

# UN MODELO DE ELEMENTOS FINITOS CON APROXIMACIÓN BIDIMENSIONAL POR CAPAS PARA EL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS MULTILAMINARES

SALVADOR BOTELLO\*  
EUGENIO OÑATE\*\*  
y  
JUAN MIQUEL\*\*

*\*Facultad de Ingeniería Civil  
Universidad de Guanajuato  
Av. Juárez 77, 36000, Guanajuato, Gto., México*

*\*\* E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Cataluña  
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España*

## RESUMEN

En este trabajo se presenta un modelo de elementos finitos con una aproximación bidimensional por capas para el análisis de estructuras multilaminares tipo placa y lámina plana en regímenes estático y dinámico. El elemento triangular desarrollado está basado en un elemento degenerado de 3D utilizando un campo de deformaciones impuestas de cortante. Las variables a través del espesor son eliminadas utilizando una técnica de condensación de variables. Se presentan ejemplos de aplicación de la formulación propuesta.

## SUMMARY

A layer-wise finite element model for the analysis of composite plate and shell structures under static and dynamic loading is presented. The triangular element used is based on degenerate solid theory and an assumed shear strain approach. The thickness variables are eliminated using a substructuring technique. Examples of application showing the good performance of the formulation are given.

Recibido: Febrero 1994

## INTRODUCCIÓN

La teoría para el análisis de placas multilaminares considerando una aproximación bidimensional por capas fue desarrollada por Reddy<sup>1,2,3</sup> esta teoría permite la continuidad de las tensiones tangenciales a través del espesor ya que el campo de desplazamientos tridimensional se expresa como una combinación lineal de la coordenada sobre el espesor y funciones independientes de la posición dentro de cada capa como

$$u_i(x, y, z) = u_i^0(x, y) + \sum_{j=1}^{n_i} u_i^j(x, y)\Phi_j(z) \quad (1)$$

donde  $n_i$  es el número de capas de análisis a través del espesor del laminado (la discretización en elementos finitos) y  $\Phi_j$  son funciones conocidas de la coordenada sobre el espesor  $z$ . Las funciones  $\Phi_j$  son continuas por intervalos, definidas únicamente sobre dos capas adyacentes y pueden interpretarse como funciones de interpolación de Lagrange globales asociadas con la superficie común (interfase)  $j$  de dos capas a través del espesor del multilaminado. Debido a esta naturaleza local de  $\Phi_j$ , los desplazamientos son continuos a través del espesor pero no ocurre así con sus derivadas respecto a  $z$ . Esto implica que las deformaciones transversales son discontinuas en las superficies de contacto entre capas, por lo que las tensiones tangenciales pueden ser continuas, en el caso de placas contiguas con propiedades mecánicas diferentes, lo que se corresponde con lo esperado en la práctica.

En este trabajo se presenta un elemento triangular de sólido degenerado con aproximación bidimensional por capas para análisis de placas y láminas constituidas por materiales compuestos laminares. El elemento puede ser considerado una extensión del elemento triangular lineal/cuadrático de Reissner-Mindlin para placas basado en un campo de deformaciones impuestas formulado por Zienkiewicz y otros<sup>4</sup>, Taylor y Papadopoulos<sup>5</sup> y Oñate y otros<sup>6,7,8</sup>. Los desplazamientos en el plano del elemento son interpolados linealmente dentro de cada capa y son eliminados durante el ensamblaje global utilizando una técnica de condensación de variables. En las siguientes secciones se presentan detalles sobre la formulación del elemento.

### ELEMENTO FINITO TRIANGULAR BASADO EN UNA FORMULACIÓN BIDIMENSIONAL POR CAPAS PARA ANÁLISIS DE PLACAS MULTILAMINARES

La geometría del elemento se muestra en la Figura 1. Adviértase que el laminado se discretiza en  $n$  capas de cálculo y  $n+1$  superficies interlaminares. Estas capas de cálculo pueden o no coincidir con las *láminas* reales que constituyen el multilaminado. Los desplazamientos horizontales (en el plano) para la capa  $k$ -ésima se interpolan utilizando

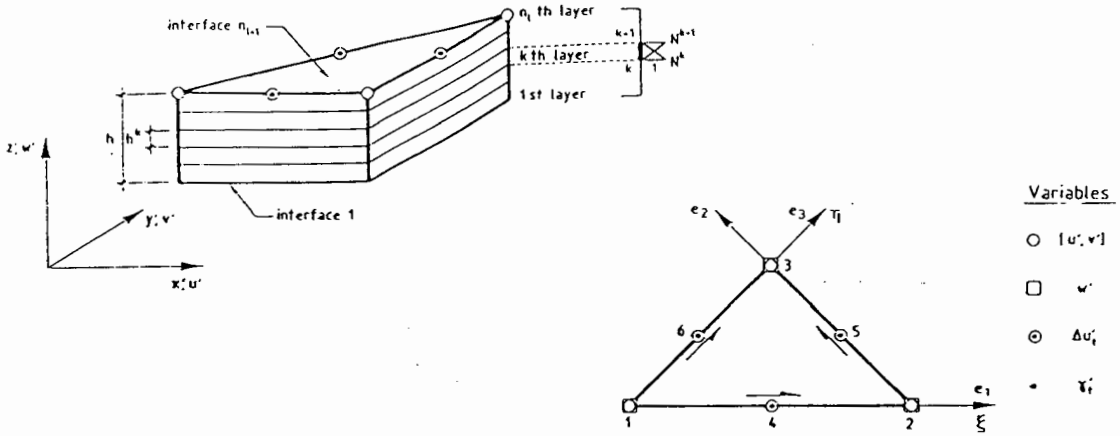


Figura 1. Elemento triangular con una formulación bidimensional por capas

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) \left[ N^k(\zeta) \begin{Bmatrix} u_i^k \\ v_i^k \end{Bmatrix} + N^{k+1}(\zeta) \begin{Bmatrix} u_i^{k+1} \\ v_i^{k+1} \end{Bmatrix} \right] + \\ &+ \sum_{i=4}^6 N_i(\xi, \eta) \mathbf{e}_{i-3} \left[ N^k(\zeta) \Delta u_{t_i}^k + N^{k+1}(\zeta) \Delta u_{t_i}^{k+1} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\Delta u_{t_i}^k$  ( $i = 4, 5, 6$ ) son los incrementos de desplazamiento en el centro de cada lado en la dirección definida por los vectores unitarios  $\mathbf{e}_{i-3}$  para la superficie interlaminar (interfase)  $k$ . El desplazamiento en dirección normal al plano de la placa se considera constante sobre el espesor del multilaminado y es interpolado por

$$w = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) w_i \quad (3)$$

En (2) y (3)

$$\begin{aligned} N_i(\xi, \eta) &= L_i & i &= 1, 2, 3 \\ N_4(\xi, \eta) &= 4L_1L_2, & N_5(\xi, \eta) &= 4L_2L_3, & N_6(\xi, \eta) &= 4L_1L_3 \end{aligned} \quad (4)$$

Donde  $L_i$  son las funciones de forma lineales del elemento de tres nodos<sup>9</sup> y

$$N^k(\zeta) = \frac{1-\zeta}{2}, \quad N^{k+1}(\zeta) = \frac{1+\zeta}{2} \quad (5)$$

Las ecs. (2) y (3) implican una interpolación jerárquica cuadrática para los desplazamientos en el plano  $u$  y  $v$  para cada capa y una interpolación lineal para  $w$ . Adviértase que para una sola capa el elemento coincide con el triángulo lineal/cuadrático basado en la teoría de placas de Reissner-Mindlin<sup>4-8</sup>.

El indeseable defecto de "bloqueo" de la solución para placas delgadas, usual en los elementos de placa de Reissner-Mindlin<sup>20</sup>, puede ser eludido si se impone un campo de deformaciones de cortante transversal compatible con el campo de desplazamientos utilizado<sup>6-8</sup>. Las condiciones de compatibilidad que tienen que satisfacer los campos de desplazamientos, rotaciones y deformaciones de cortante se pueden encontrar en<sup>4-9</sup>. El campo de deformaciones de cortante impuesto en este trabajo tiene una variación lineal dentro del elemento, con valores constantes de las deformaciones de cortante tangenciales a lo largo de cada lado<sup>7,20</sup>.

Las ecuaciones (2)-(3) y las deformaciones de cortante impuestas conducen a unas expresiones generalizadas de deformaciones de "flexión" y de "cortante transversal" para cada capa, tal que

$$\epsilon_f = \mathbf{B}_f \mathbf{a}^{(k)} \quad \text{y} \quad \epsilon_s = \mathbf{B}_s \mathbf{a}^{(k)} \quad (6)$$

$$\epsilon_f = \left[ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]^T; \quad \epsilon_s = \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right]^T \quad (7)$$

En las expresiones anteriores no se ha utilizado el término de deformación del espesor  $\epsilon_z$ , de acuerdo con la hipótesis de tensión plana ( $\sigma_z = 0$ ) de la teoría de placas. En (6)  $\mathbf{B}_f$  y  $\mathbf{B}_s$  son las matrices de deformaciones de flexión y cortante para cada capa, y se muestran en los Cuadros I y II<sup>10,12</sup> y  $\mathbf{a}^k$  es el vector de desplazamientos de la capa  $k$  dado por

$$\mathbf{a}^{(k)} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{a}^k \\ \mathbf{a}^{k+1} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array} \right\} \quad (8)$$

donde el índice  $k$  indica que las variables están referidas a dicha superficie interlaminar, y

$$\mathbf{a}^k = [u_1^k, v_1^k, u_2^k, v_2^k, u_3^k, v_3^k, \Delta u_{t_4}^k, \Delta u_{t_5}^k, \Delta u_{t_6}^k]^T \quad (9)$$

La matriz de rigidez de cada capa se calcula por

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int \int_{A^{(e)}} \int_{h^k} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \tag{10}$$

donde  $\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_f \\ \mathbf{B}_s \end{Bmatrix}$  y  $\mathbf{D}$  es la clásica matriz de ecuación constitutiva para placas ortótropas<sup>1-3,20</sup>.

Debe hacerse notar que la dirección del cortante tangencial debe de estar dirigida en una dirección única para cada lado de elementos contiguos. Esto se debe a la forma en que se definen los desplazamientos tangenciales incrementales  $\Delta u_{t_i}$  en el centro del lado. El signo de la matriz  $\mathbf{B}_w$  del Cuadro II es el correspondiente a la definición de la dirección  $\mathbf{e}_i$  tomada en sentido de los nodos menor a mayor (en conectividad global) de los extremos de cada lado del elemento<sup>10,20</sup>.

$\mathbf{B}_f = [\mathbf{B}_f^k, \mathbf{B}_f^{k+1}, \mathbf{0}]$ $\mathbf{B}_f^k = [\mathbf{B}_{f_1}^k, \mathbf{B}_{f_2}^k, \mathbf{B}_{f_3}^k, \bar{\mathbf{B}}_{f_4}^k, \bar{\mathbf{B}}_{f_5}^k, \bar{\mathbf{B}}_{f_6}^k]$ <p style="text-align: center;">con <math>\mathbf{B}_{f_i}^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} N^k &amp; 0 \\ 0 &amp; \frac{\partial N_i}{\partial y} N^k \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} N^k &amp; \frac{\partial N_i}{\partial x} N^k \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3</math></p> $\bar{\mathbf{B}}_{f_i}^k = \mathbf{B}_{f_{i-3}}^k \mathbf{e}_{i-3}, \quad i = 4, 5, 6$
$c_i, s_i = \text{Componentes del vector unitario } \mathbf{e}_i = [c_i, s_i]^T \quad (i = 1, 2, 3)$

Cuadro I. Matriz de deformaciones de flexión para el elemento triangular propuesto

La integral sobre el volúmen (10) se efectúa sobre todas las capas de espesor  $h^k$  y área  $A^{(e)}$  para cada superficie interlaminar. La simplicidad de las funciones de forma lineales  $N^k$  permite realizar una integración explícita sobre el espesor y debe emplearse una cuadratura de tres puntos de Gauss para evaluar la integral de área sobre cada interfase.

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M} [\mathbf{B}_s^k, \mathbf{B}_s^{k+1}, \mathbf{B}_w]$$

$$\mathbf{B}_s^k = \begin{bmatrix} a_{12} & b_{12} & a_{12} & b_{12} & 0 & 0 & c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{23}}{\sqrt{2}} & \frac{b_{23}}{\sqrt{2}} & \frac{a_{23}}{\sqrt{2}} & \frac{b_{23}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{c_{23}}{\sqrt{2}} & 0 \\ a_{31} & b_{31} & 0 & 0 & a_{32} & b_{32} & 0 & 0 & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_s^{k+1} = -\mathbf{B}_s^k$$

$$\mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1-\eta & -\sqrt{2}\eta & \eta \\ \xi & \sqrt{2}\xi & 1-\xi \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = -\frac{c_i l^{ij}}{2h^k}; \quad b_{ij} = -\frac{s_i l^{ij}}{2h^k}; \quad c_{ij} = -\frac{2l^{ij}}{3h^k}$$

$c_i, s_i$  = Componentes del vector unitario  $\mathbf{e}_i = [c_i, s_i]^T$  ( $i = 1, 2, 3$ )  
 $l^{ij}$  → Longitud del lado  $ij$  del elemento  
 $h^k$  → Espesor de la capa  $k$   
 $\mathbf{J}$  = Jacobiano de la matriz de transformación  $\xi, \eta \rightarrow xy$

Cuadro II. Matriz de deformación de cortante para el elemento triangular propuesto

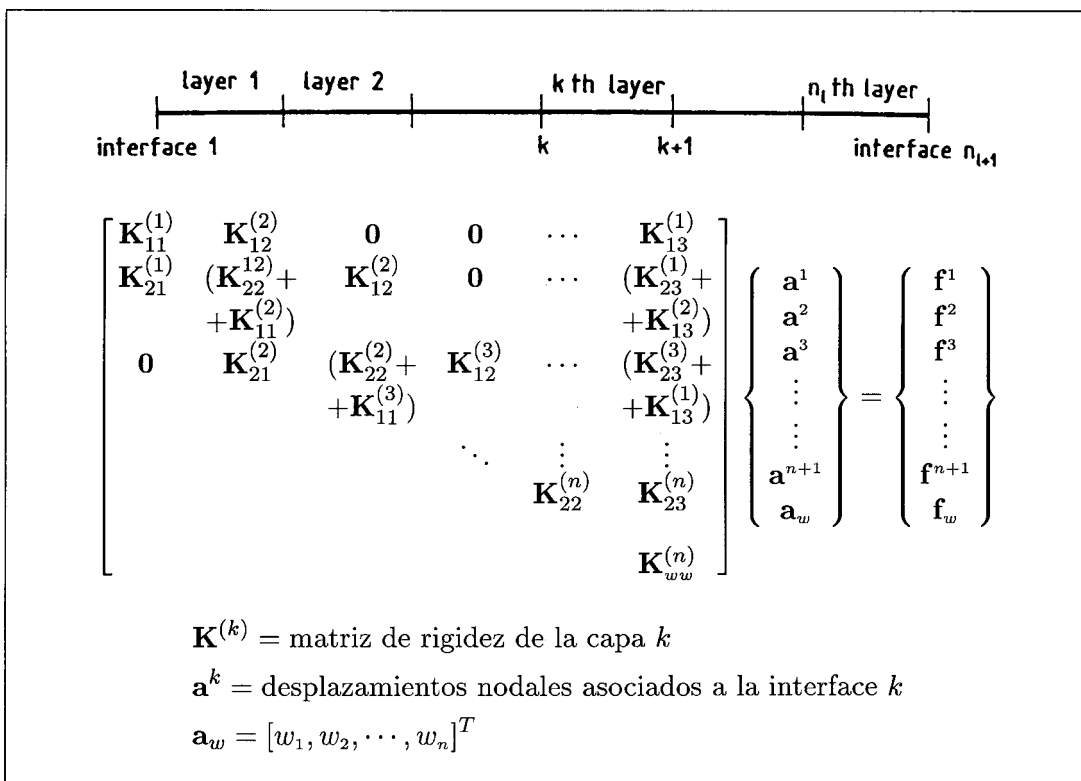
### CONDENSACIÓN POR CAPAS DE GRADOS DE LIBERTAD

El ensamblaje sobre el espesor de las matrices de rigidez de las diferentes capas es idéntico al utilizado en elementos barra alineados. Esta circunstancia permite eliminar los grados de libertad en el plano de cada capa  $\mathbf{a}^k$ , después de ser ensamblados en la matriz de rigidez global.

Del Cuadro III se deduce que después de ensamblar la matriz de rigidez de la primera capa, las variables  $\mathbf{a}^1$  ya no están asociadas a ninguna otra capa y pueden ser eliminadas mediante la expresión siguiente:

$$\mathbf{a}^1 = [\mathbf{K}_{11}^{(1)}]^{-1} [\mathbf{f}^1 - \mathbf{K}_{12}^{(1)} \mathbf{a}^2 - \mathbf{K}_{13}^{(1)} \mathbf{a}_w] \quad (11)$$

En el sistema de ecuaciones se incluye ahora la rigidez de la segunda capa escrita en función de  $\mathbf{a}^2$ ,  $\mathbf{a}^3$  y  $\mathbf{a}_w$ . Las variables de la segunda interfase  $\mathbf{a}^2$  se eliminan utilizando una ecuación similar a (11). Este procedimiento debe repetirse al incluir la rigidez asociada a cada nueva capa, eliminando en cada caso los desplazamientos de la  $k$ -ésima superficie interlaminar,  $\mathbf{a}^k$ , obteniendo de esta forma un sistema de ecuaciones en función de los desplazamientos de la última interfase  $k+1$ ,  $\mathbf{a}^{k+1}$ , y de los desplazamientos verticales  $\mathbf{a}_w$ .



Cuadro III. Estructura del sistema de ecuaciones global para la placa laminada con  $n$  capas

Esta técnica de condensación conduce a un sistema de ecuaciones final que contiene exclusivamente los desplazamientos en el plano de la última interfase  $\mathbf{a}^{n+1}$  y los desplazamientos verticales  $\mathbf{a}_w$ , tal que

$$\begin{bmatrix}
 \bar{\mathbf{K}}_{11} & \bar{\mathbf{K}}_{12} \\
 \bar{\mathbf{K}}_{21} & \bar{\mathbf{K}}_{22}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \mathbf{a}^{n+1} \\
 \mathbf{a}_w
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 \bar{\mathbf{f}}^{n+1} \\
 \bar{\mathbf{f}}_w
 \end{Bmatrix}
 \tag{12}$$

donde  $(\bar{\cdot})$  son los coeficientes que han sido adecuadamente modificados en el proceso de condensación. La solución de (12) permite conocer los desplazamientos de la última superficie interlaminar y los desplazamientos verticales, utilizando dichos desplazamientos mediante ecuaciones similares a (11), podemos conocer todos los grados de libertad de cada superficie interlaminar. Esta técnica fue inicialmente utilizada en el contexto de placas laminadas por Owen y Li,<sup>13-15</sup> y posteriormente por los autores de este trabajo<sup>10,11,12</sup>.

## ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES

El cálculo de las frecuencias naturales de vibración involucra la solución del problema típico de autovalores

$$[\mathbf{K} - \lambda^2 \mathbf{M}] \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (13)$$

Como los modos de vibración tienen una fuerte componente vertical, y dicho desplazamiento es común para todas las capas, la masa asociada a ese movimiento se puede suponer asociado a la última superficie interlaminar,  $\mathbf{M}_w$ . Utilizando la técnica de condensación de grados de libertad<sup>12,13,16</sup>, podemos llegar a obtener una matriz de rigidez asociada exclusivamente a los desplazamientos verticales,  $\hat{\mathbf{K}}_w$ , por lo que la ecuación de autovalores por resolver tiene la forma

$$[\hat{\mathbf{K}}_w - \lambda^2 \mathbf{M}_w] \mathbf{a}_w = \mathbf{0} \quad (14)$$

Podemos resolver la ecuación (14) utilizando procedimientos comunes (por ejemplo iteración inversa) para obtener las frecuencias naturales  $\lambda$ . Los vectores propios que contengan todos los grados de libertad de la placa multilaminada pueden obtenerse utilizando adecuadamente la técnica de condensación de grados de libertad en sentido inverso.

## COMPORTAMIENTO NO LINEAL GEOMÉTRICO

Los efectos de no linealidad geométrica pueden ser fácilmente incluidos. En este trabajo se utiliza la hipótesis de Von-Karman utilizando una configuración Lagrangiana Total. La solución del sistema de ecuaciones no lineal se realiza utilizando un procedimiento del tipo Newton-Raphson. La solución para los incrementos de desplazamiento de cada iteración pueden simplificarse aplicando la técnica de condensación anteriormente propuesta la matriz de rigidez tangente y al vector de fuerzas residuales de tal forma que sólo los desplazamientos de la última superficie interlaminar son considerados en la solución directa del sistema iterativo. Debe remarcarse sin embargo que deberá conocerse en cada iteración todo el vector de fuerzas residuales con el objeto de comprobar la convergencia<sup>12</sup>.

## ANÁLISIS DE ESTABILIDAD INICIAL

El cálculo de las cargas de pandeo inicial sigue los procedimientos comunes<sup>9</sup> en donde la solución se obtiene resolviendo un problema de autovalores similar al descrito en (13). En este caso también puede utilizarse la técnica de condensación de variables por capas logrando de esta forma una reducción considerable del número de grados de libertad al problema de autovalores.

## ANÁLISIS DINÁMICO

El análisis dinámico por superposición modal es de sencilla aplicación conociendo las frecuencias naturales (y los correspondientes modos de vibración) que se deseen utilizar. Para un análisis paso a paso, consideraremos la ecuación de equilibrio dinámico<sup>19</sup>

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}(t) \quad (15)$$

en donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa de la estructura,  $\mathbf{C}$  es la matriz de amortiguamiento,  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez,  $\ddot{\mathbf{a}}$  es el vector de aceleraciones,  $\dot{\mathbf{a}}$  es el vector de velocidades y  $\mathbf{a}$  es el vector de desplazamientos. Aplicando las consideraciones de condensación de variables indicada en apartados anteriores, podemos escribir la ecuación dinámica del movimiento asociándola a grados de libertad verticales exclusivamente, por lo que

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{a}}_w + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{a}}_w + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{a}_w = \mathbf{f}_w(t) \quad (16)$$

en donde  $(\bar{\cdot})$  son las matrices asociadas a los desplazamientos verticales (después de realizar la condensación de variables). La matriz de amortiguamiento la obtendremos como una combinación lineal de las matrices de masa y rigidez de la forma

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{a}_0\bar{\mathbf{M}} + \mathbf{a}_1\bar{\mathbf{K}} \quad (17)$$

en donde los parámetros  $\mathbf{a}_0$  y  $\mathbf{a}_1$  se calcularán en función de la porción de amortiguamiento crítico elegido<sup>12</sup>. La técnica de solución de avance en el tiempo empleada en este trabajo es la de Newmark.

## EXTENSIÓN DEL ELEMENTO TRIANGULAR PARA EL ANÁLISIS DE LÁMINAS PLANAS MULTILAMINARES

El elemento de placa descrito anteriormente puede utilizarse directamente para el análisis de láminas planas sin más que considerar primeramente la cinemática del elemento definida con respecto a un sistema de ejes cartesianos locales  $x', y', z'$ . Los ejes  $x'$  y  $y'$  están contenidos en el plano del elemento y definen los desplazamientos del mismo, mientras que el desplazamiento  $z'$  es normal a dicho plano. Una vez obtenida la matriz de rigidez en dicho sistema de ejes locales se procede a su transformación a los ejes globales (Figura 2) en la forma usual.

Al igual que en el caso de placas se definen  $n$  capas de cálculo y  $n + 1$  superficies

interlaminares. Los desplazamientos en el plano del elemento  $u', v'$  de la capa  $k$ -ésima son interpolados mediante<sup>1-3</sup>

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} = & \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) \left[ \begin{Bmatrix} u'_{i,o} \\ v'_{i,o} \end{Bmatrix} + N^k(\zeta) \begin{Bmatrix} u'_i{}^k \\ v'_i{}^k \end{Bmatrix} + N^k(\zeta) \begin{Bmatrix} u'_i{}^{k+1} \\ v'_i{}^{k+1} \end{Bmatrix} \right] \\ & + \sum_{i=4}^6 N_i(\xi, \eta) \mathbf{e}_{i-3} \left[ N^k(\zeta) \Delta u_{t_i}^k + N^{k+1}(\zeta) \Delta u_{t_i}^{k+1} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $\begin{Bmatrix} u'_{i,o} \\ v'_{i,o} \end{Bmatrix}$  son desplazamientos en el plano constantes a través del espesor del laminado,  $\begin{Bmatrix} u'_i{}^k \\ v'_i{}^k \end{Bmatrix}$  son los desplazamientos en el plano variables sobre el espesor del laminado y  $\Delta u_{t_i}^k$  son incrementos de desplazamiento en los nodos de la mitad del lado del elemento triangular, en la dirección definida por los vectores  $\mathbf{e}_{i-3}$  (Figura 1).

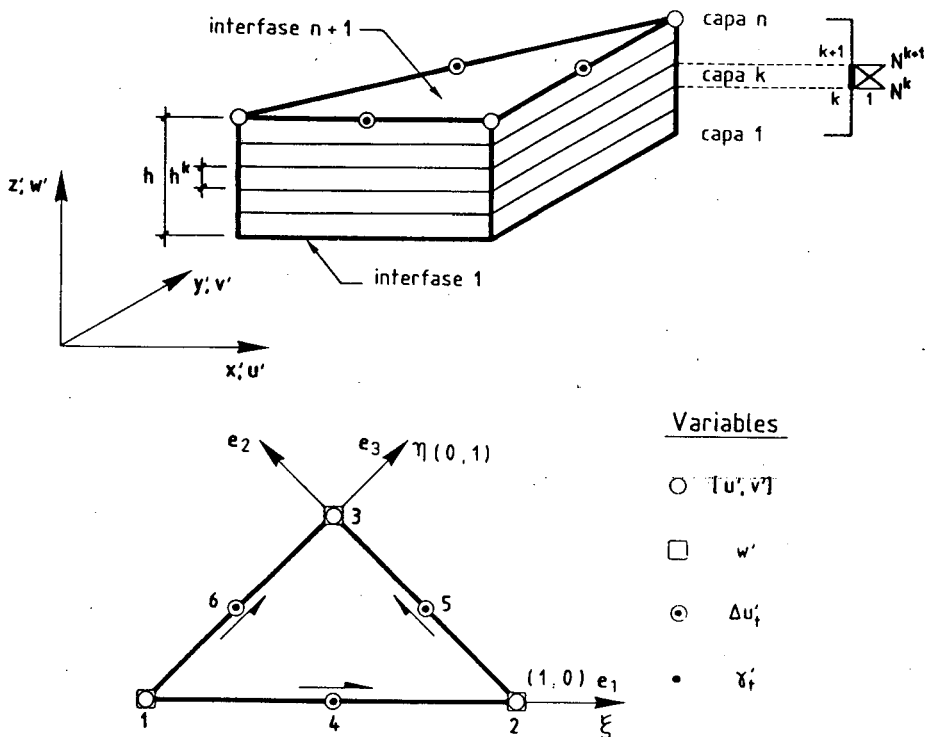


Figura 2. Definición de ejes locales y globales para el caso de láminas planas

El desplazamiento normal  $w'$  se considera constante a través del espesor. Siguiendo esta hipótesis puede escribirse

$$w' = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) w'_i \quad (19)$$

En (18) y (19) las funciones de forma coinciden con las definidas en las ecuaciones (4) y (5).

Las ecuaciones (18) y (19) implican una interpolación cuadrática sobre cada una de las interfases para los desplazamientos en el plano  $u'$  y  $v'$  una interpolación lineal para los desplazamientos  $w'$ .

Las deformaciones locales para la capa  $k$ -ésima se expresan como

$$\begin{aligned} \epsilon'_b &= \mathbf{B}_b \mathbf{a}' \\ \epsilon'_s &= \mathbf{B}_s \mathbf{a}' \end{aligned} \tag{20}$$

donde  $\epsilon'_b$  y  $\epsilon'_s$  son

$$\epsilon'_b = \left[ \frac{\partial u'}{\partial x'}, \frac{\partial v'}{\partial y'}, \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \right]^T \tag{21a}$$

$$\epsilon'_s = \left[ \frac{\partial w'}{\partial x'}, \frac{\partial u'}{\partial z'}, \left( \frac{\partial w'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} \right) \right]^T \tag{21b}$$

Es importante remarcar que  $\epsilon'_b$  son las deformaciones locales que incluyen efectos de membrana y flexión y  $\epsilon'_s$  son las deformaciones de cortante transversal. La forma de las matrices  $\mathbf{B}_b$  y  $\mathbf{B}_s$  se muestran en el Cuadro IV.

El vector de desplazamientos locales  $\mathbf{a}'$  para la capa  $k$ -ésima es

$$\mathbf{a}' = [\mathbf{a}'^k, \mathbf{a}'^{k+1}, \mathbf{a}'_0]^T \tag{21}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'^k &= [u_1^k, v_1^k, w_1^k, u_2^k, v_2^k, w_2^k, u_3^k, v_3^k, w_3^k, \Delta u_{t4}^k, \Delta u_{t5}^k, \Delta u_{t6}^k]^T \\ \mathbf{a}'_0 &= [u'_{01}, v'_{01}, w'_{01}, u'_{02}, v'_{02}, w'_{02}, u'_{03}, v'_{03}, w'_{03}]^T \end{aligned} \tag{22}$$

Los desplazamientos locales  $\mathbf{a}'$  se transforman a ejes globales por

$$\mathbf{a}' = \bar{\mathbf{T}} \mathbf{a} \tag{23}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [\mathbf{a}^k, \mathbf{a}^{k+1}, \mathbf{a}^0] \\ \mathbf{a}^k &= [u_1^k, v_1^k, w_1^k, u_2^k, v_2^k, w_2^k, u_3^k, v_3^k, w_3^k, \Delta u_{t4}^k, \Delta u_{t5}^k, \Delta u_{t6}^k]^T \\ \mathbf{a}^0 &= [u_{01}, v_{01}, w_{01}, u_{02}, v_{02}, w_{02}, u_{03}, v_{03}, w_{03}]^T \end{aligned}$$

donde la matriz de transformación está dada por

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{T}}' \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_b^k & \mathbf{B}_b^{k+1} & \mathbf{B}_b^o \\ (3 \times 33) & (3 \times 12) & (3 \times 12) & (3 \times 9) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_b^k = [\mathbf{B}_{b_1}^k, \mathbf{B}_{b_2}^k, \mathbf{B}_{b_3}^k, \bar{\mathbf{B}}_{b_4}^k, \bar{\mathbf{B}}_{b_5}^k, \bar{\mathbf{B}}_{b_6}^k]$$

$$\mathbf{B}_b^o = [\mathbf{B}_{b_1}^o, \mathbf{B}_{b_2}^o, \mathbf{B}_{b_3}^o]$$

con

$$\mathbf{B}_{b_i}^o = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x^j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y^j} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y^j} & \frac{\partial N_i}{\partial x^j} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{b_i}^k = N^k \mathbf{B}_{b_i}^o \quad i = 1, 2, 3$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{b_i}^k = \mathbf{B}_{b_{i-3}}^k \mathbf{e}_{i-3} \quad i = 4, 5, 6$$

$$\mathbf{B}_s^k = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M} \quad [\mathbf{B}_s^k, \mathbf{B}_s^{k+1}, \mathbf{B}_w] \\ (2 \times 33) \quad (3 \times 12) \quad (3 \times 12) \quad (3 \times 9)$$

$$\mathbf{B}_s^k = \begin{bmatrix} a_{12} & b_{12} & 0 & \vdots & a_{12} & b_{12} & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \frac{a_{23}}{\sqrt{2}} & \frac{b_{23}}{\sqrt{2}} & 0 & \vdots & \frac{a_{23}}{\sqrt{2}} & \frac{b_{23}}{\sqrt{2}} & 0 & \vdots & 0 & \frac{c_{23}}{\sqrt{2}} & 0 \\ a_{13} & b_{13} & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{32} & b_{32} & 0 & \vdots & 0 & 0 & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_s^{k+1} = -\mathbf{B}_s^k$$

$$\mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \vdots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 - \eta & -\sqrt{2}\eta & \eta \\ \zeta & \sqrt{2}\zeta & 1 - \zeta \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = -\frac{c_i L^{ij}}{2h^k}; \quad b_{ij} = -\frac{s_i L^{ij}}{2h^k}; \quad c_{ij} = \frac{2L^{ij}}{3h^k}$$

$c_i, s_i$  = componentes del vector  $e_i = [c_i, s_i]^T \quad i = 1, 2, 3$

$L^{ij}$  = longitud del lado  $ij$

$h^k$  =  $k$ -ésima capa

$J$  = matriz Jacobiano

Cuadro IV. Matrices de deformaciones locales para el elemento de lámina plana triangular

con

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

donde  $\mathbf{I}_3$  es la matriz unitaria  $3 \times 3$  y

$$\hat{\mathbf{T}}' = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix} \quad (26)$$

y  $\lambda_{x'x}$  es el coseno del ángulo formado entre el eje local  $x'$  con el eje global  $x$  etc. (Figura 2).

La matriz de rigidez para la capa  $k$ -ésima se obtiene por

$$\mathbf{K}^{(e)} = \bar{\mathbf{T}}^T \mathbf{K}'^{(e)} \bar{\mathbf{T}} \quad (27)$$

siendo

$$\mathbf{K}'^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (28)$$

donde  $\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_b \\ \mathbf{B}_s \end{Bmatrix}$  (ver Cuadro V) y  $\mathbf{D}$  es la ecuación constitutiva para materiales ortotrópos<sup>1-3</sup>.

$\mathbf{K}'^{(e)} = \mathbf{K}'_b^{(e)} + \mathbf{K}'_s^{(e)}$
$\mathbf{K}'_b^{(e)} = \frac{h^k}{6} \begin{bmatrix} 2\mathbf{K}'_{bb} & \mathbf{K}'_{bb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}'_{bb} & 2\mathbf{K}'_{bb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 6\mathbf{K}'_{oo} \end{bmatrix}$
<p>donde</p>
$\mathbf{K}'_{bb} = \int_{A^{(e)}} \hat{\mathbf{B}}_b^T \mathbf{D} \hat{\mathbf{B}}_b dA$ <p style="text-align: center; margin-top: -10px;">(12 × 12)</p>
<p>con</p>
$\hat{\mathbf{B}}_b = [\mathbf{B}_b^o, \mathbf{B}_t]$ $\mathbf{B}_t = [\bar{B}_{b4}, \bar{B}_{b5}, \bar{B}_{b6}]$
<p>y</p>
$\mathbf{K}'_{oo} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_b^{oT} \mathbf{D} \mathbf{B}_b^o dA$ <p style="text-align: center; margin-top: -10px;">(9 × 9)</p>
$\mathbf{K}'_s^{(e)} = h^k \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D} \mathbf{B}_s dA$

Cuadro V. Matriz de rigidez local para una capa de un elemento triangular de lámina plana

Una forma más explícita de la matriz de rigidez local  $\mathbf{K}^{(e)}$  se puede ver en el Cuadro V.

Al igual que en el caso de las placas multilaminadas, deberá definirse una dirección única para el cortante transversal sobre cada lado de los elementos contiguos. Los signos de la matriz  $\mathbf{B}_w$  del Cuadro V corresponden a la definición de las direcciones  $\mathbf{e}_i$  tomadas de numeración global de nodo menor a mayor para los nodos extremos de cada lado del elemento<sup>5,12</sup>.

Asimismo, la integral sobre el espesor se efectúa de forma explícita, mientras que para la integral sobre la superficie de cada interfase se utiliza una cuadratura de tres puntos de Gauss.

De nuevo puede utilizarse la técnica de condensación de variables sobre el espesor para simplificar el volumen de cálculos. En este caso tendremos desplazamientos en el plano de cada superficie interlaminar  $\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}$  de la capa de cálculo  $k$ -ésima y además movimientos únicos  $\mathbf{a}_0$  para todo el multilaminado. Entonces, eliminaremos los grados de libertad de la superficie interlaminar inferior de cada capa  $k$ -ésima  $\mathbf{a}_k$  (libre en su extremo inferior, ya sea por ser la primer interfase ó por haber eliminado capas inferiores) utilizando una expresión similar a (11), en función de  $\mathbf{a}_{k+1}$  y de  $\mathbf{a}_0$ . Para más detalles se recomienda consultar la referencia 12.

## EJEMPLOS

### Placa cuadrada laminada simplemente apoyada

El primer ejemplo estudiado es una placa cuadrada simplemente apoyada de grafito-epoxy. La geometría y propiedades materiales se muestran en la Figura 3. Consideramos cinco laminados con orientaciones  $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$  y espesores  $h/6 / h/4 / h/6 / h/4 / h/6$ . Sobre la placa actúa una carga sinusoidal uniformemente distribuida con  $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$ .

Por simetría se analizó solamente un cuarto de placa con la discretización que se muestra en la Figura 3. Advertiré que el número de capas se ha tomado igual al de laminados (5).

En la Tabla I se muestran algunos resultados para la flecha en el centro de la placa y las tensiones en algunos puntos característicos, obtenidas para diferentes relaciones de espesores ( $a/h$ ). Para mostrar el buen comportamiento de los resultados, comparamos con las soluciones obtenidas por Stavsky<sup>18</sup>, que utilizó la Teoría Clásica de Placas Laminadas (TCP) basada en la hipótesis de Kirchhoff. Notar la discrepancia de los resultados para espesores grandes, donde el efecto de la deformación por cortante es importante y no es considerado en la TCP.

Debemos mencionar el considerable ahorro en el número de grados de libertad del sistema de ecuaciones utilizando la técnica de condensación propuesta, pues de un total de 1984 grados (para una malla de  $m = 8$  elementos por lado) se reduce a sólo 384. Si se desea incrementar el número de capas de análisis, el número de grados de libertad final seguirá igual al de grados de libertad de la última superficie interlaminar, más los grados de libertad verticales.

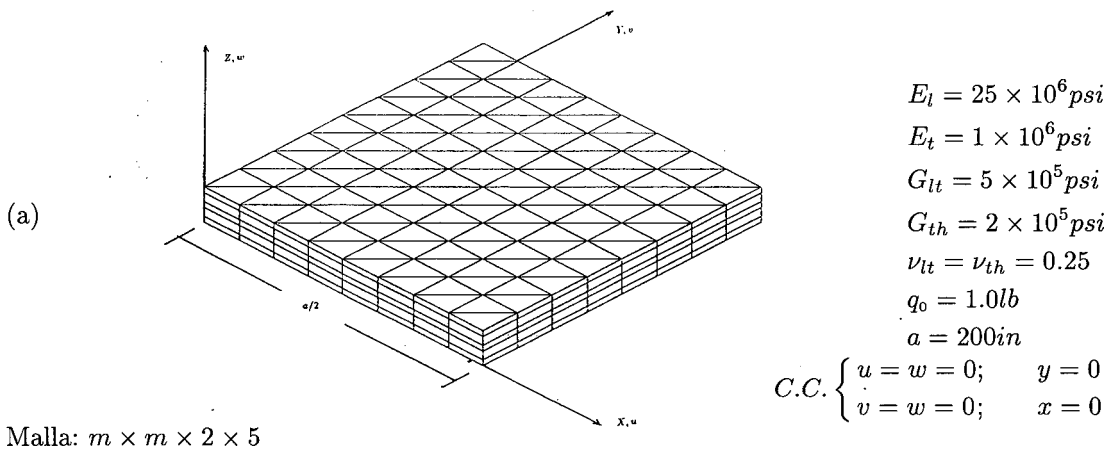


Figura 3. Placa cuadrada laminada simplemente apoyada (5 capas de grafito-epoxi). Geometría y propiedades

No. Elemt. por lado	$a/h$	$w_c$ ( $a/2, a/2$ )	$\bar{\sigma}_x$ ( $a/2, a/2, \pm h/2$ )	$\bar{\sigma}_y$ ( $a/2, a/2, \pm h/2$ )	$\bar{\tau}_{xz}$ ( $0, a/2, 0$ )	$\bar{\tau}_{yz}$ ( $a/2, 0, 0$ )
$m = 2$	4	5.0097	$\pm .585$	$\pm .397$	.160	.171
$m = 4$	4	5.6431	$\pm .625$	$\pm .455$	.202	.212
$m = 8$	4	5.7582	$\pm .625$	$\pm .473$	.21775	.226
TCP	4	4.291	$\pm .651$	$\pm .626$	N.A.	.233
$m = 2$	20	1.0226	$\pm .4575$	$\pm .340$	.170	.151
$m = 4$	20	1.1624	$\pm .5225$	$\pm .373$	.228	.191
$m = 8$	20	1.1946	$\pm .535$	$\pm .378$	.250	.207
TCP	20	1.145	$\pm .539$	$\pm .380$	.268	.212
$m = 2$	100	.8439	$\pm .468$	$\pm .318$	.178	.148
$m = 4$	100	.971693	$\pm .528$	$\pm .396$	.259	.186
$m = 8$	100	1.001176	$\pm .539$	$\pm .362$	.272	.210
TCP	100	1.0	$\pm .539$	$\pm .359$	.272	.205

Los resultados se normalizan utilizando:

$$w_c = \frac{\pi^4 Q w}{12 s^4 h q_0} \quad (\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y) = \frac{1}{q_0 s^2} (\sigma_x, \sigma_y)$$

$$(\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}) = \frac{1}{q_0 s^2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}), \quad s = a/h \quad Q = 4G_{lt} + [E_l + E_t(1 + 2\nu_{lh})]/(1 - \nu_{lt}\nu_{lh})$$

Tabla I. Flecha en el centro de luz y tensiones para la placa cuadrada simplemente apoyada de grafito-epoxy de alto módulo bajo carga sinusoidal uniformemente distribuida

### Análisis de vibraciones libres de una placa laminada cuadrada simplemente apoyada

La placa estudiada tiene una relación largo/ancho de  $a/h = 10$  y es analizada para una secuencia de apilado  $90^\circ/0^\circ/\dots/90^\circ/0^\circ$  de igual espesor y con las propiedades de los materiales siguientes:

$$\frac{G_{lt}}{E_t} = 0.5; \quad \frac{G_{lh}}{E_t} = 0.2; \quad \nu_{lt} = \nu_{lh} = 0.25, \quad l = 1.0$$

Se analizan diferentes relaciones  $\frac{E_l}{E_t}$  (direcciones: ( $l$  = longitudinal,  $t$  = transversal,  $h$  = sobre el espesor). Se utilizan mallas regulares de  $8 \times 8 \times 2 \times n$  siendo  $n$  el número de capas de cálculo. En todos los casos estudiados el número de capas de cálculo ( $n$ ) es igual al número de laminados reales.

En la Tabla II se muestran los resultados normalizados para la primer frecuencia natural de vibración (normalizada con  $\hat{\lambda} = \frac{\lambda a^2}{h} / \frac{l}{E_t}$ ). Los resultados obtenidos concuerdan bastante bien con los reportados por Noor<sup>17</sup> y por los que provienen de la utilización de la TCP.

	N <sup>o</sup> capas de cálculo (n)	$\frac{E_l}{E_t} = 3$	$\frac{E_l}{E_t} = 10$	$\frac{E_l}{E_t} = 20$	$\frac{E_l}{E_t} = 30$	$\frac{E_l}{E_t} = 40$
<i>Noor</i> [17]	2	0.25031	0.27938	0.30698	0.32705	0.34250
<i>TCP</i>	2	0.27082	0.30968	0.35422	0.39335	0.42884
<i>Este trabajo</i>	2	0.2623	0.29746	0.32758	0.34904	0.36550
<i>Noor</i>	4	0.26182	0.32578	0.37622	0.40660	0.42719
<i>TCP</i>	4	0.28676	0.38877	0.49907	0.58900	0.66690
<i>Este trabajo</i>	4	0.2688	0.3364	0.38787	0.41846	0.43904
<i>Noor</i>	6	0.26440	0.33657	0.39359	0.42783	0.45091
<i>TCP</i>	6	0.28966	0.40215	0.52234	0.61963	0.70359
<i>Este trabajo</i>	6	0.2702	0.3465	0.401163	0.43452	0.456819
<i>Noor</i>	10	0.26583	0.34350	0.40337	0.44011	0.46498
<i>TCP</i>	10	0.29115	0.40888	0.53397	0.63489	0.72184
<i>Este trabajo</i>	10	0.2795	0.3492	0.40875	0.44397	0.467593

Tabla II. Frecuencias naturales normalizadas de una placa cuadrada laminada simplemente apoyada

### Análisis de estabilidad de una placa cuadrada laminada simplemente apoyada.

La misma placa del ejemplo anterior se analiza ahora para un laminado con apilado simétrico  $0^\circ/90^\circ/\dots/0^\circ$  de espesores iguales, con las propiedades materiales siguientes:

$$\frac{G_{lt}}{E_t} = 0.6; \quad \frac{G_{lh}}{E_t} = 0.5; \quad \nu_{lt} = \nu_{lh} = 0.25$$

Se utiliza una malla de  $4 \times 4 \times 2 \times n$ . De nuevo en todos los casos considerados el número de capas de cálculo se ha tomado igual al de laminados. La placa está simétricamente comprimida a lo largo de dos lados opuestos.

En la Tabla III se muestran los valores normalizados de la carga crítica de pandeo calculados mediante  $N_{cr} = \frac{\sigma_{cr} a^2}{E_t h^2}$  para diferentes relaciones de  $E_l/E_t$ . Se muestran resultados obtenidos para el mismo problema por otros autores<sup>13,17</sup>, con objeto de comprobar los obtenidos en este trabajo. La divergencia de los resultados es patente entre los resultados obtenidos utilizando la TPC cuando la relación  $E_l/E_t$  se incrementa.

N <sup>o</sup> de capas de cálculo(n)		E <sub>l</sub> /E <sub>t</sub>				
		3	10	20	30	40
3	Este trabajo	5.2570	10.0860	15.6015	19.9915	23.5920
	Owen y Li <sup>13</sup>	5.4026	9.9590	15.3201	19.6872	23.3330
	Noor <sup>17</sup>	5.3044	9.7621	15.0191	19.3040	22.8807
	TCP	5.7538	11.4920	19.7120	27.9360	36.1600
5	Este trabajo	5.2545	10.2150	15.0890	20.9170	24.9695
	Owen y Li	5.4208	10.1609	15.9976	20.9518	25.2150
	Noor	5.3255	9.9603	15.6527	20.4663	24.5929
	TCP	5.7538	11.4920	19.7120	27.9360	36.1600
9	Este trabajo	5.2530	10.2800	16.3385	21.3980	25.9695
	Owen y Li	5.4187	10.1990	16.1560	21.2697	25.7093
	Noor	5.3352	10.0417	15.9153	20.9614	25.3436
	TCP	5.7538	11.4920	19.7120	27.9360	36.1600

Tabla III. Valores normalizados de la carga crítica axial para una placa cuadrada laminada simplemente apoyada (a/h=10)

### Análisis dinámico de una placa cuadrada laminada simplemente apoyada

Estudiaremos una placa cuadrada laminada simplemente apoyada formada por dos laminados con orientaciones 0°/90° con espesores idénticos y las propiedades de los materiales siguientes:

$$E_l = 25 \times 10^6 \text{ psi}, \quad E_t = 1 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$G_{lt} = 5 \times 10^5 \text{ psi}, \quad G_{th} = 2 \times 10^5 \text{ psi}$$

$$\nu_{lt} = \nu_{th} = 0.3, \quad a=100.0 \text{ in}$$

Las condiciones de contorno son

$$u = 0 \quad \text{en} \quad y = 0, \quad y = a/2, \quad v = 0 \quad \text{en} \quad x = 0, \quad x = a/2,$$

$$w = 0 \quad \text{en} \quad x = 0, \quad y = 0$$

La carga es uniformemente repartida, aplicada en forma de una función de impulso y con una distribución sinusoidal del tipo

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \quad q_0 = 1.0$$

En la Figura 4 se muestra la variación del desplazamiento vertical en el centro de la placa con  $a/h=10$  y dos capas de cálculo. Se muestra la variación de resultados al analizar diferentes mallas, notar que los períodos de los desplazamientos casi no se modifican aunque las amplitudes tienen cierta variación. Los resultados son prácticamente iguales para mallas más densas de  $m = 4$  (cuatro elementos por lado).

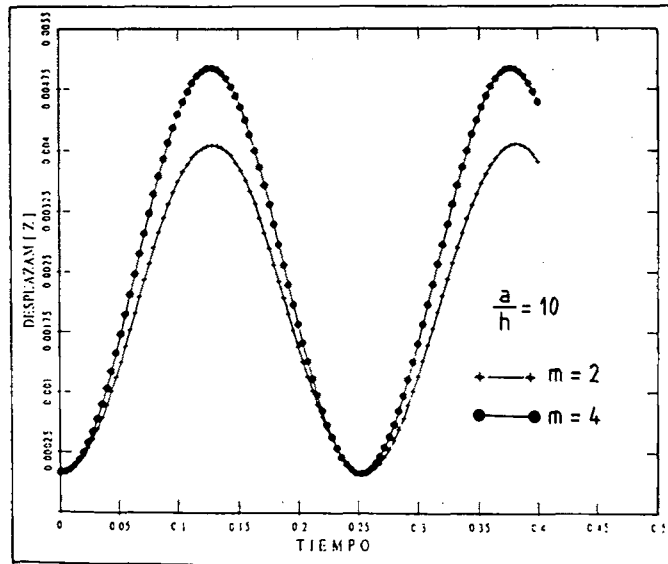
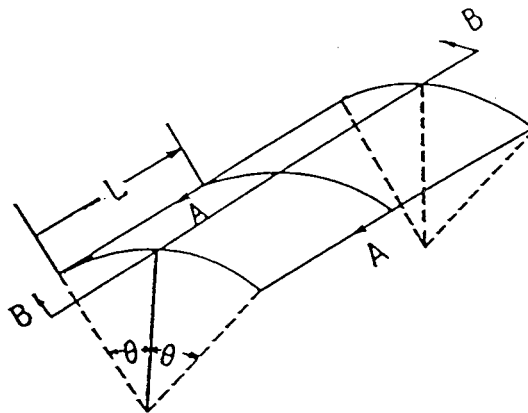
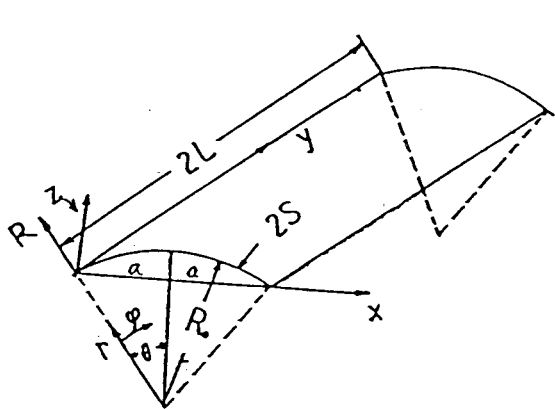


Figura 4. Desplazamiento vertical en el centro de una placa cuadrada simplemente apoyada con 2 laminados, sin amortiguamiento, para diferentes mallas. Para  $a/h=10$

### Lámina cilíndrica laminada simplemente apoyada.

El ejemplo estudiado es una lámina cilíndrica multilaminada simplemente soportada en su contorno. La lámina está formada por 3 capas de compuesto grafito-epoxi de alto módulo, con orientaciones  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$  con respecto al eje global  $y$  de la Figura 5 en donde además se muestra la geometría y propiedades materiales.

El análisis se realizó considerando tres tipos de mallas de  $4 \times 4$ ,  $6 \times 6$  y  $8 \times 8$  elementos. La dirección del espesor se dividió en 3, 6 y 24 capas de cálculo para la malla de  $4 \times 4$  y en 24 capas para las otras dos mallas. La Tabla IV muestra algunos de los resultados numéricos obtenidos. De igual forma puede observarse la variación de los desplazamientos en el plano a través del espesor en la Figura 6. En la Figura 7 se muestra la distribución de las tensiones  $\sigma_{yz}$  y  $\sigma_{xz}$  a través del espesor en las coordenadas indicadas  $x, y$ .



boundary conditions

$$v_{\beta} = w_{\gamma} = 0 \quad \text{at } \varphi = 0 \text{ and } \varphi = 2\theta$$

$$u_{\alpha} = w_{\gamma} = 0 \quad \text{at } y = 0 \text{ and } y = 2L$$

load

$$q(x, y) = q_0 \sin(\pi x / 2a) \sin(\pi y / 2L)$$

$$E_l = 25 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$E_t = 1 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$G_l = 5 \times 10^5 \text{ psi}$$

$$G_t = 2 \times 10^5 \text{ psi}$$

$$\nu_{ll} = \nu_{tt} = 0.25$$

$$q_0 = 1.0 \text{ lb}$$

$$h = 25 \text{ in}$$

$$L = 50 \text{ in}$$

$$a = 50 \text{ in}$$

properties

Mesh

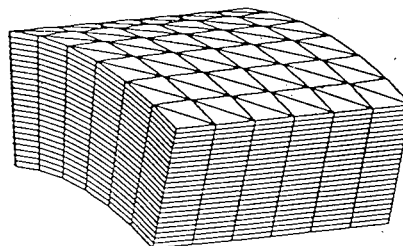


Figura 5. Estructura multilaminar simplemente apoyada (3 capas de grafito-epoxi con orientaciones 90°/0°/90° respecto al eje  $y$ ). Geometría y propiedades materiales ( $\theta = 30^\circ$ )

$\theta = 30^\circ$

MALLA	CAPAS DE CALCULO	DESP $X$		DESP $Y$		$\sigma_{xx}$		$\sigma_{yy}$		
		punto	valor	punto	valor	punto	valor	punto	valor	
$4 \times 4$	3	MAX	$(a, \frac{L}{2}, h)$	0.257E-6	$(a, 0, h)$	0.325E-5	$(a, \frac{L}{2}, 0)$	6.86	$(a, \frac{L}{2}, \frac{h}{3})$	3.15
		MIN	$(0, \frac{L}{2}, h)$	-0.457E-5	$(a, 0, 0)$	-0.282E-5	$(a, \frac{L}{2}, h)$	-7.67	$(a, \frac{L}{2}, \frac{2h}{3})$	-6.15
	6	MAX	$(a, \frac{L}{2}, h)$	0.334E-6	$(a, 0, h)$	0.337E-5	$(a, \frac{L}{2}, 0)$	9.18	$(a, \frac{L}{2}, \frac{h}{3})$	3.50
		MIN	$(0, \frac{L}{2}, 0)$	-0.507E-5	$(a, 0, 0)$	-0.294E-5	$(a, \frac{L}{2}, h)$	-9.47	$(a, \frac{L}{2}, \frac{2h}{3})$	-6.56
	24	MAX	$(a, \frac{L}{2}, h)$	0.379E-6	$(a, 0, h)$	0.346E-5	$(a, \frac{L}{2}, 0)$	10.90	$(a, \frac{L}{2}, \frac{h}{3})$	3.90
		MIN	$(0, \frac{L}{2}, 0)$	-0.525E-5	$(a, 0, 0)$	-0.303E-5	$(a, \frac{L}{2}, h)$	-10.60	$(a, \frac{L}{2}, \frac{2h}{3})$	-7.00
$6 \times 6$	24	MAX	$(a, \frac{L}{2}, h)$	0.374E-6	$(a, 0, h)$	0.358E-5	$(a, \frac{L}{2}, 0)$	10.70	$(a, \frac{L}{2}, \frac{h}{3})$	3.94
		MIN	$(0, \frac{L}{2}, 0)$	-0.535E-5	$(a, 0, 0)$	-0.312E-5	$(a, \frac{L}{2}, h)$	-10.30	$(a, \frac{L}{2}, \frac{2h}{3})$	-7.31
$8 \times 8$	24	MAX	$(a, \frac{L}{2}, h)$	0.373E-6	$(a, 0, h)$	0.361E-5	$(a, \frac{L}{2}, 0)$	10.80	$(a, \frac{L}{2}, \frac{h}{3})$	4.00
		MIN	$(0, \frac{L}{2}, 0)$	-0.539E-5	$(a, 0, 0)$	-0.317E-5	$(a, \frac{L}{2}, h)$	-10.20	$(a, \frac{L}{2}, \frac{2h}{3})$	-7.34

Tabla IV. Algunos desplazamientos y tensiones resultados del ejemplo de la lámina cilíndrica

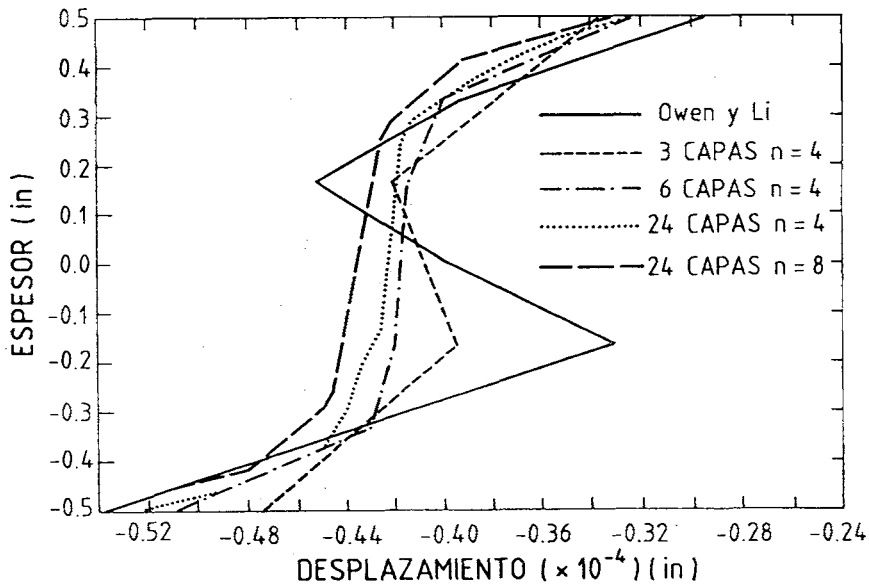


Figura 6. Lámina cilíndrica. Comparación de los desplazamientos en el plano (en  $x = 0, y = L$ ) a través del espesor para diferentes discretizaciones de mallas y capas

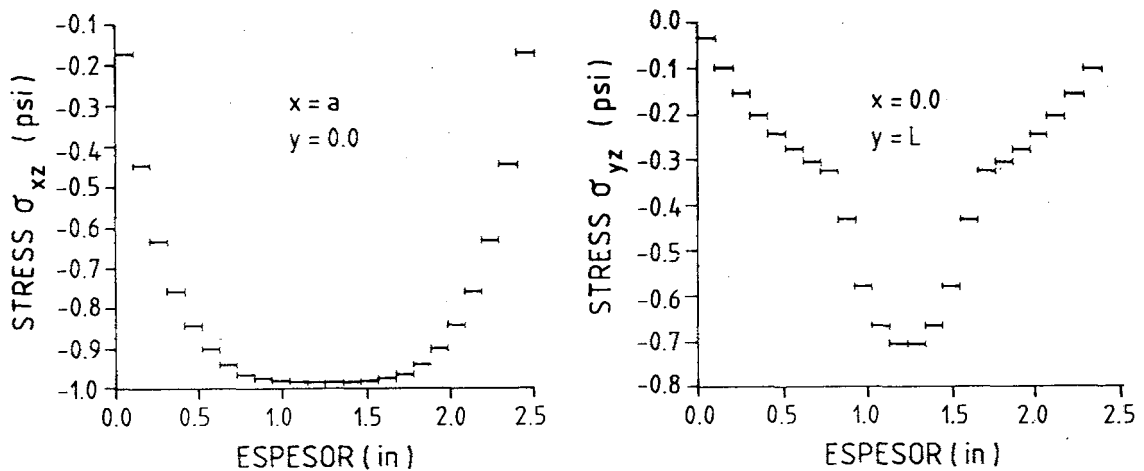


Figura 7. Lámina cilíndrica. Variación de las tensiones  $\sigma_{yz}$  y  $\sigma_{xz}$  a través del espesor

## CONCLUSIONES

El elemento triangular propuesto combina las ventajas de un elemento con aproximación bidimensional por capas con un modelo de deformaciones de corte impuestas, ideal para el análisis de placas y láminas gruesas y delgadas. La interpolación utilizada a través del espesor permite realizar la condensación de variables para cada capa, lo que permite reducir considerablemente el número de grados de libertad en la solución del sistema final. Los ejemplos presentados muestran el buen comportamiento del elemento para el análisis de láminas y placas laminadas de materiales compuestos.

## REFERENCIAS

1. J.N. Reddy, "A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation", *In. J. Solids Struct.*, **20**, pp. 881-896, (1987).
2. J.N. Reddy, "A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates", *Commun. Appl. Numer. Methods*, **3**, pp. 113-180, (1987).
3. J.N. Reddy, "On refined computational models of composite laminates", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **27**, pp. 361-382, (1989).
4. O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, P. Papadopoulos and E. Oñate, "Plate bending elements with discrete constraints: New triangular element", *Comp. and Struct.*, **35**, pp. 505-522, (1990).
5. P. Papadopoulos and R.L. Taylor, "A triangular element based on Reissner-Mindlin plate theory", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **30**, pp. 1029-1049, (1990).

6. E. Oñate, R.L. Taylor and O.C. Zienkiewicz, "Consistent formulation of shear Reissner-Mindlin plate elements", *Discretization Methods in Structural Mechanics*, G. Kuhn and H. Mang (Eds.), Springer Verlag, (1990).
7. E. Oñate, O.C. Zienkiewicz, B. Suárez and R.L. Taylor, "A methodology for deriving shear-constrained Reissner-Mindlin plate elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **33**, pp. 345-367, (1992).
8. E. Oñate, and J. Castro, "Derivation of plate elements based on assumed shear strain fields", in *New Advances in Computational Structural Mechanics*, Edited by P. Ladeveze and O.C. Zienkiewicz, Elsevier, (1992).
9. O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, "*The finite element method*", 4th Edition, **I and II**, Mc. Graw Hill, (1989), (1990).
10. E. Oñate, S. Botello and J. Miquel, "A triangular element for analysis of composite laminated plates using a substructuring technique", *Int Meeting on de Cinquante ans de Recherche en Acoustique et Mecanique, Laborative de Mecanique et Acoustique, CNRS, Marseille*, 8-10 Abril, (1991).
11. J. Miquel, S. Botello and E. Oñate, "A finite element formulation for analysis of composite laminated shells", *Journal of Iberoamerican Applied Reseach.*, **21**, pp. 235-247, (1992).
12. S. Botello, "Análisis de estructuras multilaminares por el método de los elementos finitos", Tesis Doctoral, Univ. Politécnica de Catalunya, Barcelona, (1993).
13. D.R.J. Owen, and Z.H. Li, "A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods-I. Fundamentals and static analysis; II Vibration and stability", *Comp. Struct*, **26**, pp. 907-923, (1987).
14. D.R.J. Owen and Z.H. Li, "Elasto-plastic numerical analysis of anisotropic laminated plates by a refined finite element model". In *Computational Plasticity: Models Software and Applications*, R. Owen, E. Hinton and E. Oñate (Eds.) Pineridge Press, U.K., pp. 749-775, (1987).
15. D.R.J. Owen and Z.H. Li, "Elasto-plastic numerical analysis of anisotropic laminated plates by a refined finite element model", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **70**, pp. 349-365, (1988).
16. E. Oñate, S. Oller, S. Botello y J. Miquel, "Análisis de estructuras de materiales compuestos", Monografía CIMNE 11, (1991).
17. A.K. Noor, "Free vibrations of multilayered composite", *AIAA*, Vol. **11**, pp. 1038-30, (1975).
18. Y. Stavsky, "Bending and stretching of laminated aelotropic plates", *ASCE J. Engng. Mech*, **87**, pp. 31-56, (1961).
19. J. Miquel y A. Barbat, "Estructuras sometidas a acciones sísmicas", *CIMNE*, Primera edición, (1988).
20. E. Oñate, "Análisis de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos", *CIMNE*, Primera edición, (1992).