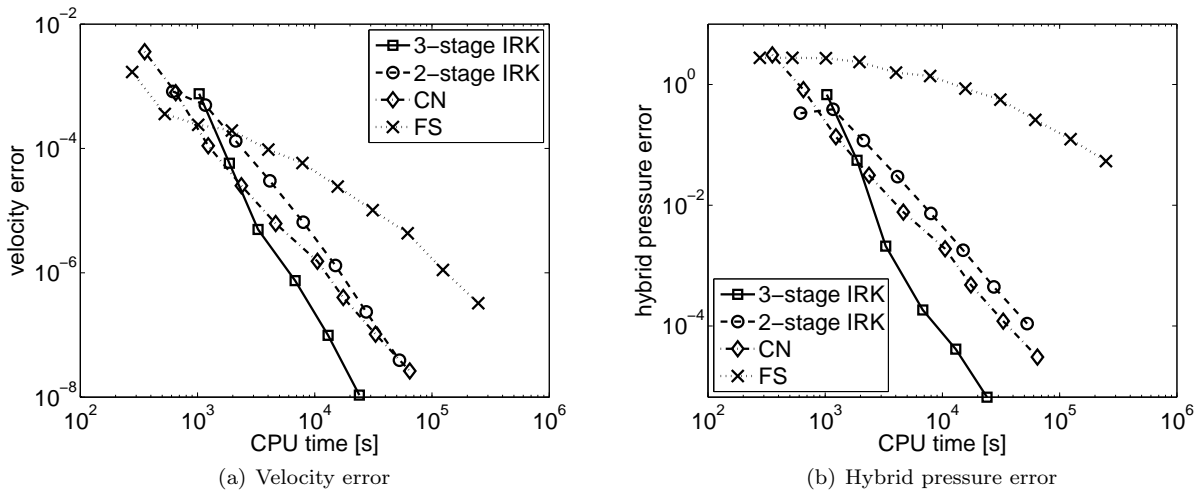


Figura 12. Ejemplo analítico: errores en norma \mathcal{L}_2 de la velocidad y de la presión híbrida en función del tiempo de CPU para métodos IRK de 2 y 3 etapas, CN y FS, $k = 4$, $0,01 \leq h \leq 0,1$

Se presenta ahora una comparación de precisión en función del coste computacional expresado en tiempo de CPU, pero primero se recuerda una de las principales motivaciones para usar integradores de alto orden: se desea obtener una precisión similar en tiempo y en espacio. Por ejemplo, para una discretización espacial de cuarto orden, se espera un error global de la siguiente forma

$$e = c_1 h^4 + c_2 \Delta t^r$$

donde r es el orden del integrador temporal. Suponiendo que el tamaño característico de la malla es $h = 0,1$, el orden de magnitud de la precisión espacial obtenida es del orden de 10^{-4} . Si se usa un esquema como el Radau IIA-IRK de 3 etapas que alcanza un orden de precisión temporal de 4 o 5, se puede considerar un paso de tiempo $\Delta t = 0,1$ para llegar a una precisión equivalente en tiempo y espacio. Mientras que si se usa métodos de segundo orden como CN, se tiene que considerar un paso de tiempo $\Delta t = 0,01$. Es decir se necesitan diez veces más pasos de tiempo con CN que con Radau IIA-IRK de 3 etapas para llegar a una precisión temporal similar. Note que la Figura 10(a) confirma esta estimación, el error obtenido para la velocidad con el método Radau IIA-IRK de 3 etapas con un paso de tiempo $\Delta t = 0,1$ es igual al error obtenido con CN para $\Delta t \approx 0,01$.

La Figura 12 compara el error en norma \mathcal{L}_2 de la velocidad y de la presión híbrida con Radau IIA-IRK de 2 y 3 etapas, CN y FS en función del tiempo de CPU necesario para llegar a esta precisión. Para precisión baja, todos los métodos, salvo FS para la presión, tienen un ratio precisión por coste equivalente, y CN parece ser la mejor elección. No obstante cuando se requiere más precisión, por ejemplo un error menor que 10^{-4} para

la velocidad y menor que 10^{-2} para la presión, el alto orden de convergencia del método Radau IIA-IRK de 3 etapas compensa su coste más elevado en cada iteración y se convierte en el método más eficiente. La Figura 13 muestra el error en norma \mathcal{L}_2 de la presión interior, obtenida de (18) usando una aproximación de cuarto orden para la derivada temporal, en función del tiempo de CPU. De nuevo, el método Radau IIA-IRK de 3 etapas es el más eficiente cuando se desea alta precisión. Este ejemplo muestra que el método Radau IIA-IRK de 3 etapas es prometedor pero deberán considerarse ejemplos en 3D para confirmar las conclusiones.

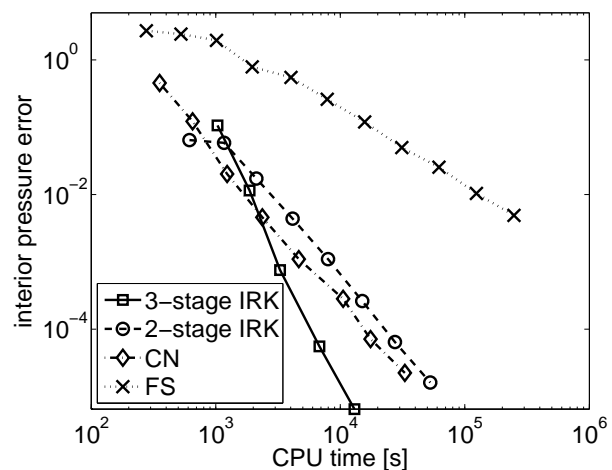


Figura 13. Ejemplo analítico: norma \mathcal{L}_2 del error en la presión en función del tiempo de CPU para métodos IRK de 2 y 3 etapas, CN y FS, $k = 4$, $0,01 \leq h \leq 0,1$

5. CONCLUSIONES

Las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible se interpretan como un sistema de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas (EDA), es decir un sistema de EDO correspondiendo a la ecuación de conservación del momento, más restricciones algebraicas correspondiendo a la condición de incompresibilidad. Se consideran métodos de Runge-Kutta semi-implícitos (SDIRK) y totalmente implícitos (IRK) para resolver este sistema de EDA, pero finalmente se prefieren los métodos IRK porque alcanzan ordenes de convergencia temporal más altos. En particular se aconseja el uso de los métodos Radau IIA-IRK porque, para un número dado de etapas, son los que alcanzan el mayor orden de convergencia, con el mismo orden para la velocidad que en un sistema de EDO. Se analiza la estabilidad asintótica de los esquemas IRK para sistemas EDA para flujos incompresibles y se confirman las conclusiones del análisis a través de un ejemplo numérico. Se concluye que los métodos IRK elegidos son incondicionalmente estables para problemas de flujo incompresible. Se usa una formulación DG de alto orden, con aproximaciones solenoidales, para la discretización espacial, alcanzando ordenes altos de convergencia tanto en espacio como en tiempo. El ejemplo clásico de referencia del flujo alrededor de un cilindro confirma el buen comportamiento de los métodos Radau IIA-IRK. Un ejemplo con solución analítica muestra que el esquema IRK de tres etapas es muy competitivo frente a los métodos clásicos de Crank-Nicolson y de paso fraccionado e incluso más eficiente cuando se requiere una precisión alta.

Referencias

1. Chorin A. (1968) "Numerical solution of the Navier-Stokes equations". *Math. Comp.* 22(104):745-762
2. Temam R. (2001) *Navier-Stokes equations - Theory and numerical analysis*. AMS Chelsea Publishing
3. Donea J., Giuliani S., Laval H., Quartapelle L. (1981) "Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equations by a fractional step method". *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 30:53-73
4. Kim J., Moin P. (1985) "Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations". *J. Comput. Phys.* 59:308-323
5. Guermund J., Mineev P., Shen J. (2006) "An overview of projection methods for incompressible flows". *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 195:6011-6045
6. Houzeaux M., Vázquez M., Aubry R. (2009) "A massively parallel fractional step solver for incompressible flows". *J. Comput. Phys.* 228(17):6316-6332
7. Kim K., Baek S.-J., Jin Sung H. (2002) "An implicit velocity decoupling procedure for the incompressible Navier-Stokes equations". *Int. J. Numer. Methods Fluids.* 38(2):125-138
8. Jansen K., Whiting C., Hulbert G. (2000) "A generalized- α method for integrating the filtered Navier-Stokes equations with a stabilized finite element method". *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 190(3):305-319
9. Persson P.-O., Peraire J. (2008) "Newton-GMRES preconditioning for discontinuous Galerkin discretizations of the Navier-Stokes equations". *SIAM J. Sci. Comput.*, 30(6):2709-2733
10. Bassi F., Rebay S. (1997) "A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations". *J. Comput. Phys.* 131(2):267-279
11. Wang L., Mavriplis D.J. (2007) "Implicit solution of the unsteady Euler equations for high-order accurate discontinuous Galerkin discretizations". *J. Comput. Phys.* 225(2):1994-2015
12. Hairer E., Wanner G. (1991) *Solving Ordinary Differential Equations II- Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer-Verlag
13. Étienne S., Garon A., Pelletier D. (2009) "Perspective on the geometric conservation law and finite element methods for ALE simulations of incompressible flow". *J. Comput. Phys.* 228:2313-2333
14. Hanke M., R. März, (1996) "On asymptotics in case of DAEs". *ZAMM* 76. Suppl.1:99-102
15. Hanke M., Izquierdo E., März R., (1998) "On asymptotics in case of linear index-2 Differential-Algebraic Equations". *SIAM J. Numer. Anal.* 35(4):1326-1346
16. Montlaur A., Fernandez-Mendez S., Huerta A. (2008) "Discontinuous Galerkin methods for the Stokes equations using divergence-free approximations". *Int. J. Numer. Methods Fluids.* 57(9):1071-1092
17. Montlaur A., Fernandez-Mendez S., Peraire J., Huerta A. (2010) "Discontinuous Galerkin methods for the Navier-Stokes equations using solenoidal approximations". *Int. J. Numer. Methods Fluids.* 64(5):549-564
18. Donea J., Huerta A. (2003) *Finite element methods for flow problems*. Chichester: John Wiley & Sons
19. Hairer E., Lubich C., Roche M. (1989) *The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods*. Springer-Verlag
20. Brenan K., Campbell S., Petzold L. (1996) *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. SIAM
21. Brenan K.E., Engquist B.E. (1988) "Backward differentiation approximations of nonlinear differential/algebraic systems". *Math. Comp.* 51(184):659-676
22. Pereira J.M.C., Kobayashi M., Pereira J.C.F. (2001) "A fourth-order-accurate finite volume compact method for the incompressible Navier-Stokes solutions". (2001) *J. Comput. Phys.* 167(1):217-243
23. Montlaur A. (2009) *High-order discontinuous Galerkin methods for incompressible flows*. PhD thesis. Universitat Politècnica de Catalunya <http://www.tesisenxarxa.net/TDX-0122110-183128>
24. Butcher J. (1987) *The numerical analysis of ordinary differential equations*. Wiley
25. Norsett S. (1974) "One-step methods of hermite type for numerical integration of stiff systems". *BIT.* (14):63-77
26. Hansbo A., Hansbo P. (2004) "A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics". *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 193(33-35):3523-3540

27. Kanschat G., Schötzau D. (2008) "Energy norm a posteriori error estimation for divergence-free discontinuous Galerkin approximations of the Navier-Stokes equations". *Int. J. Numer. Methods Fluids*. 57(9):1093-1113
28. Cockburn B., Gopalakrishnan J. (2005) "Incompressible finite elements via hybridization. Part I: the Stokes system in two space dimensions". *SIAM J. Numer. Anal.* 43(4):1627-1650
29. Carrero J., Cockburn B., Schötzau D. (2005) "Hybridized globally divergence-free LDG methods. Part I: The Stokes problem". *Math. Comp.* 75(254):533-563
30. Baker G.A., Jureidini W.N., Karakashian O.A. (1990) "Piecewise solenoidal vector fields and the Stokes problem". *SIAM J. Numer. Anal.* 27(6):1466-1485
31. Roca X., Sarrate J., Ruiz-Gironès E. (2007) "A graphical modeling and mesh generation environment for simulations based on boundary representation data". En *Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia* Porto, Portugal
32. Roshko A. (1954) "On the development of turbulent wakes from vortex streets". *NACA Report* N° 1191
33. Simo J., Armero F. (1994) "Unconditional stability and long-term behaviour of transient algorithms for the incompressible Navier Stokes and Euler equations". *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 111:111-154