

ANÁLISIS DE LA INESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS POR EL MÉTODO DE DESPLAZAMIENTO CRÍTICO

WILLIAM MATIAS*

y

EUGENIO OÑATE**

* *Dept. de Engenharia Civil
Universidade de Brasília*

*Campus Universitário, Asa Norte
70910-900 Brasília, DF Brasil*

Tel.: + 55-61-237 4644 Fax: + 55-61-347 5820

** *E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Cataluña*

08034 Barcelona, España

Tel.: + 34-3-205 7016 Fax: + 34-3-401 6517

E-mail: onate@etseccpb.upc.es

RESUMEN

Se presenta una nueva técnica de predicción de puntos críticos en el análisis de inestabilidad estructural por el MEF. El procedimiento se basa en la determinación de un *campo de desplazamiento crítico* aproximado. Se calculan estos desplazamientos críticos imponiendo la condición de singularidad en una *expresión aproximada* de la matriz de rigidez tangente en el punto crítico. Este procedimiento implica un problema no lineal de autovalores. La carga crítica se obtiene a posteriori, de modo directo, utilizando la *relación secante* entre carga y desplazamiento. Se detalla este procedimiento y la forma explícita de la matriz secante para elementos de sólido en dos y tres dimensiones. Los resultados obtenidos constatan la efectividad del método propuesto para análisis de distintas tipologías estructurales con elementos finitos de barra articulada 3D y de sólidos 2D y 3D.

STRUCTURAL INSTABILITY ANALYSIS USING THE CRITICAL DISPLACEMENT METHOD

SUMMARY

A new technique for predicting structural instability points using the finite element method is presented. The approach is based on the estimation of the critical displacement pattern by writing an approximation of the tangent stiffness singularity condition at the instability point. The critical load is subsequently computed by using a secant load-displacement relationship. Details of this procedure are given together with explicit forms of the secant stiffness matrix for finite element analysis of solids. The accuracy and effectiveness of the method are shown in the non linear analysis of several two and three dimensional structures.

Recibido: Diciembre 1996

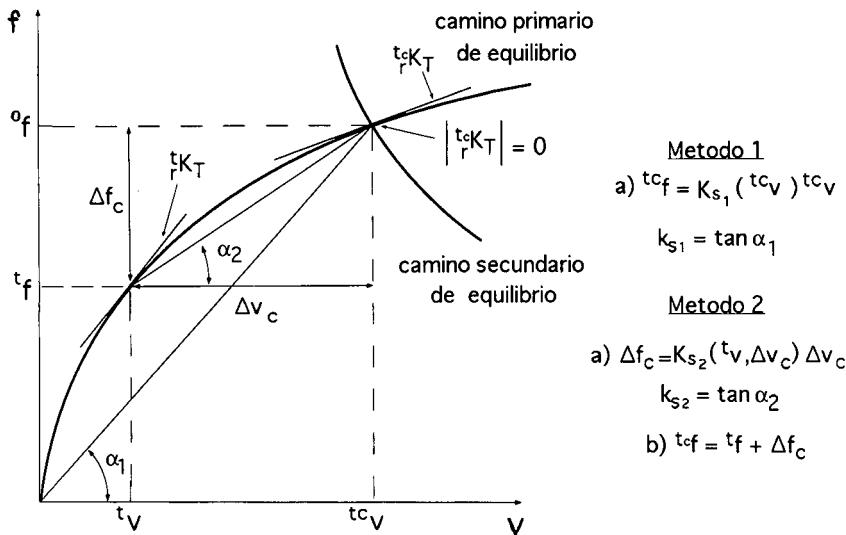


Figura 1. Representación esquemática del método de desplazamiento crítico

En la Figura 1 se muestra la interpretación geométrica del procedimiento descrito en (1) ··· (4) para un problema con un grado de libertad.

OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ SECANTE

Varios investigadores han reconocido las posibilidades de la forma “exacta” de la matriz de rigidez secante, en el desarrollo de nuevos algoritmos en mecánica no lineal de sólidos^{1,3,8}. Para obtener dicha matriz puede partirse de la forma débil de las ecuaciones de movimiento del sólido, por ejemplo, del *principio de los trabajos virtuales* (*PTV*) en su forma completa. Esto implica la deducción de una infinidad de expresiones simétricas y no simétricas para la matriz secante. Por ejemplo, varios autores han obtenido diferentes expresiones simétricas para esta matriz en el contexto de elementos finitos con formulación en desplazamientos¹ y con formulación mixta⁷. Recientemente, Oñate¹¹ ha desarrollado una metodología general para obtener expresiones de la matriz de rigidez secante en análisis de no linealidad geométrica de sólidos. Para ello, ha utilizado una formulación *Lagrangiana Generalizada* (*LG*). Esta metodología es la que se adopta en este trabajo y sus hipótesis básicas serán desarrolladas a continuación, de manera sucinta.

Descripción incremental de la cinemática

Sea $[0, T]$ el intervalo de tiempo de interés en la descripción incremental de la cinemática del sólido. Aquí, la variable t se debe interpretar como un parámetro que se incrementa de forma monótona, e indica el nivel de progreso en el proceso de deformación. Para problemas cuasiestáticos, los valores discretos de t indican incrementos de carga.

Considérese un cuerpo tridimensional, que en la configuración indeformada posee el volumen inicial 0V , en una configuración de equilibrio conocida rV sometido a la acción de fuerzas de volumen ${}^t\mathbf{b}$, fuerzas de superficie ${}^t\mathbf{t}$ y fuerzas puntuales ${}^t\mathbf{p}$. Al incrementar las fuerzas externas, el cuerpo cambia su configuración de tV a ${}^{t+\Delta t}V$. Las coordenadas del cuerpo en cada configuración están referidas al sistema global cartesiano x_1, x_2, x_3 (ver Figura 2). El vector de desplazamientos total se expresa como ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}$, donde ${}^t\mathbf{u}$ son los desplazamientos iniciales y $\Delta\mathbf{u}$ son los incrementos de desplazamientos del cuerpo de tV a ${}^{t+\Delta t}V$.

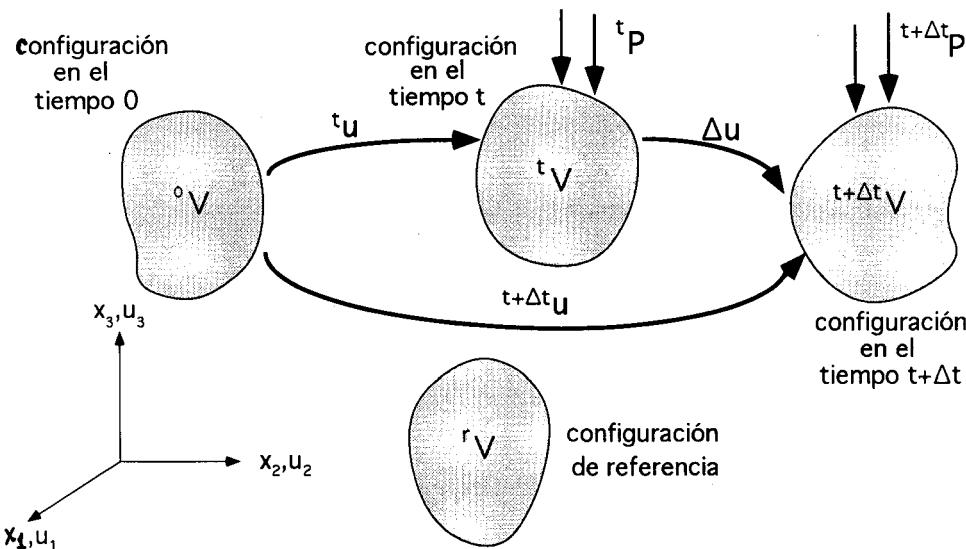


Figura 2. Movimiento de un sólido en un sistema de coordenadas Cartesiano estacionario

En la descripción *LG*, los tensores de deformación (Green-Lagrange), de tensión (segundo tensor de Piola-Kirchhoff) y constitutivo (tensor de elasticidad infinitesimal isótropo) se escriben respecto a las coordenadas de la configuración intermedia de equilibrio conocida rV .

El tensor de deformación en $t + \Delta t$ referido a rV se puede escribir como

$${}^{t+\Delta t}{}_r\boldsymbol{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}({}^{t+\Delta t}{}_r u_{i,j} + {}^{t+\Delta t}{}_r u_{j,i} + {}^{t+\Delta t}{}_r u_{k,i} {}^{t+\Delta t}{}_r u_{k,j}) \quad (5a)$$

donde

$${}^{t+\Delta t}{}_r u_{i,j} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}u_i}{\partial {}^r x_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5b)$$

es el gradiente del desplazamiento total. Nótese que para ${}^rV = {}^0V$, (5a) se convierte precisamente en la conocida expresión del tensor de deformación de Green-Lagrange

utilizada en la formulación *Lagrangiana Total (LT)*. En el caso en que se tome ${}^rV = {}^tV$, se obtiene la descripción *Lagrangiana Actualizada (LA)*.

El incremento de deformación entre tV y ${}^{t+\Delta t}V$ se escribe como

$${}_r\Delta\varepsilon_{ij} = {}^{t+\Delta t}{}_r\varepsilon_{ij} - {}^t{}_r\varepsilon_{ij} = {}_r e_{ij} + {}_r \eta_{ij} \quad (6)$$

donde

$$\begin{aligned} {}_r e_{ij} &= \frac{1}{2} ({}_r \Delta u_{i,j} + {}_r \Delta u_{j,i} + \underbrace{{}_r u_{k,i} {}_r \Delta u_{k,j} + {}_r \Delta u_{k,i} {}_r u_{k,j}}_{= 0 \text{ para } {}^rV = {}^tV}) \\ &\quad (7a) \end{aligned}$$

$${}_r \eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_r \Delta u_{k,i} {}_r \Delta u_{k,j} \quad (7b)$$

son los incrementos de deformación de primer y segundo orden, respectivamente, y

$${}_r \Delta u_{i,j} = \frac{\partial(\Delta u_i)}{\partial {}^r x_j} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (7c)$$

es el gradiente del incremento de desplazamientos. Nótese que en la descripción *LA* el tensor de deformación ${}_r \varepsilon_{ij}$ en (6) se anula, ya que el efecto del desplazamiento inicial se incorpora en la coordenada actualizada, es decir, ${}^t x_i = {}^0 x_i + {}^t u_i$. Por tanto, se acepta como hipótesis básica en dicha formulación que el gradiente del desplazamiento inicial respecto a las coordenadas de tV se anula, lo que implica ${}_t u_{i,j} = 0$ en (7a).

Se aplica una variación virtual al campo de desplazamientos en la vecindad de la configuración ${}^{t+\Delta t}V$ considerándose la configuración tV fija, es decir, $\delta {}^t u_i = 0 \implies {}^t \varepsilon_{ij} = 0$, ver Figura 3.

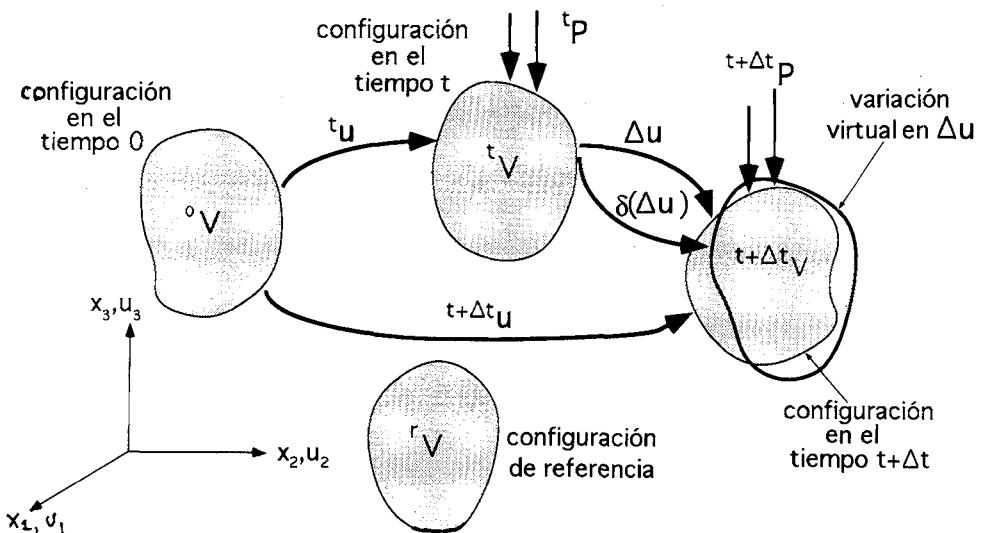


Figura 3. Variación virtual del campo de desplazamiento en la vecindad de la configuración $t + \Delta t$

La variación virtual del tensor de deformación en la configuración ${}^{t+\Delta t}V$, teniendo en cuenta (6) y (7a,b), puede escribirse como

$$\delta_r^{\Delta t} \varepsilon_{ij} = \delta_r \Delta \varepsilon_{ij} = \delta_r e_{ij} + \delta_r \eta_{ij} \quad (8)$$

donde

$$\delta_r e_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_r \Delta u_{i,j} + \delta_r \Delta u_{j,i} + \underbrace{\delta_r \Delta u_{k,i} \delta_r \Delta u_{k,j} + \delta_r \Delta u_{k,i} \delta_r \Delta u_{k,j}}_{= 0 \text{ para } {}^rV = {}^tV}) \quad (9a)$$

$$\delta_r \eta_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_r \Delta u_{k,i} \delta_r \Delta u_{k,j} + \delta_r \Delta u_{k,i} \delta_r \Delta u_{k,j}) \quad (9b)$$

con

$$\delta_r \Delta u_{i,j} = \frac{\partial(\delta \Delta u_i)}{\partial {}^r x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (9c)$$

donde $\delta_r \Delta u_{i,j}$ es la variación virtual del gradiente del incremento de desplazamiento.

Los tensores de incremento de deformaciones de primer y segundo orden se expresan en forma matricial del modo siguiente

$${}_r \mathbf{e} = [\mathbf{L}_0 + {}_r \mathbf{L}_1 ({}^t \mathbf{g})] {}_r \mathbf{g} \quad (10a)$$

$${}_r \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} {}_r \mathbf{L}_1 ({}^t \mathbf{g}) {}_r \mathbf{g} \quad (10b)$$

donde ${}^t \mathbf{g}$ y ${}^r \mathbf{g}$ son los gradientes de los desplazamientos y de los incrementos de desplazamientos, respectivamente, \mathbf{L}_0 es una matriz rectangular con unidades y ceros y ${}^t \mathbf{L}_1$ y ${}^r \mathbf{L}_1$ son matrices función de los gradientes de los desplazamientos y de los incrementos de desplazamientos, respectivamente (ver el Cuadro 1).

Por otro lado, la variación virtual de dichos incrementos de deformación se escribe

$$\delta_r \mathbf{e} = [\mathbf{L}_0 + {}_r \mathbf{L}_1 ({}^t \mathbf{g})] \delta_r \mathbf{g} \quad (11a)$$

$$\delta_r \boldsymbol{\eta} = {}_r \mathbf{L}_1 ({}^t \mathbf{g}) \delta_r \mathbf{g} \quad (11b)$$

donde $\delta_r \mathbf{g}$ representa el gradiente de la variación virtual del incremento de desplazamiento $\delta(\Delta \mathbf{u})$.

Se supone la existencia de una relación constitutiva lineal entre los incrementos del segundo tensor de tensión de Piola-Kirchhoff y los incrementos del tensor de deformación de Green-Lagrange. Así

$${}_r \Delta \mathbf{S} = {}_r \mathbf{D} {}_r \Delta \varepsilon = {}_r \mathbf{D} [{}_r \mathbf{e} + {}_r \boldsymbol{\eta}] \quad (12)$$

donde ${}_r \mathbf{D}$ es la matriz constitutiva escrita en la configuración rV . Las tensiones en $t + \Delta t$ se obtienen según la expresión

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{S} = {}^t \mathbf{S} + {}_r \Delta \mathbf{S} \quad (13)$$

$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} 100 & 000 & 000 \\ 000 & 010 & 000 \\ 000 & 000 & 001 \\ 010 & 100 & 000 \\ 001 & 000 & 100 \\ 000 & 001 & 010 \end{bmatrix}$ ${}^t \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} {}^t \mathbf{g}^T \mathbf{H}_1 \\ {}^t \mathbf{g}^T \mathbf{H}_2 \\ \vdots \\ {}^t \mathbf{g}^T \mathbf{H}_6 \end{bmatrix} ; \quad {}^t \mathbf{g} = \begin{Bmatrix} {}^t \mathbf{g}_1 \\ {}^t \mathbf{g}_2 \\ {}^t \mathbf{g}_3 \end{Bmatrix} ; \quad {}^t \mathbf{g}_i = \frac{\partial {}^t \mathbf{u}}{\partial {}^r x_i} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial {}^t u_1}{\partial {}^r x_i} \\ \frac{\partial {}^t u_2}{\partial {}^r x_i} \\ \frac{\partial {}^t u_3}{\partial {}^r x_i} \end{Bmatrix}$ ${}^r \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} {}^r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_1 \\ {}^r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_2 \\ \vdots \\ {}^r \mathbf{g}^T \mathbf{H}_6 \end{bmatrix} ; \quad {}^r \mathbf{g} = \begin{Bmatrix} {}^r \mathbf{g}_1 \\ {}^r \mathbf{g}_2 \\ {}^r \mathbf{g}_3 \end{Bmatrix} ; \quad {}^r \mathbf{g}_i = \frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial {}^r x_i} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial (\Delta u_1)}{\partial {}^r x_i} \\ \frac{\partial (\Delta u_2)}{\partial {}^r x_i} \\ \frac{\partial (\Delta u_3)}{\partial {}^r x_i} \end{Bmatrix}$ $\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ $\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cuadro 1. Forma matricial de las relaciones cinemáticas para sólidos 3D

Por último, considerando (10a,b), (11a,b), (12), y (13), la expresión del PTV en ${}^{t+\Delta t}V$ se escribe en forma matricial como

$$\begin{aligned}
 & \int_V \left[\delta_r \mathbf{e}^T {}^t \mathbf{D}_r \mathbf{e} + \underbrace{(\delta_r \mathbf{e}^T {}^t \mathbf{D}_r \boldsymbol{\eta} + \delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}^t \mathbf{D}_r \mathbf{e})}_{\text{términos no lineales en } {}^r \mathbf{g}} + \underbrace{\delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}^t \mathbf{D}_r \boldsymbol{\eta}}_{=f({}^r \mathbf{g}^3)} + \delta_r \boldsymbol{\eta}^T {}^t \mathbf{\sigma} \right] dV = \\
 & = \int_V \delta(\Delta \mathbf{u})^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{b} dV - \int_V \delta_r \mathbf{e}^T {}^t \mathbf{\sigma} dV \tag{14}
 \end{aligned}$$

En esta ecuación se expresa la *forma incremental completa* del PTV . Esta forma es la base para obtener las ecuaciones incrementales no lineales de equilibrio en elementos finitos. El segundo miembro de (14) es independiente de los incrementos de desplazamientos y, al discretizar por elementos finitos, conduce a la expresión de las fuerzas residuales. Los términos del primer miembro son función del incremento de desplazamientos. Nótese que los términos subrayados en (14) contienen expresiones

cuadráticas y cúbicas del incremento de desplazamientos. La consideración de dichos términos es básica para la obtención de la matriz de rigidez secante. En la linealización de (14) se desprecian estos términos, lo que conduce a la obtención de la matriz de rigidez tangente. En el próximo apartado se obtendrán estas matrices para problemas de elasticidad lineal.

Discretización por elementos finitos. Obtención de las matrices de rigidez secante y tangente

Considérese una discretización estándar en elementos finitos isoparamétricos de sólido 3D de continuidad C^0 con n nodos y funciones de forma $N^k(\xi, \eta, \zeta)$ definidas en coordenadas naturales (ξ, η, ζ) . Los campos de desplazamientos y de incremento de desplazamientos de cada elemento se definen por funciones de interpolación estándar^{2,16}.

Una vez discretizado el sólido, pueden reescribirse (10a,b), (11a,b) y (12) en función de los incrementos de desplazamientos nodales del modo siguiente

$$\begin{aligned} {}_r\mathbf{e} &= {}^t{}_r\mathbf{B}_L \Delta\mathbf{a} & , & \delta_r\mathbf{e} = {}^t{}_r\mathbf{B}_L \delta(\Delta\mathbf{a}) \\ {}_r\boldsymbol{\eta} &= \frac{1}{2} {}^t{}_r\mathbf{B}_1 \Delta\mathbf{a} & , & \delta_r\boldsymbol{\eta} = {}^t{}_r\mathbf{B}_1 \delta(\Delta\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (15)$$

$${}^t\Delta\sigma = {}^t{}_r\mathbf{D} \left[{}^t{}_r\mathbf{B}_L + \frac{1}{2} {}^t{}_r\mathbf{B}_1 \right] \Delta\mathbf{a} \quad (16)$$

La forma de las matrices en (15) y (16) se detalla en el Cuadro 2.

${}^t{}_r\mathbf{e} = {}^t{}_r\mathbf{B}_L \Delta\mathbf{a} \quad ; \quad {}^t{}_r\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} {}^t{}_r\mathbf{B}_1 \Delta\mathbf{a}$
${}^t{}_r\mathbf{B}_L = [{}^t{}_r\mathbf{B}_L^1, {}^t{}_r\mathbf{B}_L^2, \dots, {}^t{}_r\mathbf{B}_L^n]$
${}^t{}_r\mathbf{B}_1 = [{}^t{}_r\mathbf{B}_1^1, {}^t{}_r\mathbf{B}_1^2, \dots, {}^t{}_r\mathbf{B}_1^n]$
${}^t{}_r\mathbf{B}_L^k = {}^t{}_r\mathbf{B}_{L0}^k [\mathbf{I}_3 + {}^t\hat{\mathbf{L}}^T]$
${}^t{}_r\mathbf{B}_1^k = {}^t{}_r\mathbf{B}_{L0}^k {}^t\hat{\mathbf{L}}^T$
${}^t{}_r\mathbf{B}_{L0}^k = \begin{bmatrix} {}^t{}_rN_{,1}^k & 0 & 0 \\ 0 & {}^t{}_rN_{,2}^k & 0 \\ 0 & 0 & {}^t{}_rN_{,3}^k \\ {}^t{}_rN_{,2}^k & {}^t{}_rN_{,1}^k & 0 \\ {}^t{}_rN_{,3}^k & 0 & {}^t{}_rN_{,1}^k \\ 0 & {}^t{}_rN_{,3}^k & {}^t{}_rN_{,2}^k \end{bmatrix} \quad ; \quad {}^t{}_r\mathbf{B}_{L1}^k = {}^t{}_r\mathbf{B}_{L0}^k {}^t\hat{\mathbf{L}}^T$
${}^t\hat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} {}^t\hat{l}_{11} & {}^t\hat{l}_{12} & {}^t\hat{l}_{13} \\ {}^t\hat{l}_{21} & {}^t\hat{l}_{22} & {}^t\hat{l}_{23} \\ {}^t\hat{l}_{31} & {}^t\hat{l}_{32} & {}^t\hat{l}_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad \hat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} {}^t\hat{l}_{11} & {}^t\hat{l}_{12} & {}^t\hat{l}_{13} \\ {}^t\hat{l}_{21} & {}^t\hat{l}_{22} & {}^t\hat{l}_{23} \\ {}^t\hat{l}_{31} & {}^t\hat{l}_{32} & {}^t\hat{l}_{33} \end{bmatrix}$
${}^tN_{,i}^k = \frac{\partial N^k}{\partial {}^r x_i} \quad ; \quad {}^t\hat{l}_{ij} = \frac{\partial {}^t u_i}{\partial {}^r x_j} = \sum_{k=1}^n {}^tN_{,j}^k {}^t a_i^k \quad ; \quad {}^t\hat{l}_{ij} = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial {}^r x_j} = \sum_{k=1}^n {}^tN_{,j}^k \Delta a_i^k$

Cuadro 2. Matrices de deformación de primer y segundo orden para elementos de sólido 3D

Sustituyendo (15) y (16) en la expresión del *PTV* en (14) se deduce la siguiente relación entre los incrementos de las fuerzas externas nodales y los incrementos de los desplazamientos nodales para cada elemento

$${}^t_r \mathbf{K}_{SI}({}^t \mathbf{a}, \Delta \mathbf{a}) \Delta \mathbf{a} = - {}^{t+\Delta t} r \mathbf{r} \quad (17)$$

donde ${}^{t+\Delta t} r \mathbf{r}$ es el vector de fuerzas residuales y ${}^t_r \mathbf{K}_{SI}$ es la *matriz de rigidez secante incremental* que se puede escribir como

$$\boxed{{}^t_r \mathbf{K}_{SI}({}^t \mathbf{a}, \Delta \mathbf{a}) = {}^t_r \mathbf{K}_L({}^t \mathbf{a}, {}^t \mathbf{a}^2) + {}^t_r \mathbf{K}_M({}^t \mathbf{a}, \Delta \mathbf{a}) + {}^t_r \mathbf{K}_N(\Delta \mathbf{a}^2) + {}^t_r \mathbf{K}_\sigma({}^t_r \mathbf{S})} \quad (18)$$

donde para cada elemento

$${}^t_r \mathbf{K}_L({}^t \mathbf{a}, {}^t \mathbf{a}^2) = \int_{rV(e)} {}^t_r \mathbf{B}_L^T {}^t_r \mathbf{D} {}^t_r \mathbf{B}_L dV \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} {}^t_r \mathbf{K}_M({}^t \mathbf{a}, \Delta \mathbf{a}) = & \int_{rV(e)} \left[\frac{1}{2} {}^t_r \mathbf{B}_L^T {}^t_r \mathbf{D} {}^t_r \mathbf{B}_1 + \alpha {}^t_r \mathbf{B}_1^T {}^t_r \mathbf{D} {}^t_r \mathbf{B}_L + \right. \\ & \left. + (1 - \alpha) {}^t_r \mathbf{G}^T {}^t_r \mathbf{E} {}^t_r \mathbf{G} \right] dV \end{aligned} \quad (19b)$$

$${}^t_r \mathbf{K}_N(\Delta \mathbf{a}^2) = \int_{rV(e)} \left[\frac{1}{4}(2 - \beta) {}^t_r \mathbf{B}_1^T {}^t_r \mathbf{D} {}^t_r \mathbf{B}_1 + \frac{\beta}{4} {}^t_r \mathbf{G}^T {}^t_r \mathbf{H} {}^t_r \mathbf{G} \right] dV \quad (19c)$$

$${}^t_r \mathbf{K}_\sigma = \int_{rV(e)} {}^t_r \mathbf{G}^T {}^t_r \hat{\mathbf{S}} {}^t_r \mathbf{G} dV \quad (19d)$$

Para obtener la matriz de rigidez secante y el vector de fuerzas globales del sólido discretizado se ensambla la contribución de cada elemento de manera estándar. Las matrices ${}_r \mathbf{E}$, ${}_r \mathbf{H}$ y ${}^t_r \hat{\mathbf{S}}$ se detallan en el Cuadro 3.

Nótese que la expresión de ${}^t_r \mathbf{K}_{SI}$ es no simétrica para valores de $\alpha \neq 1/2$. Puede obtenerse una infinidad de formas simétricas para $\alpha = 1/2$ y valores arbitrarios de β . Una expresión paramétrica similar a (19) ha sido obtenida por Felippa *et al.*⁸ utilizando la descripción *LT*.

Siguiendo un procedimiento similar puede encontrarse la expresión de la *matriz de rigidez secante total* (ver ec.(3)) como

$${}^t_0 \mathbf{K}_{ST} = {}^t_0 \mathbf{K}_L + {}^t_0 \mathbf{K}_M({}^t \mathbf{a}) + {}^t_0 \mathbf{K}_N({}^t \mathbf{a}^2) \quad (20)$$

Obviamente la matriz ${}^t_0 \mathbf{K}_\sigma$ es nula en este caso al tomarse como configuración inicial la configuración indeformada de la estructura donde las tensiones son nulas. Adviértase que ahora $\Delta \mathbf{a} = {}^t \mathbf{a}$ y la matriz ${}^t_0 \mathbf{K}_L$ coincide con la de la elasticidad infinitesimal. Para más detalles consultar la referencia⁹.

$,_r\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a \mathbf{I}_3 & d \mathbf{I}_3 & e \mathbf{I}_3 \\ b \mathbf{I}_3 & f \mathbf{I}_3 & \\ \text{sym.} & c \mathbf{I}_3 & \end{bmatrix} ; [a, b, c, d, e, f]^T = ,_r\mathbf{D},_r\mathbf{e} = ,_r\Delta\mathbf{S}^{1ord}$
$,_r\mathbf{E} = \begin{bmatrix} ,_r\Delta S_{11}^{1ord} \mathbf{I}_3 & ,_r\Delta S_{12}^{1ord} \mathbf{I}_3 & ,_r\Delta S_{13}^{1ord} \mathbf{I}_3 \\ ,_r\Delta S_{21}^{1ord} \mathbf{I}_3 & ,_r\Delta S_{22}^{1ord} \mathbf{I}_3 & ,_r\Delta S_{23}^{1ord} \mathbf{I}_3 \\ \text{sym.} & ,_r\Delta S_{31}^{1ord} \mathbf{I}_3 & ,_r\Delta S_{32}^{1ord} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2},_r\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \bar{a} \mathbf{I}_3 & \bar{d} \mathbf{I}_3 & \bar{e} \mathbf{I}_3 \\ \bar{b} \mathbf{I}_3 & \bar{f} \mathbf{I}_3 & \\ \text{sym.} & \bar{c} \mathbf{I}_3 & \end{bmatrix} ; [\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}]^T = ,_r\mathbf{D},_r\boldsymbol{\eta} = ,_r\Delta\mathbf{S}^{2ord}$
$\frac{1}{2},_r\mathbf{H} = \begin{bmatrix} ,_r\Delta S_{11}^{2ord} \mathbf{I}_3 & ,_r\Delta S_{12}^{2ord} \mathbf{I}_3 & ,_r\Delta S_{13}^{2ord} \mathbf{I}_3 \\ ,_r\Delta S_{21}^{2ord} \mathbf{I}_3 & ,_r\Delta S_{22}^{2ord} \mathbf{I}_3 & ,_r\Delta S_{23}^{2ord} \mathbf{I}_3 \\ \text{sym.} & ,_r\Delta S_{31}^{2ord} \mathbf{I}_3 & ,_r\Delta S_{32}^{2ord} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$
$,_r\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} ,_rS_{11} \mathbf{I}_3 & ,_rS_{12} \mathbf{I}_3 & ,_rS_{13} \mathbf{I}_3 \\ ,_rS_{21} \mathbf{I}_3 & ,_rS_{22} \mathbf{I}_3 & ,_rS_{23} \mathbf{I}_3 \\ \text{sym.} & ,_rS_{31} \mathbf{I}_3 & ,_rS_{32} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$
$\mathbf{I}_3 : \text{matriz identidad } 3 \times 3$

Cuadro 3. Matrices $,_r\mathbf{E}$, $,_r\mathbf{H}$ y $,_r\hat{\mathbf{S}}$ para elementos de sólido 3D

La expresión de la matriz de rigidez tangente se puede obtener haciendo tender a cero en el límite el incremento de desplazamientos en la expresión de la matriz de rigidez secante incremental. De esta manera, a partir de (18) se llega a

$$,^t_r\mathbf{K}_T = \lim_{\Delta\mathbf{a} \rightarrow 0} ,^t_r\mathbf{K}_{SI} = ,^t_r\mathbf{K}_L + ,^t_r\mathbf{K}_\sigma \quad (21)$$

que coincide con la expresión clásica^{2,16}. Para más detalles sobre el proceso de obtención de la matriz de rigidez secante pueden consultarse las referencias^{9,11}.

PREDICCIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS. EL MÉTODO DE DESPLAZAMIENTO CRÍTICO

En este trabajo hemos aplicado el concepto de la matriz de rigidez secante para estimar el nivel de carga que origina la inestabilidad estructural, es decir, para detectar puntos críticos (puntos límite o de bifurcación). Estos puntos se caracterizan por la singularidad de la matriz de rigidez tangente $,^t_r\mathbf{K}_T$. El método propuesto aquí se basa en la estimación del campo de *desplazamientos crítico*, imponiendo la condición de singularidad en una expresión aproximada de la matriz tangente en el punto crítico $,^t_c_r\mathbf{K}_T$. Tras ello se obtiene el valor de la carga crítica utilizando la relación secante entre desplazamientos y fuerzas. Dicho método se diferencia de los métodos clásicos de análisis límite, pues proporciona el modo de deformación crítico además de la carga crítica, en contraposición a los métodos clásicos de análisis de pandeo que predicen únicamente valores de la carga crítica.

Descripción del método de desplazamiento crítico

El vector de desplazamientos en el estado crítico, puede escribirse como

$${}^{t+\Delta t_c} \mathbf{a} = {}^t \mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}_c \quad (22)$$

donde ${}^t \mathbf{a}$ es el vector de desplazamientos en la configuración de equilibrio ${}^t V$ y $\Delta \mathbf{a}_c$ es una perturbación del vector de desplazamientos en t para alcanzar la configuración de equilibrio inestable en el tiempo crítico $t_c = t + \Delta t_c$. Se supone para el vector $\Delta \mathbf{a}_c$ la siguiente aproximación $\Delta \mathbf{a}_c = \varrho \boldsymbol{\phi}$, donde $\varrho \in R$ y $\boldsymbol{\phi}$ es la perturbación o dirección de avance. Se puede adoptar $\boldsymbol{\phi} = {}^t \mathbf{a}$ o $\boldsymbol{\phi} = \Delta \mathbf{a} = {}^t \mathbf{a} - {}^{t-\Delta t} \mathbf{a}$ como dirección de avance hacia t_c . Por otro lado, para problemas en los que el punto de bifurcación es anterior al punto límite se puede adoptar como perturbación el autovector asociado al menor valor propio de ${}_r \mathbf{K}_T$, es decir, $[{}_r \mathbf{K}_T - \omega_i \mathbf{I}] \boldsymbol{\phi}_i = 0$.

Con estas hipótesis y utilizando (13) y (16) el campo de tensiones en el punto crítico se expresa por

$${}_{r_c} \mathbf{S} = {}_r \mathbf{S} + {}_r \mathbf{D} \left[{}_r \mathbf{B}_L({}^t \mathbf{a}) + \frac{\varrho}{2} {}_r \bar{\mathbf{B}}_1(\boldsymbol{\phi}) \right] \varrho \boldsymbol{\phi} = {}_r \mathbf{S} + \varrho {}_r \Delta \mathbf{S}_1 + \varrho^2 {}_r \Delta \mathbf{S}_2 \quad (23)$$

donde

$${}_r \Delta \mathbf{S}_1 = {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{B}_L({}^t \mathbf{a}) \boldsymbol{\phi} \quad (24a)$$

$${}_r \Delta \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2} {}_r \mathbf{D} {}_r \bar{\mathbf{B}}_1(\boldsymbol{\phi}) \boldsymbol{\phi} \quad (24b)$$

Por otro lado, se puede escribir la matriz de deformación en el punto crítico de la siguiente manera

$${}^{t_c} \mathbf{B}_L = {}_r \mathbf{B}_{L_0} + {}_r \mathbf{B}_{L_1}({}^t \mathbf{a}) + \varrho {}_r \bar{\mathbf{B}}_1(\boldsymbol{\phi}) = {}_r \mathbf{B}_L({}^t \mathbf{a}) + \varrho {}_r \bar{\mathbf{B}}_1(\boldsymbol{\phi}) \quad (25)$$

En (23) y (24b) ${}_r \bar{\mathbf{B}}_1(\boldsymbol{\phi})$ se obtiene de la expresión de ${}_r \mathbf{B}_1$ del Cuadro 2 al sustituir $\Delta \mathbf{a}$ por la perturbación $\boldsymbol{\phi}$. Nótese que cuando $\boldsymbol{\phi} = {}^t \mathbf{a}$, esto implica que ${}_r \bar{\mathbf{B}}_1 = {}_r \mathbf{B}_{L_1}$. Por fin, teniendo en cuenta (20), (23), (24a,b) y (25) la matriz de rigidez tangente en el punto *crítico* se aproxima del modo siguiente

$${}^{t_c} \mathbf{K}_T = {}_r \mathbf{K}_T + \varrho ({}_r \mathbf{K}_{L_2} + {}_r \mathbf{K}_{\sigma_1}) + \varrho^2 ({}_r \mathbf{K}_{L_3} + {}_r \mathbf{K}_{\sigma_2}) \quad (26)$$

donde ${}_r \mathbf{K}_T$ es la matriz de rigidez tangente en la configuración de equilibrio ${}^t V$. Las demás matrices se escriben como

$${}_r \mathbf{K}_{L_2} = \int_{r_V(e)} \left[{}_r \mathbf{B}_L^T {}_r \mathbf{D} {}_r \bar{\mathbf{B}}_1 + {}_r \bar{\mathbf{B}}_1^T {}_r \mathbf{D} {}_r \mathbf{B}_L \right] dV \quad (27a)$$

$${}_r \mathbf{K}_{L_3} = \int_{r_V(e)} {}_r \bar{\mathbf{B}}_1^T {}_r \mathbf{D} {}_r \bar{\mathbf{B}}_1 dV \quad (27b)$$

$${}^t_r \mathbf{K}_{\sigma_1} = \int_{rV(\epsilon)} {}_r \mathbf{G}^T {}_r \Delta \hat{\mathbf{S}}_1 {}_r \mathbf{G} dV \quad (27c)$$

$${}^t_r \mathbf{K}_{\sigma_2} = \int_{rV(\epsilon)} {}_r \mathbf{G}^T {}_r \Delta \hat{\mathbf{S}}_2 {}_r \mathbf{G} dV \quad (27d)$$

donde las matrices ${}_r \Delta \hat{\mathbf{S}}_1$ y ${}_r \Delta \hat{\mathbf{S}}_2$ tienen como componentes los incrementos de tensiones dados en (24a,b). La forma de dichas matrices es idéntica a la de la matriz ${}^t_r \hat{\mathbf{S}}$ definida en el Cuadro 3.

De la condición $|{}^{tc} r \mathbf{K}_T| = 0$ se obtiene un problema cuadrático de autovalores de cuya solución se toma el menor autovalor en valor absoluto. De este modo se obtiene una aproximación al campo de desplazamiento crítico dada por ${}^{tc} \mathbf{a} = {}^t \mathbf{a} + \varrho \boldsymbol{\phi}$. Este proceso puede simplificarse al despreciar el término cuadrático en ϱ en (26). Así, se obtiene el siguiente problema lineal de valores propios estándar

$$\left[{}^t_r \mathbf{K}_T + \varrho ({}^t_r \mathbf{K}_{L_2} + {}^t_r \mathbf{K}_{\sigma_1}) \right] \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (28)$$

A continuación se obtiene el incremento de la carga crítica utilizando la matriz de rigidez secante incremental como (ver ec.(2a))

$$\boxed{\Delta \mathbf{f}_c = {}^t_r \mathbf{K}_{SI} (\varrho \boldsymbol{\phi}) \varrho \boldsymbol{\phi} = [{}^t_r \mathbf{K}_T ({}^t \mathbf{a}) + {}^t_r \mathbf{K}_M (\varrho \boldsymbol{\phi}) + {}^t_r \mathbf{K}_N (\varrho^2 \boldsymbol{\phi}^2)] \varrho \boldsymbol{\phi}} \quad (29)$$

Finalmente, la predicción de la carga crítica se obtiene por

$${}^{tc} \mathbf{f} = {}^t \mathbf{f} + \Delta \bar{\mathbf{f}}_c \quad (30)$$

donde $\Delta \bar{\mathbf{f}}_c$ es la proyección de $\Delta \mathbf{f}_c$ en la dirección del vector de fuerzas nodales; es decir, se eliminan los términos espúreos que corresponden a las componentes nulas del vector de cargas nodales ${}^t \mathbf{f}$. Es interesante advertir que la carga crítica se puede calcular también a través de la matriz de rigidez secante total del modo siguiente

$$\boxed{{}^{tc} \mathbf{f} = {}^t_0 \mathbf{K}_{ST} ({}^{tc} \mathbf{a}) {}^{tc} \mathbf{a} = [{}^t_0 \mathbf{K}_L + {}^t_0 \mathbf{K}_M ({}^{tc} \mathbf{a}) + {}^t_0 \mathbf{K}_N ({}^{tc} \mathbf{a}^2)] {}^{tc} \mathbf{a}} \quad (31)$$

ESTRATEGIAS NUMÉRICAS PARA LA OBTENCIÓN DEL DESPLAZAMIENTO CRÍTICO

El método aquí propuesto puede ser aplicado de diferentes modos, obteniéndose así diferentes aproximaciones para el valor de la carga crítica. En este apartado se proponen distintas estrategias de aplicación del *método de desplazamiento crítico (MDC)* que se desarrollan a continuación.

Estrategia I. Predicción en un solo paso de carga

- 1) Se calcula el vector de desplazamientos ${}^0\mathbf{a}$ para pequeños valores de las fuerzas externas ${}^0\mathbf{f}$ (deformaciones infinitesimales).
- 2) Se toma $\boldsymbol{\phi} = {}^0\mathbf{a}$ como estimación del campo de desplazamientos crítico.
- 3) Se resuelve el problema de autovalores (28) para obtener el menor valor propio en valor absoluto y su autovector asociado.
- 4) Se obtiene la predicción de la carga crítica con la matriz secante incremental o total, utilizando las ecuaciones (29) y (30) o (31), respectivamente.

Este proceso es comparable en coste al problema clásico de autovalores en estabilidad inicial de barras, vigas, placas y láminas².

$$[{}_r^t \mathbf{K}_{L_0} + \lambda {}_r^t \mathbf{K}_\sigma] \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (32)$$

donde el menor autovalor no nulo define el incremento en el factor de carga inicial ${}^0\mathbf{f}$ obteniéndose la *carga de pandeo* como $\lambda_{min} {}^0\mathbf{f}$. Sin embargo, se sabe que en los sistemas estructurales con comportamiento precrítico fuertemente no lineal, el *método de estabilidad inicial (MEI)* sobrevalora la carga crítica. En nuestra experiencia se pueden obtener predicciones buenas para la carga crítica con el *MDC* en un sólo paso de carga, partiendo de una configuración de equilibrio con deformaciones infinitesimales, como se demostrará en los ejemplos numéricos.

Estrategia II. Predicción paso a paso

- 1) Se calcula el vector de desplazamiento ${}^t\mathbf{a}$ para cada paso de carga ${}^t\mathbf{f}$.
- 2) Se toma $\boldsymbol{\phi} = {}^t\mathbf{a}$ como estimación del campo de desplazamientos crítico.
- 3) Se resuelve el problema de valores propios en (28) para el menor autovalor en valor absoluto y su autovector asociado.
- 4) Se predice la carga crítica a través de las ecuaciones (29) y (30) o (31).

En esta estrategia se evalúa la carga crítica a cada paso, partiendo de un nuevo campo de desplazamiento convergido ${}^t\mathbf{a}$. Por otro lado, también se puede aplicar el *MEI* en cada configuración de equilibrio convergida. Esto implica resolver el siguiente problema de valores propios

$$[{}_r^t \mathbf{K}_L + \lambda {}_r^t \mathbf{K}_\sigma] \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (33)$$

donde la carga crítica se calcula como $\lambda_{min} {}^t\mathbf{f}$. Dichos procedimientos, *MDC* y *MEI*, deberán converger al valor “exacto” de la carga límite cuando se hace la predicción en la vecindad del punto crítico.

Estrategia III. Predicción paso a paso mejorada

- 1) Se calcula el vector de desplazamientos ${}^0\mathbf{a}$ correspondiente a una carga inicial ${}^0\mathbf{f}$ (Es conveniente tomar ${}^0\mathbf{f}$ lo suficientemente pequeño para que los desplazamientos sean infinitesimales).
- 2) Se toma $\phi = {}^0\mathbf{a}$ como estimación del campo de desplazamientos críticos.
- 3) y 4). Son idénticos a las etapas 3 y 4 de las estrategias I y II.
- 5) Se evalúa el vector de fuerzas residuales ${}^{t_c}\mathbf{r}$ como

$${}^{t_c}\mathbf{r} = {}^{t_c}\bar{\mathbf{f}} - {}^t\mathbf{f} \quad (34)$$

donde ${}^{t_c}\bar{\mathbf{f}}$ es la predicción del vector de carga crítica “proyectado” en la dirección de ${}^t\mathbf{f}$.

Naturalmente, el campo de desplazamiento crítico, ${}^{t_c}\mathbf{a} = (1 + \varrho){}^0\mathbf{a}$, corresponde a una configuración no equilibrada. Por ello es necesario aplicar un proceso iterativo para alcanzar la configuración de equilibrio correspondiente al nivel de carga ${}^{t_c}\bar{\mathbf{f}}$.

- 6) Se utiliza un proceso iterativo para encontrar los valores correctos de los desplazamientos críticos ${}^{t_c}\mathbf{a}$ en equilibrio con las fuerzas externas ${}^{t_c}\bar{\mathbf{f}}$. Para este fin, puede aplicarse el método de Newton-Raphson como

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{a}^{(k)} = -[{}^t\mathbf{K}_T^{(k-1)}]^{-1} {}^{t_c}\mathbf{r}^{(k)} \\ {}^{t_c}\mathbf{a}^{(k)} = {}^{t_c}\mathbf{a}^{(k-1)} + \Delta\mathbf{a}^{(k)} \\ \text{con } {}^{t_c}\mathbf{a}^{(0)} = {}^{t_c}\mathbf{a} \text{ y } k = 1, 2, \dots, n_k \end{cases} \quad (35)$$

- 7) Se reinicia el proceso a partir del punto 2 tomando $\phi = {}^{t_c}\mathbf{a}$, donde ${}^{t_c}\mathbf{a}$ es el vector de desplazamientos convergido del punto 6.

Esta estrategia ha proporcionado muy buenas aproximaciones para la carga crítica en dos o tres pasos como se mostrará en los ejemplos numéricos del próximo apartado.

EJEMPLOS NUMÉRICOS

En los ejemplos a continuación se muestra el comportamiento del *MDC* frente al *MEI* en problemas de inestabilidad estructural utilizando elementos de barra articulada 3D y de sólidos (2D y 3D) para analizar distintas tipologías estructurales.

Estructura articulada espacial en forma de estrella

Se analiza en este ejemplo una estructura articulada espacial en forma de estrella. Sus características geométricas y propiedades mecánicas se muestran en la Figura 4. La estructura está cargada con fuerzas puntuales verticales actuando sobre los nodos 1–7, como puede apreciarse en dicha figura. Se trata de una estructura con 13 nodos y 24 elementos de barra articulada 3D. Dicha estructura posee 21 grados de libertad libres y 18 restringidos por medio de 6 apoyos simples.

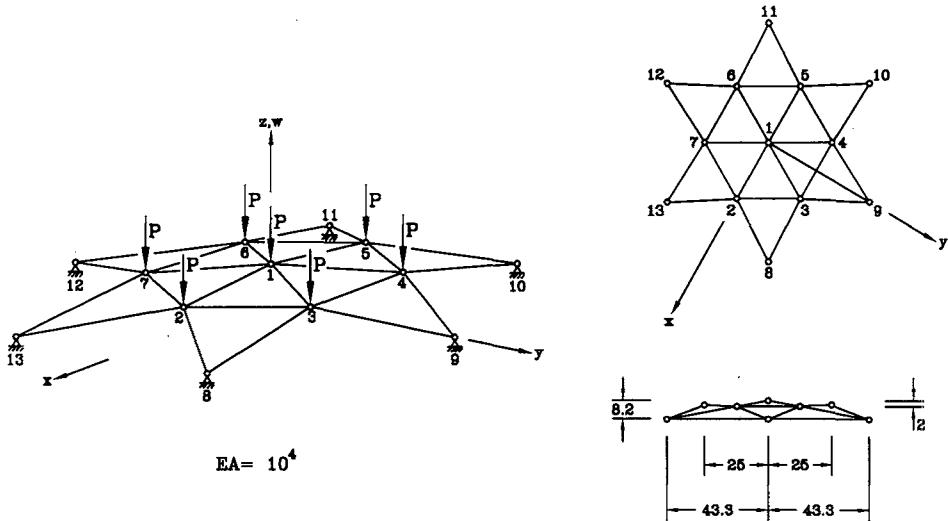


Figura 4. Estructura articulada espacial en forma de estrella. Características geométricas, propiedades mecánicas y posición de las cargas

Para seguir la trayectoria fundamental de equilibrio en el rango de desplazamientos de $[0,11]$ se ha utilizado el método de control de la respuesta con las siguientes características:

- ecuación de coacción: control de desplazamiento w_1
- longitud de arco constante: -0.051
- tolerancia para la convergencia: 10^{-5}
- número total de incrementos: 207
- esquema predictor-corregidor: Newton Raphson
- descripción Lagrangiana Total
- modelo constitutivo hiperelástico lineal material

En el rango de desplazamientos anteriormente mencionado, esta estructura presenta varios puntos de inestabilidad a lo largo de la trayectoria primaria de equilibrio. En la Figura 5 se pueden observar los puntos críticos A, B, G, H y I en dicha trayectoria. Los puntos A, B y I son puntos límite, mientras que los puntos G y H son puntos de bifurcación. Dichos puntos se han determinado previamente a través del *método indirecto clásico*⁴. Los valores de las cargas críticas en estos puntos son los siguientes: punto A, $\lambda_A = 7.76$; punto B: $\lambda_B = -2.05$; punto G: $\lambda_G = 13.012$; punto H: $\lambda_H = 15.07$ y punto I: $\lambda_I = 15.25$.

A lo largo de la trayectoria precrítica de equilibrio se han aplicado el *MDC* y el *MEI* para obtener predicciones de la carga crítica correspondiente al punto A. En la Figura 5 las curvas CA, DA y FA en el plano carga-desplazamiento resultan del *MDC*, mientras que se obtiene la curva EA con el *MEI*. La curva CA representa la variación

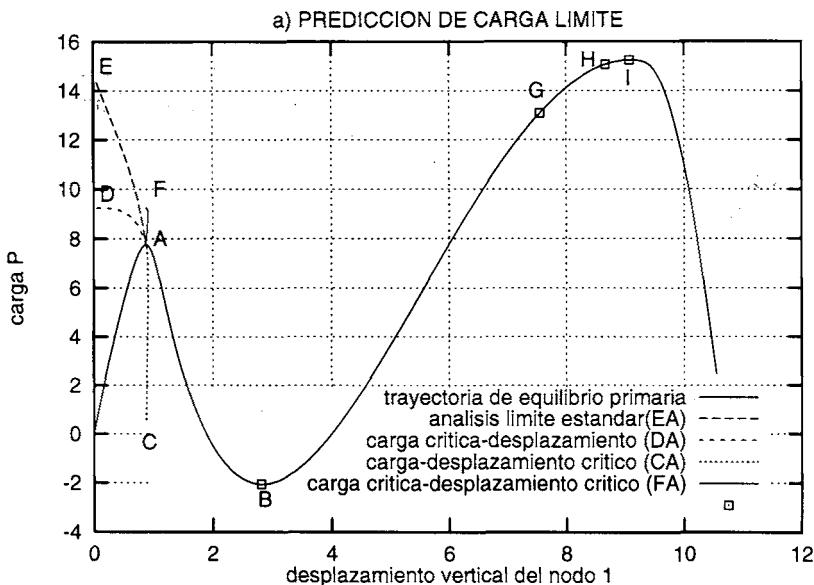


Figura 5. Estructura articulada espacial en forma de estrella. Predicción paso a paso de la carga límite

del desplazamiento crítico con la carga. Para este ejemplo se observan las excelentes predicciones del desplazamiento crítico obtenidas con el *MDC*. La curva DA representa la variación de la carga crítica con el desplazamiento, y la curva FA la variación de la carga y el desplazamiento críticos. Por otro lado, el *MEI* aplicado paso a paso permite obtener la predicción de la carga crítica, representada por la curva EA. Se observa que las curvas EA y DA proporcionan valores superiores de la carga crítica, pero a medida que se acercan al punto crítico (punto A), ambos métodos convergen a un valor muy próximo a la carga crítica, (ver la Tabla I). En dicha tabla se comparan las predicciones inicial y en la vecindad del punto crítico, obtenidas con el *MDC* y el *MEI*, con los valores obtenidos por el *método indirecto* para la detección de puntos críticos. Se observa la buena predicción inicial con el *MDC* frente a la del *MEI*. En la vecindad del punto crítico ambos métodos obtienen buenas predicciones para la carga crítica.

Predicción	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: II		Análisis de Estabilidad Inicial (<i>MEI</i>)
	$t_c w_1$	$t_c f_{z_1}$	$t_c f_{z_1}$
Inicial	-0.879 (1.38%)	9.23 (18.94%)	14.37 (25.75%)
En la vecindad del punto crítico	-0.881 (1.61%)	7.796 (0.46%)	7.85 (1.16%)

Tabla I. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: $t_c w_1 = -0.867$ y $t_c f_{z_1} = 7.76$

Arco circular rebajado biempotrado

Se considera un arco rebajado de directriz circular, con ambos extremos empotrados, sometido a la acción de una carga vertical en la clave. Las características geométricas y propiedades mecánicas del arco se muestran en la Figura 6. Debido a la simetría de la deformada del arco se considera únicamente la mitad del arco, que ha sido discretizada en diez cuadriláteros isoparamétricos de 8 nodos, utilizándose una cuadratura de Gauss 2×2 .

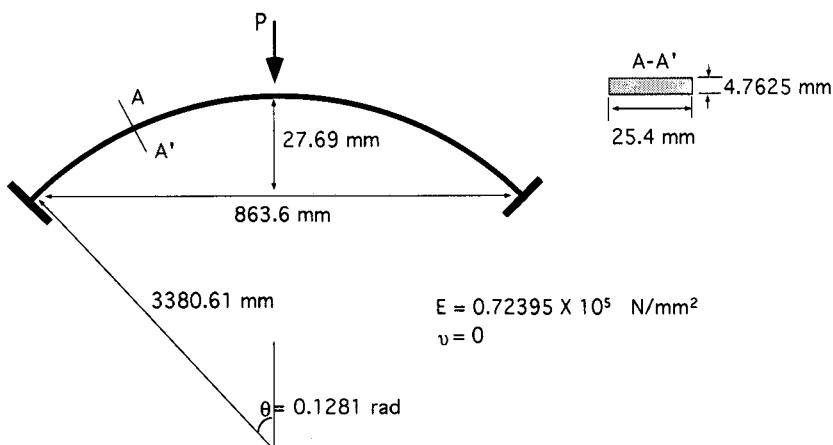


Figura 6. Arco circular rebajado biempotrado. Características geométricas y propiedades mecánicas

Esta estructura ha sido estudiado por Dawe⁶. Presenta una situación de inestabilidad representada por el *cambio de forma hacia delante* que puede observarse en la curva fuerza-desplazamiento de la clave del arco (Figura 7). La carga límite y el desplazamiento en la clave correspondiente a esta carga son $P_{limite} = 160$ N y $v_{clave} = 10$ mm, respectivamente.

Para obtener la trayectoria fundamental de equilibrio y las demás curvas resultantes de la aplicación del *MDC* y del *MEI* para predecir la carga de inestabilidad, se ha utilizado el método de control de la respuesta con las siguientes características:

- ecuación de coacción: control de desplazamiento v_{clave}
- longitud de arco constante: – 0.5
- tolerancia para la convergencia: 10^{-5}
- número total de incrementos: 90
- esquema predictor-corrector: Newton Raphson
- descripción Lagrangiana Total
- modelo constitutivo hiperelástico lineal material

Para determinar la carga y desplazamiento críticos se aplican el *MDC* y el *MEI* con la estrategia de predicción paso a paso definida en el apartado anterior. Con el *MEI* se ha obtenido la curva EB de la Figura 7. Dicha curva expresa la variación de

la carga límite estimada con el desplazamiento. El punto E es la predicción inicial y el punto B la predicción final. La predicción inicial se refiere a una configuración de equilibrio cercana a la indeformada, mientras que se calcula la predicción final respecto a una configuración de equilibrio en la vecindad del estado crítico. Aplicando el *MDC* se obtienen varias curvas. La curva DB expresa la variación de la carga crítica con el desplazamiento en la clave del arco. La curva AB representa la relación entre el desplazamiento crítico estimado y la carga aplicada. La curva CB expresa la relación entre los valores estimados para la carga y el desplazamiento críticos. Obsérvese que las predicciones de la carga límite a través del *MDC*(curvas CB y DB), son sustancialmente mejores que las del *MEI* (curva EB).

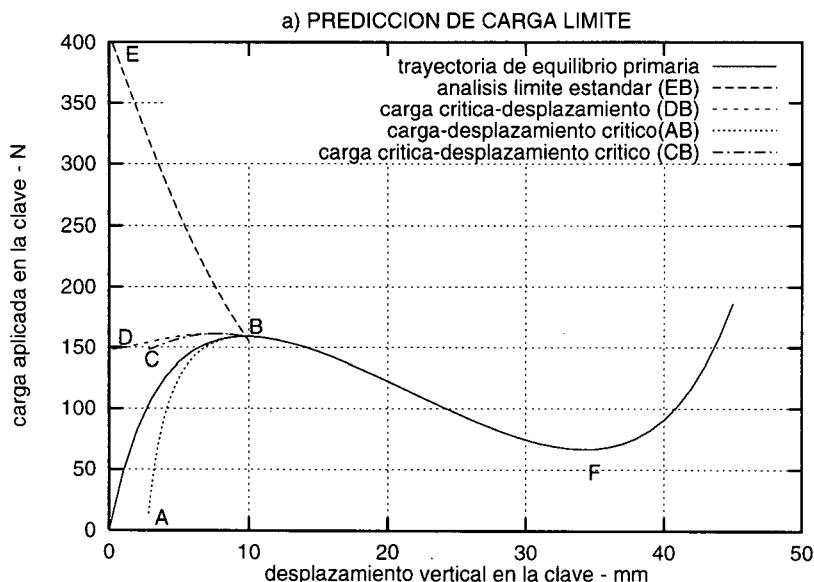


Figura 7. Arco circular rebajado biempotrado. Predicción paso a paso de la carga límite

Predicción	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: II		Análisis de Estabilidad Inicial (<i>MEI</i>)
	$t_c v_{clave}$ (mm)	$t_c f_{y_{clave}}$ (N)	$t_c f_{y_{clave}}$ (N)
Inicial	-2.828 (71.72%)	148.367 (6.73%)	398.914 (150.76%)
En la vecindad del punto crítico	-9.751 (2.49%)	159.138 (0.04%)	159.5 (0.26%)

Tabla II. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: $t_c v_{clave} = -10.0$ mm y $t_c f_{y_{clave}} = 159.08$ N

En la Tabla II se muestran los valores estimados para la carga y desplazamiento críticos utilizando la estrategia de *predicción paso a paso* y los *MDC* y *MEI*. Estos resultados se comparan con los obtenidos con el *método indirecto* a través del cálculo del menor autovalor de ${}_0\mathbf{K}_T$. Nótese que la predicción inicial para la carga crítica

realizada con el *MDC* es bastante mejor que la predicción con el *MEI*. En la vecindad del estado crítico ambos métodos obtienen valores muy próximos al valor de la carga límite.

Lámina cilíndrica biapoyada

Se considera una lámina cilíndrica cuyas características geométricas, propiedades mecánicas y malla se muestran en la Figura 8. La lámina está apoyada en sus bordes rectos, totalmente libre en los bordes curvos, y sometida a una fuerza vertical en su centro. Debido a la doble simetría del problema, se ha analizado solamente un cuarto de lámina que ha sido discretizado en 16 hexaedros isoparamétricos de 20 nodos utilizando una cuadratura de Gauss $3 \times 3 \times 3$.

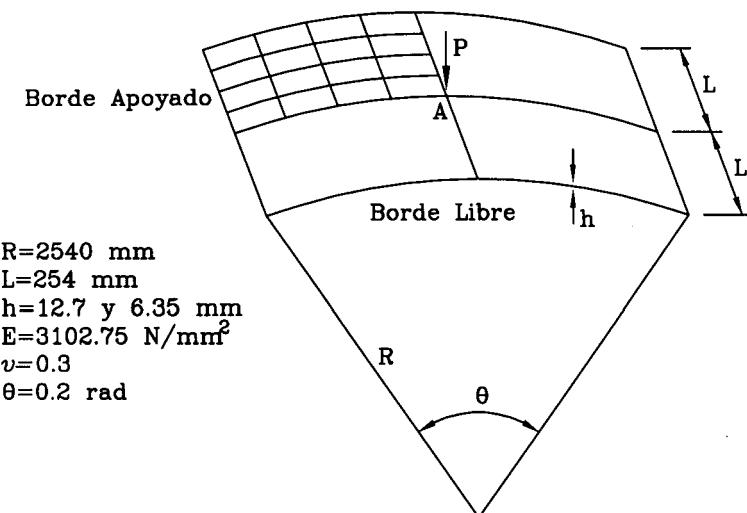


Figura 8. Lámina cilíndrica biapoyada. Características geométricas, propiedades mecánicas y malla de elementos finitos

Este ejemplo ha sido estudiado por Oliver y Oñate¹⁰, Simo *et al.*¹⁴ y Felippa *et al.*⁸ entre otros. Esta estructura se ha consagrado como un ejemplo de prueba estándar en los estudios de no linealidad geométrica en el contexto del método de elementos finitos. Por lo tanto, se trata de un ejemplo bien documentado en el ámbito de la mecánica no lineal del sólido.

El comportamiento postcrítico de esta estructura se caracteriza por la pérdida de rigidez con el consiguiente cambio de forma. La forma del cambio de geometría de este modelo depende de su espesor. A continuación se analiza el cambio de forma de la lámina con el espesor 6.35 mm. El caso de $h = 12.7$ mm puede encontrarse en la referencia⁹. En este caso dicha lámina presenta un comportamiento postcrítico caracterizado por rebotes hacia delante y hacia atrás. Para realizar el análisis de dicho comportamiento se ha utilizado el método de control de la respuesta con las siguientes características:

- ecuación de coacción: sobre todas las componentes de \mathbf{v}
- longitud de arco constante: 2.5
- tolerancia para la convergencia: 10^{-3}
- número total de incrementos: 125
- esquema predictor-corregidor: Newton Raphson
- descripción Lagrangiana Total
- modelo constitutivo hiperelástico lineal material

En la Figura 9 se observa que el primer cambio de forma *hacia adelante* ocurre para un valor de $\lambda_B = 0.587$ KN (valor extraído de la referencia¹⁰). En este punto, al aumentar ligeramente la fuerza se produce un *salto* en los desplazamientos. A continuación, ocurre un cambio de forma *hacia atrás* (snap-back) para un valor de $w_A \approx 17$ mm. Al aumentar un poco el valor de dicho desplazamiento se produce un nuevo salto, incluso con cambio de signo en la fuerza de reacción.

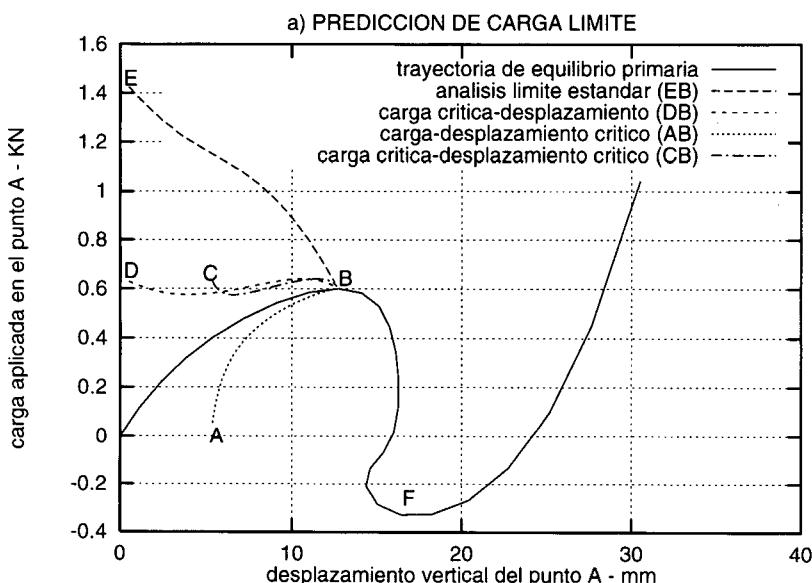


Figura 9. Lámina cilíndrica biapoyada ($h = 12.7$ mm). Predicción paso a paso de la carga límite

Para obtener la carga límite y el correspondiente desplazamiento crítico se han aplicado el *MDC* y el *MEI* haciendo una *predicción paso a paso* para los valores críticos de la carga y desplazamiento a lo largo de la trayectoria de equilibrio precrítica. Además de la rama primaria de equilibrio, se presentan en la Figura 9 varias curvas que se proyectan en el plano (w_A, λ_A). Las curvas AB, CB, y DB resultan de la aplicación del *MDC*, mientras que la curva EB resulta del *MEI*. La curva AB expresa la relación entre el desplazamiento crítico estimado y la carga. El punto A corresponde a la

estimación incial del desplazamiento crítico. La curva DB expresa la relación entre la estimación de la carga crítica y el desplazamiento. El punto D representa la estimación incial de la carga límite. La curva CB expresa la relación entre los valores estimados de la carga y el desplazamiento críticos. El punto C representa la estimación incial de la carga y el desplazamiento críticos. Por último, la curva EB expresa la relación entre la estimación de la carga límite y el desplazamiento obtenida con el *MEI*.

Se puede observar en la misma figura que la predicción de la carga límite realizada con el *MDC* (curva DB), es mejor que la estimación hecha con el *MEI* (curva EB). De nuevo, cuando en la trayectoria de equilibrio primaria se hace el análisis cerca del punto límite (punto B) ambos métodos convergen al valor de la carga límite.

En la Tabla III se muestran los resultados de las estimaciones de la carga y el desplazamiento críticos realizadas con el *MDC* y el *MEI*. Se han hecho dichas predicciones respecto a dos configuraciones de equilibrio, una cercana a la configuración incial y la otra en la vecindad del punto crítico. Estos resultados han sido comparados con los obtenidos a través de la función de prueba basada en el menor autovalor de \mathbf{K}_T . Se puede observar que la predicción incial para la carga límite realizada con el *MDC* es bastante mejor que la del *MEI*. En las predicciones cercanas al punto crítico con ambos métodos se obtienen buenos resultados siendo el *MDC* el que ha obtenido un resultado más preciso.

	Método de Desplazamiento Crítico Estrategia de solución: II		Análisis de Estabilidad Incional (<i>MEI</i>)
Predicción	$t_c w_A$	$t_c f_{z_A}$	$t_c f_{z_A}$
Incial	-5.377 (57.73%)	0.628 (4.67%)	1.425 (137.5%)
En la vecindad del punto crítico	-12.635 (0.67%)	0.609 (1.5%)	0.627 (4.5%)

Tabla III. Los números entre paréntesis son porcentajes del error respecto al valor obtenido a través del Método Indirecto: $t_c w_A = -12.72$ mm y $t_c f_{z_A} = 0.6$ KN

En las referencias^{9,11,12,13} pueden encontrarse otros ejemplos que demuestran el excelente comportamiento del *MDC* para predicción de puntos críticos.

CONCLUSIONES

El método de desplazamiento crítico (*MDC*) permite predecir con gran precisión el valor de la carga crítica (tanto límite como de bifurcación) y el modo de deformación crítica con un esfuerzo computacional considerablemente menor que en los métodos de análisis de inestabilidad clásicos. En todos los casos estudiados se ha comprobado que el *MDC* es efectivo, incluso cuando se parte de una configuración de equilibrio próxima a la indeformada, obteniéndose en una sola iteración (lo que implica resolver un sencillo problema de autovalores lineal) un valor de la carga crítica ostensiblemente mejor que el proporcionado por el método de inestabilidad incional. Este resultado es de interés práctico para predecir con rapidez valores realistas tanto de la carga como de la deformada críticas.

La extensión del MDC a problemas con no linealidad del material y a modelos estructurales con grados de libertad rotacionales (es decir, vigas, placas y láminas) requiere un estudio más detenido, pues la obtención de la matriz de rigidez secante es más compleja en estos casos.

REFERENCIAS

1. M. Badawi and A.R. Cusens, "Symmetry of the Stiffness Matrices for Geometrically Nonlinear Analysis", *Communications in Appl. Num. Meth.*, Vol. **8**, pp. 135–40, (1992).
2. K.J. Bathe, "*Finite Element Procedures*", Prentice Hall, (1996).
3. E. Carrera, "Sull' uso dell' operatore secante in analisi non lineare di strutture multistrato con il metodo degli elementi finiti", *XI Congresso Nazionale AIMETA*, Trento, 28 September–2 October, (1992).
4. K.K. Choong and Y. Hangai, "Review on Methods of Bifurcation Analysis for Geometrically Nonlinear Structures", *Bulletin of IASS*, Vol. **34**, 112, pp. 133–149, (1993).
5. M. Como and A. Grimaldi, "*Theory of Stability of Continuous Elastic Structures*", CRC Press, New York, (1995).
6. D.J. Dawe, "Finite Deflection Analysis of Shallow Arches by Discrete element method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **3**, 4, (1971).
7. H. Duderck, B. Kröplin, D. Dinkler, J. Hillmann, and W. Wagenhuber, "Nonlinear Computations in Civil Engineering Structures", (in German), *DFG Colloquium*, 2–3 March 1989, Springer Verlag, Berlin, (1989).
8. C. Felippa, L.A. Crivelli and B. Haugen, "A Survey of the Core–Congruential Formulation for Geometrically Nonlinear TL Finite Elements", *Archives of Comp. Meth. in Engng.*, Vol. **1**, 1, pp. 1–48, (1994).
9. W. Matias, "El método de desplazamiento crítico en el análisis de inestabilidad estructural", Tesis Doctoral, UPC, Barcelona, España, (1996).
10. J. Oliver and E. Oñate, "A Total Lagrangian Formulation for the Geometrically Nonlinear Analysis of Structures Using Finite Elements", Part II, "Arches, Frames and Axisymmetric Shells", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **23**, pp. 253–274, (1986).
11. E. Oñate, "On the Derivation and Possibilities of the Secant Stiffness Matrix for Nonlinear Finite Element Analysis", *Computational Mechanics*, Vol. **15**, pp. 572–593, (1995).
12. E. Oñate and W. Matias, "Enhanced Prediction of Structural Instability Points Using a Critical Displacement Method", *Advances in Finite Element Technology*, Nils-Erik Wiberg (Ed.), CIMNE, Barcelona, pp. 63–89, (1995).
13. E. Oñate and W. Matias, "A Critical Displacement Approach for Predicting Structural Instability", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **134**, pp. 135–161, (1996).
14. J.C. Simo, D.D. Fox and M.S. Rifai, "Formulation and Computational Aspects of a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model", *Comp. Mech. of Nonlinear Response of Shells*, W.B. Krätsig and E. Oñate (Eds), Springer-Verlag, (1990).
15. P. Wriggers and J.C. Simo, "A General Procedure for the direct Computation of Turning and Bifurcation Points", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. **30**, pp. 155–176, (1990).
15. O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, "El Método de los Elementos Finitos", CIMNE-McGraw Hill, Vol. 1 (199) y Vol. 2 (199).