Vol. **17**, **1**, 19–36 (2001)

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

Simulación numérica del flujo de materiales granulares usando el concepto de estado crítico

Sergio A. Elaskar y Luis A. Godoy

Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba
Casilla de correos 916, 5000 Córdoba, Argentina
Tel.: 54-351-460 2221/460 3800, Fax: 54-351-422 4092/469 5067
e-mail: selaskar@com.uncor.edu
e-mail: lgodoy@com.uncor.edu

Resumen

En este trabajo se presenta una relación constitutiva plástica para modelar el flujo estacionario de sólidos granulares. Se estudian dos caminos alternativos para formular la nueva relación. La primer alternativa comienza empleando una ecuación constitutiva general para el flujo de materiales granulares compresibles, friccionales y con colisiones entre las partículas, a la cual se le introducen dos simplificaciones (el material posee comportamiento incompresible y las colisiones entre las partículas generan un efecto despreciable en el tensor de tensiones). La segunda derivación se obtiene a partir de la teoría clásica de plasticidad. La función de fluencia de los modelos "cap modificados" es usada como función de discontinuidad para representar el flujo sin cambios en la densidad de los sólidos granulares. Para el potencial plástico, la formulación utiliza la función de von Mises y se obtiene una viscosidad aparente que corresponde a un fluido no newtoniano. El modelo se aplica a la descarga de silos y tolvas empleando el método del elementos finitos como herramienta de discretización. La verificación del modelo constitutivo fue realizada por comparación con resultados experimentales y analíticos publicados en la literatura técnica. Finalmente, se ha evaluado la sensibilidad de la solución para ilustrar cómo cambios en la geometría de un silo pueden modificar las cargas sobre las paredes y el caudal de descarga.

NUMERICAL SIMULATION OF THE FLOW OF GRANULAR MATERIALS USING THE CRITICAL STATE CONCEPT

Summary

A plastic constitutive relation is presented in this paper to model the steady-state flow of granular solids. Two alternative ways are followed to formulate the new relation. In the first derivation one begins from a general constitutive equation for the flow of compressible granular materials with friction and collisions between particles, and introduce two assumptions (the material has incompressible behavior and the collisions between particles have a negligible effect on the stress tensor). The second derivation is obtained from the classical theory of non-associated plasticity. Modified Cap models are used as discontinuity function to represent the flow without changes in the density of the granular solids. For the plastic potential, the formulation uses the von Mises function and obtains the apparent viscosity of a non-newtonian fluid. The model is employed to simulate the discharge of silos and hoppers using a finite element formulation. Validation of the model was performed by comparison with experimental and analytical results published in the scientific literature. Finally, sensitivity of the solution has been computed to illustrate how changes in the geometry of the silo can modify the wall stresses and the rate of flow of the discharge.

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Noviembre 1999

INTRODUCCIÓN

La búsqueda de modelos constitutivos para formular el flujo de sólidos granulares dentro de la mecánica del continuo tiene una historia de más de 20 años. Las contribuciones tempranas en este campo incluyen los trabajos de Goodman y Cowin[8,9], Savage[22] y McTigue[18] en los que el flujo granular se representa por medio del flujo de un fluido. Las ecuaciones de la mecánica de sólidos también han sido empleadas como la base de una formulación, por ejemplo en los trabajos de Lade[16] (en el contexto de mecánica de suelos) y Kolymbas[15].

Puede parecer contradictorio que se utilice la mecánica de los fluidos para modelar el comportamiento de material sólido; sin embargo el material sólido aquí considerado está formado por un número muy grande de partículas pequeñas con movimiento relativo entre las mismas de modo que el comportamiento del conjunto participa de características propias de fluidos. El esquema general de análisis en el presente trabajo se basa en la mecánica del continuo, dentro del cual se idealiza al material granular como un continuo y el problema queda descrito por relaciones entre tensiones y velocidades. Las principales diferencias entre los trabajos de distintos autores quedan plasmadas en los modelos constitutivos para representar el movimiento del conjunto de partículas. Goodman y Cowin emplearon el concepto de distribución de volumen como una variable continua en el dominio del sólido a granel. El tensor de tensiones es supuesto como una función de esta distribución de volumen, de sus gradientes y del tensor velocidad de deformación. Savage[22] dio por cierto que los granos individuales son incompresibles y reemplazó la distribución de volumen por la densidad, para que el tensor de tensiones dependa del tensor velocidad de deformación y de las derivadas direccionales de la densidad. Modificaciones al modelo de Goodman y Cowin fueron presentadas por el Passman *et al.*[20], McTigue[18] y Gudhe, Yalamanchili y Massoudi[10]. Dentro de esta línea de investigación, Elaskar y Godoy[5] introdujeron un tensor de tensión no lineal basado en la formulación de Savage, usando conceptos provenientes de la teoría de estado crítico. En todos los modelos anteriores, las relaciones constitutivas son válidas para flujo compresible de materiales granulares.

Una aproximación diferente, basada en la teoría de visco-plasticidad de Perzyna[21] e inspirada en modelos usados para el conformado de metales, fue presentada por Diez y Godoy[3], obteniendo una viscosidad aparente en función de la cohesión, fricción y fluidez. La formulación fue refinada utilizando el mismo esquema de flujo de un fluido no newtoniano por Elaskar, Godoy y Brewer[6] y extendida para incluir una nueva superficie de discontinuidad por el Elaskar *et al.*[7]. Ésta es una familia diferente de modelos para simular el comportamiento incompresible de sólidos granulares durante el flujo en estado estacionario. Un problema de estos modelos viscoplásticos es que el parámetro de fluidez necesita ser introducido. Además, se requieren valores de algunos parámetros constitutivos no tradicionales para los que no hay ensayos estándar de laboratorio.

Una evolución de los modelos anteriores se obtiene empleando plasticidad en lugar de viscoplasticidad como base para el flujo incompresible. Además, la formulación del problema mejora si se adopta una función de discontinuidad cuyos parámetros son frecuentemente empleados en las mediciones de laboratorio. Una posibilidad es utilizar los llamados modelos "cap modificados" usados en los mecánica de suelos que introducen el concepto de densidad crítica[12].

En una contribución anterior, los autores dedujeron una ecuación constitutiva compresible basada en la formulación de Savage, pero incorporando el concepto de estado crítico[5]. Aunque el modelo es sumamente general, puede ser demasiado complejo para el análisis tridimensional. Dicha relación constitutiva es simplificada en este trabajo, para simular el flujo incompresible tal como sucede en el estado crítico de modelos cap modificados. Así, la función de discontinuidad considerada es la de los modelos "cap modificados" de la mecánica de suelo[2,12], mientras el potencial plástico es la función del von Mises. Más específicamente, sólo la superficie de discontinuidad independiente de cambios de densidad se adopta de los modelos cap; esta simplificación es adecuada para el flujo en régimen estacionario, donde se da por cierto que el material está en estado crítico. Problemas cuyo enfoque de interés corresponde a los primeros momentos del flujo, con cambios grandes en la densidad, no son tratables por esta vía.

La aplicación que los autores tuvieron en mente durante la presente investigación era la simulación de la descarga de silos por acción de la gravedad. Las razones para realizar tal simulación son: a) las presiones en las paredes de la estructura son para llevar a cabo el cálculo estructural del silo; b) las velocidades de descarga son necesarias como una medida de la eficacia del flujo; c) es necesario determinar las características del flujo en lo que se refiere a velocidades para verificar si el material ubicado en diferentes capas se mezclará y d) las presiones dentro de la masa indican si el sólido granular se tensiona excesivamente y puede romperse.

En los apartados siguientes se introduce la viscosidad aparente para un material plástico y se discute la viscosidad para un material viscoplástico a fin de comparar ambas formulaciones; se describe un aspecto importante en el arte y ciencia de modelos constitutivos -cómo uno puede medir los parámetros requeridos por la formulación-; se incluye la aplicación computacional junto con los resultados para dos benchmarks y estudios de sensibilidad y se presentan algunos comentarios finales.

MODELO CONSTITUTIVO

El nuevo modelo constitutivo plástico se introduce en este apartado como una simplificación de una formulación constitutiva anterior que permite simular el flujo compresible, friccional y colisional de materiales granulares[5]. En dicha relación los materiales granulares son simulados por medio de un fluido compresible no newtoniano con efectos de segundo orden en las velocidades de deformación y el tensor de tensiones depende de las derivadas direccionales de la densidad.

Resumen de la relación constitutiva general

En un trabajo anterior, los autores introdujeron una ecuación constitutiva para modelar el flujo de materiales granulares compresibles con fricción y colisiones entre las partículas. Los materiales granulares son simulados por un fluido compresible no newtoniano con efectos de segundo orden en velocidades de deformación y el tensor de tensiones depende de las derivadas direccionales de la función de distribución de volumen. El modelo fue descrito en la referencia[5] y sólo un resumen es presentado aquí.

El tensor de tensiones se define como una función del tensor velocidad de deformación y del tensor gradiente de la distribución de volumen en la siguiente forma

$$T_{ij} = (a_0^e + a_0^d)\delta_{ij} + a_1 D_{ij} + a_2 M_{ij} + a_3 D_{ik} D_{kj} \tag{1}$$

donde T_{ij} son las componentes del tensor de tensiones, δ_{ij} es el delta de Kronecker, M_{ij} son los componentes del tensor gradiente de distribución de volumen, π es la distribución de volumen y a_i son coeficientes que serán descritos más abajo.

Las siguientes definiciones se utilizan

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2}$$

$$M_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \pi}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial \pi}{\partial x_i}\right) \tag{3}$$

El vector de velocidad puede escribirse en la forma

$$v = [u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)] \tag{4}$$

Finalmente, los coeficientes a_0^e, a_0^d, a_1, a_2 y a_3 se obtuvieron en la referencia[5] y pueden calcularse de las expresiones siguientes:

$$a_0^e = -p_c \tag{5}$$

$$a_0^d = -\frac{2(S_{II})_c D_{ii}}{\sqrt{D_{ii}(p_c - p_i)^2 + 4V_{II}(S_{II})_c}} \left[\frac{1}{3} + \frac{(p_c - p_i)^2}{2(S_{II})_c}\right] \tag{6}$$

$$a_1 = \frac{2(S_{II})_c}{\sqrt{D_{ii}(p_c - p_i)^2 + 4V_{II}(S_{II})_c}} \tag{7}$$

$$a_2 = \frac{3\sqrt{2(S_{II})_c}(p_c - p_i)}{\sqrt{2(S_{II})_c(M_I)^2 + 9(p_c - p_i)^2 M_{IV}}} \tag{8}$$

$$a_3 = \frac{\bar{\omega}}{(\pi_m - \pi)^2} \tag{9}$$

En ecs. (5)–(9) π y π_m son la función distribución de volumen y el valor más alto que la función distribución de volumen puede alcanzar, $\bar{\omega}$ es un parámetro que depende del material, D_{II} es el segundo invariante del tensor velocidad de deformación, V_{II} es el segundo invariante del tensor desviador de velocidades de deformación y M_I y M_{IV} son funciones del tensor M_{ij} en la forma

$$M_I = M_{ii} \tag{10}$$

$$M_{IV} = (M_{ij})^2 - \frac{2}{3} M_{ij} M_{kk} \delta_{ij} + \left(\frac{M_{kk}}{3}\right)^2 \delta_{ij} \tag{11}$$

La función que representa el segundo invariante del tensor desviador de tensiones en términos de la presión crítica es

$$(S_{II})_c = [\alpha - \delta e^{-\tau p_c} + \theta p_c]^2 \tag{12}$$

donde α, δ, τ y θ son parámetros del material y deben obtenerse por medio de experimentos, como se explica más adelante. Ec. (12) representa el estado crítico en los modelos cap modificados.

La mayor presión negativa (tensión) que el material puede tener es

$$p_i = -c \frac{\sqrt{3}}{\tan(\phi)} \tag{13}$$

donde c es la cohesión y ϕ el ángulo de fricción del material.

Siguiendo el trabajo de Gray *et al.*[11] la ecuación de p_c como función de la densidad es

$$p_c = \sigma(\varphi\pi)^z \tag{14}$$

σ y z son parámetros del material y φ es la densidad de los granos individuales. El modelo constitutivo queda completamente determinado por las ecs. (1)–(14).

Nuevas consideraciones

La complejidad del modelo general se reduce por medio de consideraciones sobre el comportamiento del material usando características propias del flujo en análisis. Para obtener la nueva relación para simular la descarga estacionaria se introducen dos simplificaciones: en primer lugar se supone que los materiales granulares fluyen sin cambios en su densidad durante la descarga en régimen estacionario y segundo, el efecto de las colisiones entre las partículas en el tensor de tensiones es despreciada. Discutiremos a continuación ambas simplificaciones.

a) Densidad constante durante la descarga en estado estacionario. El problema de interés en nuestro caso es la descarga por gravedad de silos. Durante la primera fase de vaciado hay un estado transitorio, con las cargas más elevadas sobre las paredes del silo y posteriormente existe una segunda etapa dominada por un flujo en régimen estacionario. El tiempo de duración de la descarga transitoria depende de la geometría del silo y las dimensiones de la boca de salida, así como de las propiedades del material granular almacenado, pero puede tomar sólo unos pocos segundos. La hipótesis de incompresibilidad parece adecuada para la descarga estacionaria. El sólido granular sufre deformaciones durante los primeros instantes del flujo de forma tal que un estado crítico gobierna el flujo en régimen estacionario.

b) Los efectos de las colisiones son despreciados. En un silo, la influencia de colisiones entre los granos en el tensor de tensiones es generalmente abandonada basada en la evidencia experimental. Los investigadores no consideran las colisiones en los silos como una variable pertinente del problema[13,14,23]. Las colisiones no son importantes debido a que las distancias entre los granos durante el flujo dentro del silo son pequeñas comparadas con las dimensiones de los granos. Además, las colisiones son despreciables en materiales cohesivos.

Modelo constitutivo para densidad constante

Para problemas en los que el flujo ocurre sin cambios significativos en la densidad del material se puede suponer una densidad constante en la forma

$$\rho = \varphi\pi \tag{15}$$

Así, todos los componentes del tensor M_{ij} (derivadas direccionales de la distribución de volumen) son cero

$$M_{ij} = 0 \tag{16}$$

Además

$$D_{ii} = 0 \tag{17}$$

Consideramos los coeficientes en ec. (1). La componente disipativa a_0^d se anula

$$a_0^d = 0 \tag{18}$$

mientras que la parte conservativa a_0^e resulta en

$$a_0^e = -p \tag{19}$$

Nótese que la presión hidrostática ha sido considerada en ec. (19) en lugar de la presión crítica; esto es debido a la condición de flujo incompresible

$$p = p_c \tag{20}$$

por lo tanto no hay necesidad de evaluar σ y φ.

Las velocidades de deformación coinciden con las velocidades de deformación desviadoras

$$D_{ij} = V_{ij} \Longrightarrow D_{II} = V_{II} \tag{21}$$

Para evaluar el coeficiente a_1 es necesario introducir las ecs. (12), (17), (20), (21) en la ec. (7), conduciendo a

$$a_1 = \sqrt{\frac{(S_{II})_c}{V_{II}}} = \frac{\alpha - \delta e^{-\tau p_c} + \theta p_c}{\sqrt{V_{II}}} \tag{22}$$

El coeficiente que refleja los efectos de segundo orden se reduce a una constante

$$a_3 = -\frac{\bar{\omega}}{\pi^2} \tag{23}$$

Bajo las hipótesis presentes, la forma final del tensor de tensión se escribe como

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \left[\frac{\alpha - \delta e^{-\tau p_c} + \theta p_c}{\sqrt{V_{II}}}\right] D_{ij} + \left[\frac{\bar{\omega}}{\pi}\right] D_{ik} D_{kj} \tag{24}$$

es decir, las componentes del tensor de tensión son una función de la presión hidrostática $p(x,t)$ y de las componentes del vector velocidad.

Modelo constitutivo para la descarga transitoria de silos

Siempre que se requiera considerar la compresibilidad para el análisis, como durante los primeros instantes de la descarga, la formulación presente conduce al siguiente conjunto de ecuaciones. No son considerados los efectos de segundo orden, pero los cambios en la densidad son incluidos.

La ecuación constitutiva resulta en

$$T_{ij} = (a_0^e + a_0^d)\delta_{ij} + a_1 D_{ij} + a_2 M_{ij} \tag{25}$$

donde los coeficientes son

$$a_0^e = -p_c \tag{26}$$

$$a_0^d = -\frac{2(S_{II})_c D_{ii}}{\sqrt{D_{ii}(p_c - p_i)^2 + 4V_{II}(S_{II})_c}} \left[\frac{1}{3} + \frac{(p_c - p_i)^2}{2(S_{II})_c}\right] \tag{27}$$

$$a_1 = \frac{2(S_{II})_c}{\sqrt{D_{ii}(p_c - p_i)^2 + 4V_{II}(S_{II})_c}} \tag{28}$$

$$a_2 = \frac{3\sqrt{2(S_{II})_c}(p_c - p_i)}{\sqrt{2(S_{II})_c(M_I)^2 + 9(p_c - p_i)^2 M_{IV}}} \tag{29}$$

La ecuación de estado, la ecuación de estado crítico y la máxima presión en tensión se expresan como

$$p_c = \sigma(\varphi\pi)^z \tag{30}$$

$$(S_{II})_c = [\alpha - \delta e^{-\tau p_c} + \theta p_c]^2 \tag{31}$$

$$p_i = -c\frac{\sqrt{3}}{\tan(\phi)} \tag{32}$$

La solución del problema incluye la presión crítica p_c, la distribución de volumen π (o la densidad ρ) y las componentes u_i del vector velocidad.

Modelo constitutivo para la descarga estacionaria de silos

Las simplificaciones consideradas para flujo en régimen estacionario son: se desprecia la influencia de los efectos de segundo orden en la ecuación constitutiva y se supone que no hay cambios en la densidad del material. La ecuación constitutiva se transforma en

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \left[\frac{\alpha - \delta e^{-\tau p_c} + \theta p_c}{\sqrt{V_{II}}} \right] D_{ij} \tag{33}$$

Una viscosidad aparente puede definirse en la última ecuación como

$$\mu_a = \frac{\alpha - \delta e^{-\tau p_c} + \theta p_c}{\sqrt{V_{II}}} \tag{34}$$

DERIVACIÓN ALTERNATIVA DEL MODELO CONSTITUTIVO

Un segundo camino para derivar la ecuación constitutiva descrita por la ec. (33) se obtiene utilizando la teoría clásica de plasticidad, con una modificación en la regla de flujo para considerar las velocidades de deformación en lugar de los incrementos de deformación.

Modelo constitutivo plástico

En mecánica de suelos se usan frecuentemente los modelos cap modificados[2,12]. Un concepto importante en estos modelos es la suposición de un estado crítico con una densidad constante a la cual tiende el flujo.

Los materiales con una densidad menor que la crítica aumentarán su densidad inicial y alcanzarán un valor crítico. Por otro lado, los materiales con la densidad mayor que la crítica disminuirán su densidad inicial, hasta que la densidad alcance la del estado crítico. Así, la función de discontinuidad plástica tiene dos funciones: una es fija e independiente de la densidad para modelar el estado crítico y una segunda función varía con los cambios en la densidad.

En este trabajo no concentramos en la parte fija de la función de discontinuidad plástica. La función de discontinuidad de modelos cap modificados para el estado crítico resulta en

$$F = \sqrt{S_{II}} - \left[\alpha - \delta e^{-\tau p_c} + \theta p_c \right] = 0 \tag{35}$$

donde el segundo invariante del tensor desviador de tensiones S_{ij} se define como

$$S_{II} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \tag{36}$$

La presión hidrostática es

$$p = -\frac{1}{3} T_{ij} \tag{37}$$

donde T_{ij} son las componentes del tensor de tensiones. La ec. (35) también contiene cuatro parámetros (α, δ, τ y θ) que necesitan ser evaluados por medio de experimentos para cada tipo de material granular. Algunos consideraciones sobre la forma de su evaluación están descritas más adelante. En los primeros trabajos[4] se emplea la condición que $\theta = 0$ de forma tal que para presiones altas la función del von Mises sea recuperada. El material se comporta como un fluido de Bingham[1] en el cual la presión no influye en la ecuación constitutiva, de manera similar a lo que sucede en los modelos para conformado de metales[24].

Se destaca que la ec. (35) es la combinación de dos funciones de Drucker-Prager, como se ilustra en la Figura 1. Sin embargo para $\theta = 0$ se reduce a la combinación de una función de Drucker-Prager y una función del von Mises.

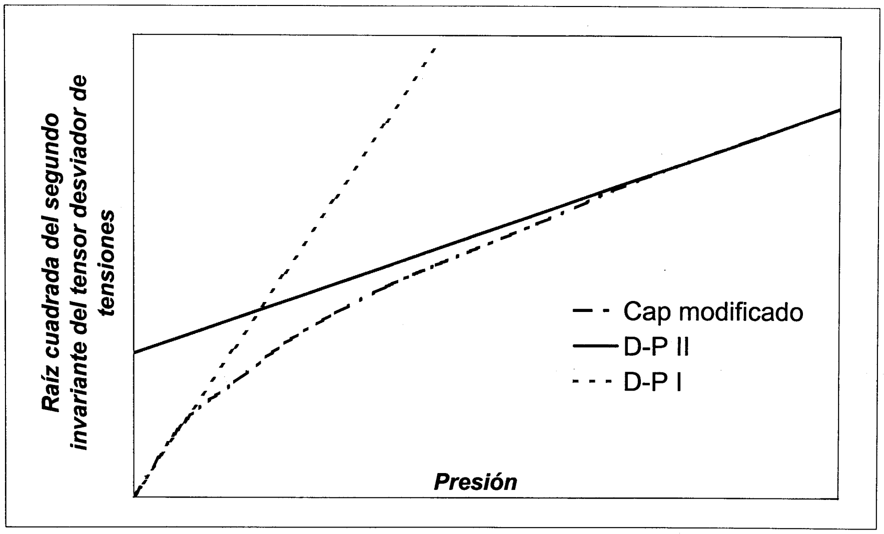

Figura 1. Modelo CAP modificado

Los materiales incompresibles son adecuadamente modelados si se usa plasticidad no asociada con la función de von Mises como potencial plástico, o sea

$$Q = S_{II} - k^2 \tag{38}$$

donde k es un parámetro dependiente de material.

Las velocidades de deformación se evalúan por medio de la regla de flujo

$$D_{ij} = q\frac{\partial Q}{\partial T_{ij}} \tag{39}$$

donde q es un escalar positivo.

De la ec. (38) se obtiene que

$$\frac{\partial Q}{\partial T_{ij}} = S_{ij} \tag{40}$$

Entonces la ec. (39) resulta en

$$D_{ij} = qS_{ij} \tag{41}$$

Las tensiones desviadoras pueden escribirse ahora en función de las velocidades de deformación

$$S_{ij} = \frac{1}{q}D_{ij} \tag{42}$$

Considerando la ec. (42), el segundo invariante del tensor velocidad de deformación se escribe

$$S_{II} = \frac{1}{2q^2} D_{ij} D_{ij} \tag{43}$$

y el segundo invariante del tensor velocidad de deformación se expresa como

$$D_{II} = \frac{1}{2} D_{ij} D_{ij} \tag{44}$$

Debe notarse que al ser éste un modelo incompresible, el tensor y el tensor desviador de la velocidad de deformación son idénticos.

El escalar se obtiene por la substitución de en la ec. (35), llevando a

$$q = \frac{\sqrt{D_{II}}}{\alpha - \delta e^{-\tau p_c} + \theta p_c} \tag{45}$$

De la ec. (42), la relación entre S_{ij} y D_{ij} resulta en

$$S_{ij} = \frac{\alpha - \delta e^{-\tau p_c} + \theta p_c}{\sqrt{D_{II}}} D_{ij} \tag{46}$$

Además un fluido newtoniano incompresible queda caracterizado por la ecuación general

$$S_{ij} = 2\mu_a D_{ij} \tag{47}$$

Entonces puede hallarse una viscosidad aparente

$$\mu_a = \frac{\alpha - \delta e^{-\tau p_c} + \theta p_c}{2\sqrt{D_{II}}} \tag{48}$$

Se hace notar que la ec. (48) es idéntica a la ec. (34). Así, se ha obtenido el mismo modelo constitutivo por dos sendas de desarrollo alternativas.

La ec. (48) es más general que lo que se obtiene usando la función de Drucker-Prager como límite de discontinuidad plástica[3,6]. Si se hace $\delta = 0$ y

$$\alpha = \frac{6c\cos(\phi)}{\sqrt{3}[3 + \sin(\phi)]} \tag{49}$$

$$\theta = \frac{6\sin(\phi)}{\sqrt{3}[3 + \sin(\phi)]} \tag{50}$$

donde ϕ es ángulo de fricción y c cohesión del material. Entonces la ec. (48) resulta en la misma viscosidad aparente que la obtenida usando Drucker-Prager como la función de discontinuidad[3]

$$\mu_a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{D_{II}}} \frac{c\cos(\phi) + p\sin(\phi)}{[3 + \sin(\phi)]} \tag{51}$$

Modelo constitutivo viscoplástico

Una alternativa para obtener una relación constitutiva es considerar la teoría de viscoplasticidad de Perzyna[21]. Se describe aquí un modelo constitutivo similar al presentado en el apartado anterior, pero ahora dicho modelo se basa en esta teoría. Las velocidades de deformación se expresan como

$$D_{ij} = \gamma \langle \beta F^n \rangle \frac{\partial Q}{\partial T_{ij}} \tag{52}$$

donde n y β son parámetros, γ es la fluidez y $\langle\rangle$ son los corchetes de Macauley[17].

Nuevamente, se emplea la ec. (35) para la función de discontinuidad plástica y von Mises como potencial plástico. Es posible mostrar que bajo dichas condiciones la formulación de Perzyna se transforma en

$$D_{ij} = \langle \beta [\sqrt{S_{II}} - \alpha + \delta e^{-\tau p} - \theta p]^n \rangle \frac{\gamma S_{ij}}{2\sqrt{S_{II}}} \tag{53}$$

Luego, de las ecs. (36) y (47) se consigue

$$S_{II} = 4(\mu_a)^2 D_{ij} D_{ij} = 2(\mu_a)^2 D_{II} \tag{54}$$

La ec. (54) puede sustituirse en la ec. (53) para obtener

$$D_{ij} = \langle \beta [\mu_a \sqrt{2D_{II}} - \alpha + \delta e^{-\tau p} - \theta p]^n \rangle \frac{\gamma S_{ij}}{2\mu_a \sqrt{2D_{II}}} \tag{55}$$

Para $n = 1$ la viscosidad aparente toma la forma

$$\mu_a = \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{\alpha - \delta e^{-\tau p} - \theta p}{2\sqrt{D_{II}}} \tag{56}$$

Esta expresión es muy similar a la que se obtuvo para el modelo plástico dado en la ec. (48), la diferencia reside en el término $(\beta\gamma)^{-1}$. Para $\gamma \to \infty$ el modelo viscoplástico conduce al modelo plástico, tal como se espera[17].

EVALUACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS PARÁMETROS

En el modelo constitutivo dado en el apartado anterior se introducen cuatro parámetros (α, δ, τ y θ). Se requiere de alguna discusión para especificar cómo se los puede medir en el caso de materiales granulares.

Evaluación usando los ensayos triaxial y de corte

La ec. (35) puede ser representada en un plano con ejes p y S_{II}; en dicho plano una curva es obtenida por medio de la aproximación dada por dos líneas rectas asociadas a dos funciones de Drucker-Prager. Esto se muestra en Figura 1 y el modelo es conocido como cap modificado. Si $\theta = 0$, entonces en la Figura 1 una línea corresponde a una función de Drucker-Prager y la otra es una función de von Mises.

Para una presión $p = 0$, la ec. (35) se transforma ent

$$\sqrt{S_{II}} = \alpha - \delta \tag{57}$$

Si se supone que $\tau > 0$ y que se está en compresión $p > 0$. Entonces para $p \to \infty$ se obtiene que $e^{-\tau p} \to 0$ y la ec. (35) se simplifica

$$\sqrt{S_{II}} = \alpha + \theta p \tag{58}$$

La ec. (58) se denota aquí como Drucker-Prager II, para $p = 0$ entonces

$$\alpha = \sqrt{S_{II}} \tag{59}$$

El valor de θ puede obtenerse considerando la derivación de la ec. (58) con respecto a la presión p

$$\theta = \frac{d\sqrt{S_{II}}}{dp} \tag{60}$$

Finalmente, el exponente τ puede ser calculado en un punto de la zona de transición entre las dos curvas de Drucker-Prager. Usando la ec. (35) se llega a la siguiente expresión

$$\tau = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha + \theta p - \sqrt{S_{II}}}{\delta}\right) \tag{61}$$

Se destaca que es necesario obtener por medios experimentales la gráfica de la raíz cuadrada del segundo invariante del tensor desviador de tensiones en función de la presión (o del primer invariante del tensor desviador de tensiones) cuando el material entra en fluencia. En los modelos cap se acepta que esta curva se obtiene con el valor asintótico al cual tienden las tensiones en las gráficas tensión-deformación.

Mediante ensayos en el laboratorio se traza la curva S_{II} en función de la presión p. Para tal fin se consideran tres tipos de trayectorias de tensión: la primera con pendientes positivas, la segunda con pendientes verticales y la tercera con pendientes negativas. Los tres grupos de trayectorias de tensión se obtienen por medio del uso de ensayos triaxiales convencionales (cilíndricos).

Las trayectorias con pendientes positivas se hallan de los estudios denominados compresión triaxial convencional (CTC) y extensión triaxial convencional (CTE). Las trayectorias verticales se evalúan a partir los estudios de compresión triaxial (TC), de extensión triaxial (TE) y de corte simple (SS). Por último las trayectorias con pendientes negativas se consiguen por medio de los ensayos de compresión triaxial reducida (RTC) y de extensión triaxial reducida (RTE).

Relación de los parámetros constitutivos con la cohesión y fricción

Si se deriva la ec. (35) con respecto a la presión se tiene que

$$\frac{d\sqrt{S_{II}}}{dp} = \tau\delta e^{-\tau p} + \theta \tag{62}$$

Para presión nula, la condición de arriba conduce a

$$\left|\frac{d\sqrt{S_{II}}}{dp}\right| = \tau\delta + \theta \tag{63}$$

Por otro lado, en el plano $(p, \sqrt{S_{II}})$ la representación gráfica de la ec. (35) intersecta al eje $\sqrt{S_{II}}$ en un punto de dado por

$$\alpha - \delta = 0 \tag{64}$$

La pendiente de la función de Drucker-Prager está determinada por

$$\alpha' = \frac{6\sin(\phi)}{\sqrt{3}[3+\sin(\phi)]} \tag{65}$$

y la intersección con el eje $\sqrt{S_{II}}$ en el plano $(p, \sqrt{S_{II}})$ está dada por

$$k = \frac{6c\cos(\phi)}{\sqrt{3}[3+\sin(\phi)]} \tag{66}$$

De las ecs. (63) y (65) se obtiene

$$\frac{6\sin(\phi)}{\sqrt{3}[3+\sin(\phi)]} = \tau\delta + \theta \tag{67}$$

Finalmente, con el uso de las ecs. (64) y (66) se alcanza

$$\frac{6c\cos(\phi)}{\sqrt{3}[3+\sin(\phi)]} = \alpha - \delta \tag{68}$$

Esto significa que con los valores de ϕ y c es posible escribir condiciones que involucran los parámetros de los modelos cap modificados; sin embargo, las condiciones no son suficientes para tener una única definición y varias combinaciones son posibles.

RESULTADOS OBTENIDOS POR ELEMENTOS FINITOS

Antes de describir la técnica numérica empleada y de presentar los resultados hallados, es necesario precisar la dificultad existente para hallar trabajos experimentales en la literatura especializada que especifiquen las cargas sobre las paredes de silos y/o tolvas durante el flujo másico de descarga régimen. Por tal motivo solamente se consideran dos ejemplos en el presente desarrollo

El primero es un silo experimental que ha sido simulado con geometría plana y el segundo es una tolva axialmente simétrica. Además de las distintas formas geométricas los materiales ensayados poseen diferentes características, de manera que los ejemplos abarcan un amplio espectro de prueba para el modelo desarrollado en este trabajo.

Procedimiento numérico

La formulación de elementos finitos para el presente problema ha sido descrita previamente[3,6,25] y no será repetida aquí. Dicha formulación considera las ecuaciones de equilibrio y de continuidad (restricción de incompresibilidad) para un flujo viscoso. Una forma débil o integral se escribe empleando el principio de potencias virtuales más una forma integral de la condición de flujo incompresible. Las dos relaciones se reúnen en una única expresión por medio de una formulación de penalización.

Las variables primarias son las velocidades y posteriormente se evalúan las presiones. Se han resuelto problemas que poseen geometría plana o simetría axial. Se han implementado elementos lagrangeanos de nueve nodos. Finalmente, el sistema de ecuaciones ensamblado es no lineal debido a la ecuación constitutiva empleada; por tal motivo un procedimiento de iteración directa se utiliza para obtener una solución en forma similar a lo realizado en las simulaciones del conformado de metal hace varios años[24].

Aplicación a un silo plano

Kmita estudió en un laboratorio un silo de dimensiones reducidas para medir las presiones en las paredes[14]. La geometría del silo y la malla utilizada se muestran en la Figura 2. El silo tiene altura de 2,55 m y la intersección entre el cilindro y la tolva ocurre a 1,3 m de altura con respecto a la boca de salida. El material utilizado para los ensayos posee un ángulo de fricción interno $\phi = 33°$, cohesión nula y la fricción entre los granos y la pared es $\phi_p = 33°$. En el trabajo mencionado no se da ninguna indicación con respecto a los parámetros necesitados por el presente modelo.

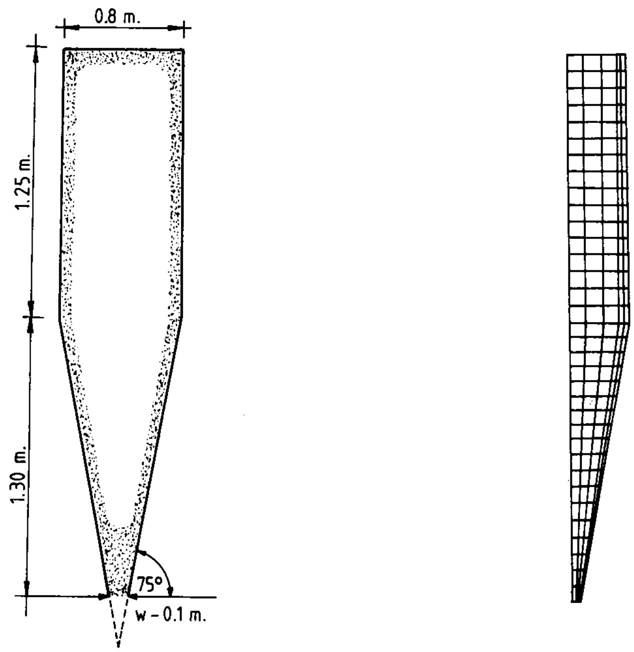

Figura 2. Silo. Geometría y malla. Datos: $c = 0$, $\phi = 33°$, $\phi_w = 33°$

Para modelar numéricamente el ensayo de Kmita, es posible establecer condiciones para α, δ, τ y θ que deben satisfacerse. En el silo analizado, las condiciones son

$$\tau\delta + \theta \cong 0,5400 \tag{69}$$

$$\alpha - \delta = 0 \tag{70}$$

Se han realizado cómputos con elementos finitos usando los siguientes datos:

Curva (1): $\alpha = 1$ kPa, $\tau = 0,25$, $\delta = 1$ kPa, $\theta = 0,29$
Curva (2): $\alpha = 0,5$ kPa, $\tau = 0,5$, $\delta = 0,5$ kPa, $\theta = 0,29$
Curva (3): $\alpha = 0,8$ kPa, $\tau = 0,3125$, $\delta = 0,8$ kPa, $\theta = 0,29$
Curva (4): $\alpha = 0,65$ kPa, $\tau = 0,3816$, $\delta = 0,65$ kPa, $\theta = 0,29$

Debe notarse que otras combinaciones serían aceptables según las ecs. (69)–(70), pero los resultados mostrados en la Figura 3 indican que una concordancia razonable se obtiene con respecto a los valores experimentales de Kmita. La mejor aproximación se encuentra con la curva (1).

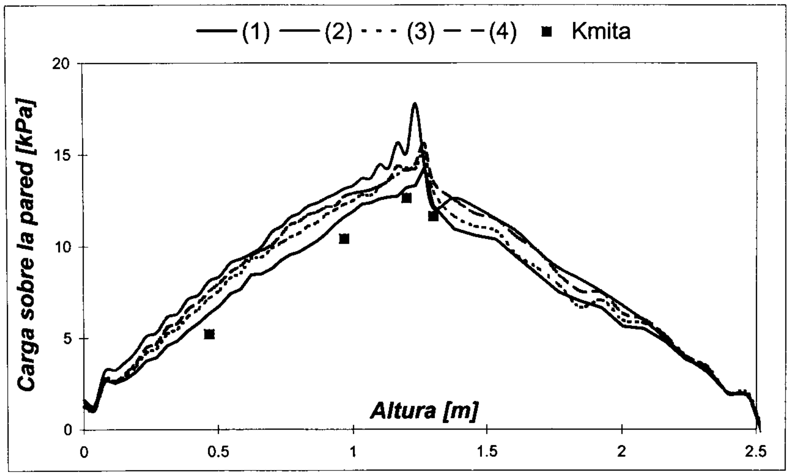

Figura 3. Resultados para el silo de la Figura 2. Carga sobre la pared:
Curva (1): $\alpha = 1$ kPa, $\tau = 0,25$, $\delta = 1$ kPa, $\theta = 0,29$
Curva (2): $\alpha = 0,5$ kPa, $\tau = 0,5$, $\delta = 0,5$ kPa, $\theta = 0,29$
Curva (3): $\alpha = 0,8$ kPa, $\tau = 0,3125$, $\delta = 0,8$ kPa, $\theta = 0,29$
Curva (4): $\alpha = 0,65$ kPa, $\tau = 0,3816$, $\delta = 0,65$ kPa, $\theta = 0,29$

Aplicación a una tolva con simetría axial

El segundo ejemplo es una tolva estudiada por Walker y Blanchard[23]. La tolva mencionada y la malla de elementos finitos se muestran en la Figura 4. Los datos del material son: $c = 0$, $\varphi = 25°$ y $\varphi_p = 15°$. Las condiciones determinadas por las ecs. (67) y (68) especifican que para este material granular

$$\tau\delta + \theta \cong 0,4277 \tag{71}$$

$$\alpha - \delta = 0 \tag{72}$$

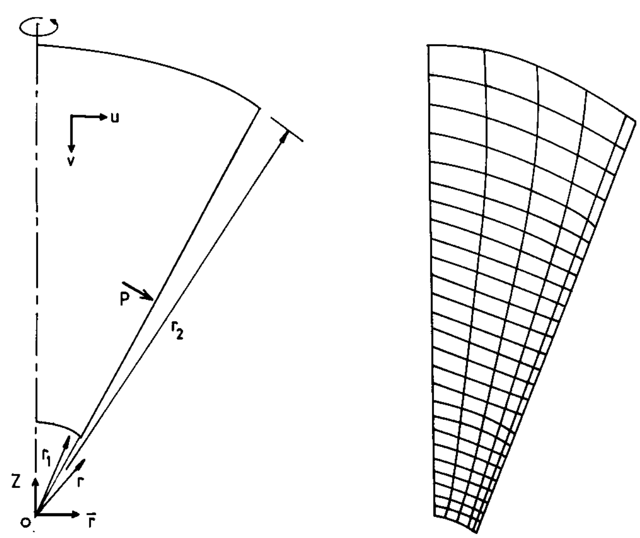

Figura 4. Tolva. Geometría y malla. Datos: $c = 0$, $\phi = 25°$, $\phi_w = 15°$

Una capa de elementos delgados en contacto con la pared de la tolva son los que tienen en consideración el ángulo de fricción grano-pared en forma similar a lo descrito en las referencias[3,6,7]. Para dichos elementos se tiene que

$$\tau\delta + \theta \cong 0,2750 \tag{73}$$

$$\alpha - \delta = 0 \tag{74}$$

De las últimas ecuaciones se obtienen los siguientes valores para los parámetros constitutivos: para elementos que no están en contacto con la pared $\alpha = 0,1$ kPa, $\tau = 0,085$, $\delta = 0,1$ kPa, $\theta = 0,4192$ y para elementos colindantes con la pared se adoptan $\alpha = 0,1$ kPa, $\tau = 0,085$, $\delta = 0,1$ kPa, $\theta = 0,2665$.

La carga en la pared se muestra en la Figura 5. Se observa que para una altura menor que 2/3 de la altura total de la tolva la concordancia entre los resultados numéricos y los experimentales es buena, para alturas superiores a los 2/3 el presente modelo computa valores inferiores que los dados por las mediciones. No obstante, los resultados calculados con el modelo aquí propuesto son una mejor aproximación a los datos experimentales que los dados por otras teorías[19,23].

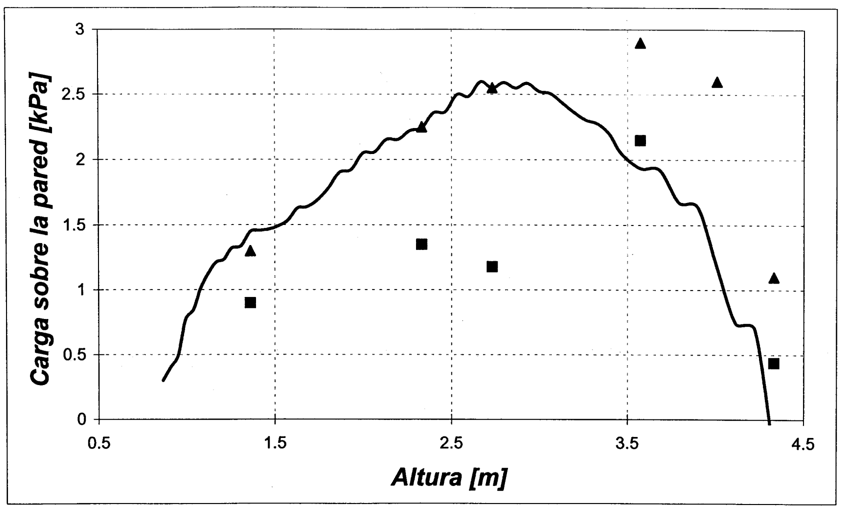

Figura 5. Resultados para la tolva de la Figura 4. Carga sobre la pared: – presente modelo, ▪ límite inferior de las mediciones de Walker y △ límite superior de las mediciones de Walker

Influencia de la geometría del silo

En este apartado se desarrolla un estudio numérico que específica la sensibilidad de la carga sobre la pared y del caudal en volumen Q con respecto a modificaciones en la geometría del silo. Se supone que para estos experimentos numéricos el material granular en estudio posee los siguientes parámetros constitutivos: $\alpha = 1$ kPa, $\tau = 0,25$, $\delta = 1$ kPa, $\theta = 0,29$ y $\rho = 1,63$ kgm^{-3}. Para todos los experimentos numéricos, el caudal Q fue calculado por medio de integración numérica (regla de Simpson).

La geometría del silo considerado se muestra en la Figura 6, donde R es el radio, H la altura total del silo, d el diámetro de la boca de descarga y h la altura de la tolva. Manteniendo valores fijos de $d = 0,125\ R$ y $H = 6,375\ R$, se investiga la influencia de la altura de la tolva dado por el cociente h/R.

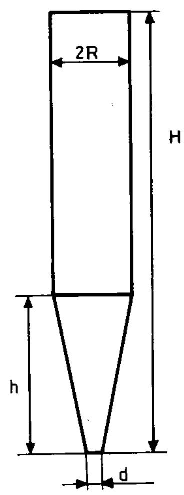

Figura 6. Geometría del silo para el estudio de sensibilidad

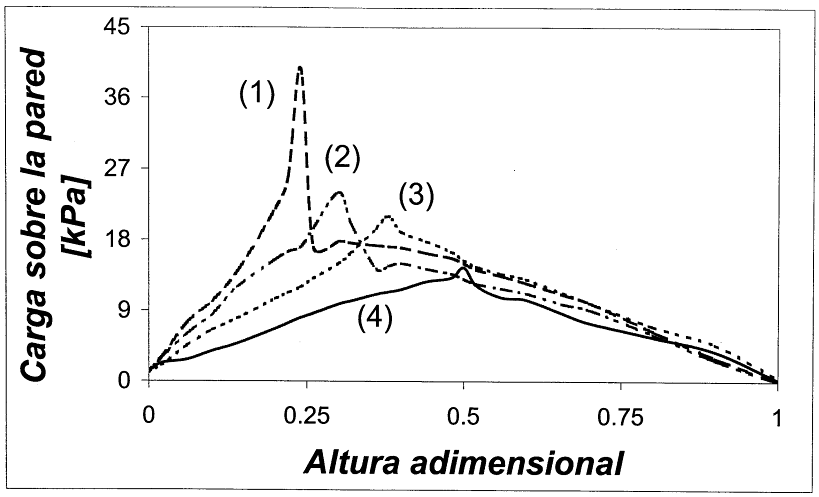

Figura 7. Carga en la pared en función de la altura del silo. Data: $\alpha = 1$ kPa, $\tau = 0,25$, $\delta = 1$ kPa, $\theta = 0,29$ y $\rho = 1,63$ kgm^{-3};
(1) Tolva con $h/R = 1,5$
(2) Tolva con $h/R = 2$
(3) Tolva con $h/R = 2,5$
(4) Tolva con $h/R = 3,25$

En Figura 7 se muestran las tensiones normales sobre la pared en función de la altura adimensional del silo para cuatro casos diferentes. La curva 1 corresponde a una tolva que verifica la relación $h/R = 1{,}5$. Se observa que las tensiones más altas sobre la pared están localizadas en la intersección entre la tolva y el cilindro. El caudal volumétrico para este caso se denota como Q^* y es $Q^* = 0,0015264$ m^{3}s^{-1}. La curva (2) en la Figura 7 muestra las tensiones sobre la pared en función de la altura del silo cuando la altura de la tolva es $h/R = 2$. Aquí también se localiza la tensión más alta en la intersección tolva–cilindro tal como se halló en el ejemplo anterior. En este experimento numérico el caudal se redujo a $Q = 0,85\ Q^*$. Las curvas (3) y (4) en la Figura 7 indican la carga sobre la pared en función de la altura del silo cuando la altura de la tolva es de $h = 2,5\ R$ y $h = 3,25\ R$ respectivamente. En ambas curvas las tensiones más altas se localizan en la intersección tolva–cilindro. El caudal correspondiente al experimento presentado en la curva (3) fue $Q = 0,60\ Q^*$ y para la curva (4) fue $Q = 0,54\ Q^*$.

CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado dos relaciones constitutivas para modelar el flujo de sólidos granulares durante la descarga, una para régimen estacionario y la otra para transitorio. El modelo para descarga estacionaria se ha utilizado en la simulación numérica de la descarga en silos y tolvas por medio del método de elementos finitos y los resultados conducen a buenas aproximaciones con respecto a valores experimentales y teóricos dados por otros autores.

Además, se ha presentado un estudio numérico sobre la sensibilidad de la carga en la pared con respecto a los cambios en la geometría del silo. Se han calculado las cargas sobre la pared y el caudal para cuatro experimentos numéricos. En todos ellos la tensión normal a la pared más elevada se localiza en la intersección tolva–cilindro del silo. Desde un punto de vista del análisis estructural los resultados más favorables (menores cargas) se hallan para la mayor altura de tolva. Sin embargo el caudal en volumen fue más bajo en este experimento numérico y además el silo con esta geometría almacena la menor cantidad de material granular.

Es posible resaltar tres aspectos importantes en las pruebas numéricas realizadas: a) las tensiones normales a la pared más elevadas se localizan a la intersección tolva–cilindro del silo; b) el mayor valor de la carga sobre la pared disminuye a medida que la altura de la tolva crece y c) el caudal disminuye a medida que la altura de la tolva crece.

Los resultados aquí obtenidos indican que hay por lo menos dos opciones en lo que concierne al diseño de un silo: primero, se puede trabajar considerando un diseño que ponga el mayor énfasis en disminuir la carga sobre las paredes. En este caso la tolva debe poseer la altura más elevada que sea posible; sin embargo este silo puede guardar una menor cantidad de material y la velocidad de la descarga será baja. La segunda alternativa es utilizar a la velocidad de descarga como variable que debe ser maximizada. Esto lleva a que la altura de la tolva sea la más pequeña posible; sin embargo las tensiones que el material granular ejercerá sobre la estructura serán más altas en este diseño.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación se apoyó por un subsidió PID 4835 de la Consejo Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Argentina (CONICET) y por un subsidio de Consejo Provincial de Investigación Científica y Tecnológica de la Provincia de Córdoba (CONICOR).

REFERENCIAS

1 E. Bingham, "*Fluidity and plasticity*", McGraw-Hill, New York, (1922).

2 Ch. Desai y H. Siriwardane, "*Constitutive laws for engineering materials*", Prentice-Hall, New Jersey, (1984).

3 M. Diez y L. Godoy, "Viscoplastic incompressible flow of frictional cohesive solids", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. **34**, pp. 395–408, (1992).

4 F. Dimagio y I. Sandler, "Material model for granular soils", *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. **97**, N° 3, pp. 935–950, (1971).

5 S. Elaskar y L. Godoy, "An application of non-newtonian fluid mechanics to granular flow using a critical state concept", *Powder Handling & Processing*, Vol. **10**, N° 3, pp. 239–244, (1998).

6 S. Elaskar, L. Godoy y A. Brewer, "Granular flow based on non-newtonian fluid mechanics", *Engineering Mechanics*, Vol. **1**, pp. 341–345, ASCE, New York, (1996).

7 S. Elaskar, L. Godoy, D. Gray y J. Stile, "A viscoplastic approach to model the flow of granular solids", *International Journal of Solids and Structures*, en prensa, (1999).

8 M. Goodman y S. Cowin, "Two problems in the gravity flow of granular materials", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. **45**, pp. 321–339, (1971).

9 M. Goodman y S. Cowin, "A continuum theory of granular materials", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. **44**, pp. 249–266, (1972).

10 R. Gudhe, C. Yalamanchilli y M. Massopui, "Flow of granular materials down a vertical pipe", *International Journal of Non Linear Mechanics*, Vol. **29**, N° 1, pp. 1–12, (1994).

11 D. Gray, J. Stile y I. Celik, "Theoretical and numerical studies of constitutive relation for frictional granular flow", Annual Report DOE/MC/24207-3009 (DE90009662), U.S. Department of Energy, Morgantown, West Virginia, (1991).

12 H. Roscoe y P. Worth, "*Critical state soil mechanics*", McGraw-Hill, London, (1968).

13 M. Kaminski y H. Hamadeh, "An experimental investigation of funnel flow and wall pressure variation in silos", *Powder Handling & Processing*, Vol. **6**, N° 4, pp. 389–393, (1994).

14 J. Kmita, "An experimental analysis of internal silo load", *Bulk Solids Handling*, Vol. **11**, N° 2, pp. 459–468, (1991).

15 D. Kolymbas, "Hypoplasticity as a constitutive framework for granular material", *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Vol. **1**, pp. 197–208, Balkema, Rotterdam, (1994).

16 P. Lade, "Elasto-plastic stress strain theory for cohesionless soil with curved yield surface", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. **13**, pp. 1019–1031, (1977).

17 J. Lubliner, "*Plasticity theory*", Maxwell Macmillan, New York, (1990).

18 D. McTigue, "A non linear constitutive model to granular materials: application to gravity flow", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **40**, pp. 291–296, (1982).

19 T. Nguyen, C. Brennen y R. Sabersky, "Gravity flow of granular materials in conical hoppers", *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. **46**, N° 3, pp. 529–535, (1979).

20 S. Passman, J. Nunziato, P. Bailey y J. Thomas, "Shearing flows of granular materials", *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. **104**, N° 4, pp. 773–783, (1980).

21 P. Prezyna, "Fundamental problems in viscoplasticity", *Recent Advances in Applied Mechanics*, Vol. **9**, pp. 343–377, Academic Press, New York, (1996).

22 S. Savage, "Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. **92**, pp. 53–96, (1979).

23 D. Walker y M. Blanchard, "Pressures in experimental coal hoppers", *Chemical Engineering Science*, Vol. **22**, pp. 1706–1713, (1967).

24 O. Zienkiewicz, E. Oñate y J. Heinrich, "A general formulation for coupled thermal flow of metals using finite elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **17**, pp. 1497–1514, (1981).

25 O. Zienkiewicz y R. Taylor, "*The finite element method*", Vol. **2**, McGraw-Hill, New York, (1991).