

GRAFOS EN EL PROYECTO ARQUITECTÓNICO. PARTICIÓN DE UN RECTÁNGULO EN RECTÁNGULOS

A. RECUERO*

M. ÁLVAREZ**

y

O. RÍO*

* *Instituto Eduardo Torroja - CSIC
Serrano Galvache s/n, 28033 Madrid, España*

** *Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid, Campus de Monte Gancedo
Boadilla del Monte, Madrid, España*

RESUMEN

En este trabajo se analiza el problema de la partición de un rectángulo en rectángulos, esto es, dado un grafo, saber si admite una realización de esta clase y, en caso afirmativo, generar automáticamente dichas realizaciones. En ambos aspectos se propone un procedimiento completo y general. Se trata de un problema de aplicación práctica en áreas tales como proyecto arquitectónico o compactación de circuitos electrónicos, del que no se ha encontrado una solución general en la bibliografía consultada.

SUMMARY

In this paper the problem of partitioning a rectangle into rectangles is analysed. It consists in determining whether a given graph can be realised this way and, if so, automatically generate some of its realisations. A general method is proposed to solve both aspects of the problem. It is a problem with practical application in areas such as architectural design or compactation of electronic circuits, to which no general solution has been found in the specialised bibliography.

INTRODUCCIÓN

Considérese un rectángulo dividido en un conjunto de rectángulos. Si situamos en cada rectángulo un vértice y unimos mediante un arco los vértices correspondientes a aquellos que tengan algún trozo de lado común, obtendremos un grafo asociado a la partición, tal como se muestra en la Figura 1. Recíprocamente, si un grafo puede estar asociado a una partición del tipo descrito, diremos que es realizable y que la partición

Recibido: Septiembre 1995

es una realización del grafo. Una partición da lugar a un solo grafo, mientras que un grafo realizable puede dar lugar a numerosas realizaciones. En la Figura 2 se muestran tres realizaciones del grafo de la Figura 1B, distintas de la mostrada en la Figura 1A.

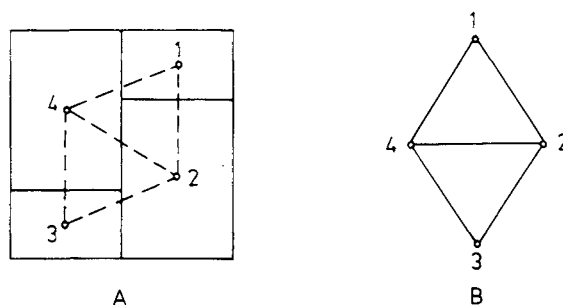


Figura 1

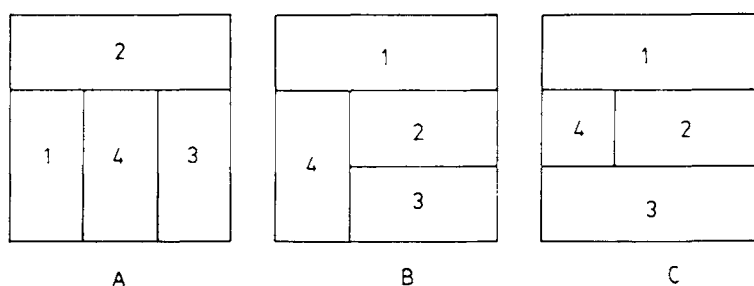


Figura 2

En este trabajo se aborda el problema de determinar si un grafo es realizable y, en caso afirmativo, generar automáticamente realizaciones del mismo. Para ello se analizan las peculiares características geométricas que impone el usar sólo rectángulos para tapizar el rectángulo total y su traducción en condiciones topológicas que debe cumplir un grafo para ser realizable.

Este problema tiene aplicación práctica en campos, tales como el proyecto automatizado de distribuciones arquitectónicas o el de compactación de circuitos electrónicos integrados. Fue planteado por Ungar en 1953 y, aunque ha sido abordado por diversos autores (Levin, Mitchel *et al.*, Steadman, Earl, March, Magiera, Roth *et al.*, Schwarz *et al.*), los autores no han encontrado ninguna referencia en la que se presente una solución completa del mismo.

Magiera presenta algunas propiedades de las particiones exteriores de un rectángulo en rectángulos y estudia los grafos asociados con ellas. Tan sólo considera rectángulos exteriores, esto es, aquellos que tienen al menos un lado sobre el contorno exterior.

El modelo descrito por Roth *et al.* no impone que la planta sea rectangular. Permite la transformación de un grado plano de requerimientos en un plano esquemático dimensionado. Para ello, un grafo, en el cual las aristas representan paredes y los vértices uniones de paredes, se transforma en un digrafo coloreado, en el que las

paredes en cada dirección se representan con colores distintos. Este digrafo coloreado se transforma en un grafo de dimensiones, sobre el que se aplica una técnica PERT para obtener planos con dimensiones optimizadas de las habitaciones, de modo que el perímetro sea mínimo y las superficies mínima o máxima.

El método propuesto por Schwarz *et al.* tampoco está restringido a plantas rectangulares. Está basado en una técnica utilizada en la compactación en dos dimensiones de circuitos VLSI (Very Large Scale Integration). El modelo utiliza dos digrafos ponderados para representar las reglas de diseño. Cada digrafo se refiere a las paredes en una dirección x o y . Las paredes de cada habitación se representan mediante un vértice en el digrafo correspondiente a su dirección perpendicular. El método utiliza herramientas de teoría de grafos para representar los requerimientos de diseño.

En estos últimos métodos se utilizan técnicas desarrolladas en otras áreas y es necesario tomar decisiones previas sobre posiciones relativas entre los rectángulos. Sin embargo, hay requerimientos que pueden cumplirse de varias formas, tal como que dos habitaciones puedan ser contiguas en cualquier dirección. El método propuesto aquí es más general, pues no impone condiciones a priori sobre las posiciones relativas entre habitaciones, si bien en principio es sólo válido para plantas rectangulares, que son las únicas convexas que pueden ser cubiertas por rectángulos. Las condiciones sobre dimensiones, tales como valores máximos o mínimos de longitudes o superficies, pueden ser introducidas en distintos puntos del algoritmo.

Este artículo está organizado de modo que en la sección siguiente se hace referencia a la utilización de grafos en el proyecto arquitectónico. Luego se discute el problema de saber si un grafo dado es realizable, exponiendo las particularidades que se derivan de utilizar sólo rectángulos para cubrir un rectángulo y enseñando a traducir éstas en condiciones que deben cumplir los elementos del grafo para lo que se introduce el concepto de envoltura de un rectángulo. También se muestra cómo se organizan estas condiciones en forma de algoritmo. Las operaciones a realizar quedan simplemente indicadas, pero las verificaciones a realizar y plasmación de las condiciones establecidas se describen explícitamente. A continuación se muestra un conjunto de grafos no realizables, indicando para cada uno de ellos, cuál de las verificaciones es violada.

Se estudia la forma de obtener realizaciones de un grafo, estableciendo una clasificación de los rectángulos en externos e internos y proponiendo un método para establecer un orden en que pueden ser incorporados. Se presentan algunas propiedades del esqueleto de una partición relacionadas con las características del grafo asociado y se ligan los grados de libertad de la partición con las coordenadas de los vértices del esqueleto. Seguidamente se propone una clasificación de los rectángulos externos, así como la forma de describir su posición. Se propone también una forma de describir las posiciones de los rectángulos de la envoltura respecto al de base. A continuación se presenta un algoritmo que permite generar todas las configuraciones válidas de rectángulos externos, las cuales servirán de base a las realizaciones a proponer, completándose al situar los rectángulos internos. Al final se describe cómo pasar a expresar las coordenadas de los vértices del esqueleto en función de los parámetros que se elijan como grados de libertad de la partición. Finalizando el artículo, se muestra un esquema del proceso completo y se indica la forma de aplicar el procedimiento a plantas no convexas, cuando sus lados sean paralelos a dos direcciones perpendiculares.

UTILIZACIÓN DE GRAFOS EN EL PROYECTO ARQUITECTÓNICO

El proyecto de un edificio es el resultado del proceso que realiza un arquitecto para la concreción espacial y formal de un programa de requerimientos previamente establecido; tiene su plasmación en diferentes documentos (esquema básico, anteproyecto y proyecto). Para llegar a una sistematización del espacio arquitectónico, éste debe dividirse en células, normalmente rectangulares, del tamaño que interese, de manera que tapicen un soporte, normalmente también rectangular, o que puede transformarse en un rectángulo. Se trata de crear una geometría en función de los requerimientos previamente establecidos y de un conocimiento profundo de la naturaleza del edificio. Para ello se establecerán unas relaciones jerárquicas que determinan la importancia de cada célula o rectángulo y sus relaciones parciales y globales. De esta manera se crea la estructura funcional del edificio que definirá la organización de usos y nexos de interrelación y la estructura formal de espacios para esos usos.

Tomando como base el programa, se generan espacios arquitectónicos, se organizan funcionalmente y formalmente con sus respectivos vínculos o nexos, dando lugar a una topología representada por el esquema básico, cuya realización será la geometría deseada.

El esquema básico plasma las primeras ideas con sus variantes y alternativas que una vez evaluadas y verificadas de acuerdo a pautas fijadas darán lugar en una fase posterior al anteproyecto arquitectónico, donde se dan dimensiones a los esquemas, se define la conformación espacial con sus límites y el tipo de espacios para concluir en una última fase en el proyecto arquitectónico. La teoría de grafos es una de las técnicas más adecuadas para llevar a cabo el diseño al emplear relaciones de vecindad (relacionado con) y de conexión, basadas en los requerimientos de un sistema espacial.

Es en las fases iniciales del proceso de diseño, la elaboración de esquemas básicos, donde el trabajo que se describe puede ser de ayuda para la obtención de alternativas de diseño que respondan a unos requerimientos funcionales previamente establecidos en el programa arquitectónico. Los esquemas básicos son plasmados en grafos que definen los vínculos funcionales, precisando el tipo y grado de relación existente entre las diferentes células o rectángulos, representando los vértices del grafo el conjunto finito de las mismas y los arcos sus relaciones. De estos análisis puede deducirse que dos vértices han de estar necesariamente conectados o desconectados, o que pueden estar conectados o no. El conjunto de todos los grafos que reflejan las conexiones admisibles se obtendrá agregando al grafo que recoge las conexiones obligatorias las distintas combinaciones de las que pueden existir o no. En este trabajo se consideran las realizaciones de un grafo concreto, en el que los rectángulos de su realización estarán en contacto si, y sólo si, existe un arco entre los vértices que los representan.

A partir del grafo primario se puede inferir un grafo secundario o esqueleto de la partición, en el cual los arcos se convierten en fronteras de las células o rectángulos. Este esqueleto representa topológicamente la estructura intercelular del sistema espacial, de la cual se puede inferir la geometrización del proyecto arquitectónico.

El que un grafo admita numerosas realizaciones significa, que una vez que el proyectista ha descrito sus requerimientos en forma de grafo, existe una gran variedad de

soluciones arquitectónicas posibles. La ventaja de realizar algunas de las operaciones necesarias a nivel del grafo abstracto, en lugar de hacerlo sobre planos, es que las decisiones pueden ser objetivas sin tener en cuenta consideraciones relativas a la forma o aspecto de las habitaciones.

REALIZABILIDAD DE UN GRAFO

Para estudiar la realizabilidad de un grafo vamos a introducir el concepto de envoltura de un rectángulo. Considérese un rectángulo cualquiera al que llamaremos rectángulo base, tal como el sombreado en las distintas realizaciones de la Figura 3.

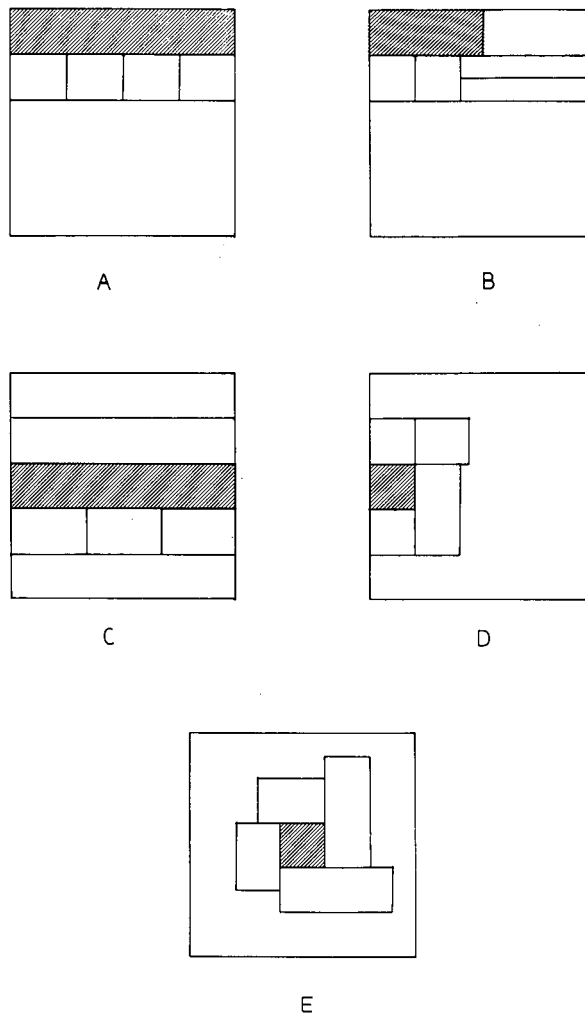


Figura 3

Se denominará envoltura del mismo al conjunto de rectángulos que tienen algún contacto con él, ya sea en parte de un lado o en un vértice. Dos rectángulos que sólo están conectados por un vértice, se dice que son verticales entre sí. Si existiesen dos rectángulos verticales entre sí, habrá otra pareja de rectángulos verticales entre sí en el mismo vértice. En consecuencia, los rectángulos verticales entre sí siempre se producen en grupos de cuatro, verticales dos a dos. Si los vértices de la envoltura forman un ciclo, se dirá que es cerrada y en caso contrario que es abierta.

En los cinco casos de la Figura 3 la envoltura está formada por cuatro rectángulos. La envoltura puede tener una parte (casos A, B, D, E) o dos partes independientes (caso C), según que todos dichos rectángulos estén situados de forma contigua o no. La envoltura tendrá dos partes, cuando el rectángulo base tenga un lado que ocupe una dimensión completa del rectángulo total y tenga rectángulos a ambos lados (caso C, pero no caso A). Si la envoltura es continua, puede cubrir totalmente cualquier número de lados consecutivos del rectángulo base, según cuál sea su posición (1 en A, 2 en B, 3 en D y 4 en E).

Veamos algunas condiciones que deben cumplir los rectángulos de la envoltura:

- Los rectángulos de cada parte de la envoltura han de formar una sucesión ordenada, es decir, cada rectángulo puede tener uno anterior y uno posterior.
- Si la envoltura tiene una sola parte, ésta puede ser cerrada, formando en tal caso sus rectángulos un ciclo con cuatro elementos más el número de rectángulos verticales al base como mínimo. En la Figura 4 se muestran ejemplos de los cinco casos posibles de envoltura cerrada mínima.
- Si tuviese más de dos rectángulos verticales al base, la envoltura deberá ser cerrada.
- Si la envoltura tuviese dos partes, una de las dimensiones del rectángulo base ocupará una dimensión completa del rectángulo total y no podrán existir rectángulos verticales al base en la envoltura.
- Si una parte de la envoltura incluye un rectángulo que exige un lado completo, éste será el único rectángulo de dicha parte.
- Si la envoltura tuviese dos partes, los rectángulos situados a uno y otro lado del base no pueden tener contacto. En consecuencia, si se suprimiese el vértice base, junto con todas las aristas que concurren en él, el grafo quedaría dividido en dos subgrafos separados.
- Si un rectángulo ocupase un extremo completo, esto es, un lado completo del rectángulo total, y estuviese envuelto por un solo rectángulo, su vértice asociado en el grafo sería de grado 1. Ésta es la única realización que admite un vértice de grado 1, por lo que no podrán existir más de dos vértices de este tipo en el grafo. En la Figura 5 puede verse una partición con dos rectángulos extremos y su correspondiente grafo, una realización de un vértice de grado 1 y el otro no. Éste último admite otras realizaciones, pero no así el primero.
- El rectángulo adyacente a una realización de un vértice de grado 1 ha de ocupar una dimensión completa del rectángulo total.

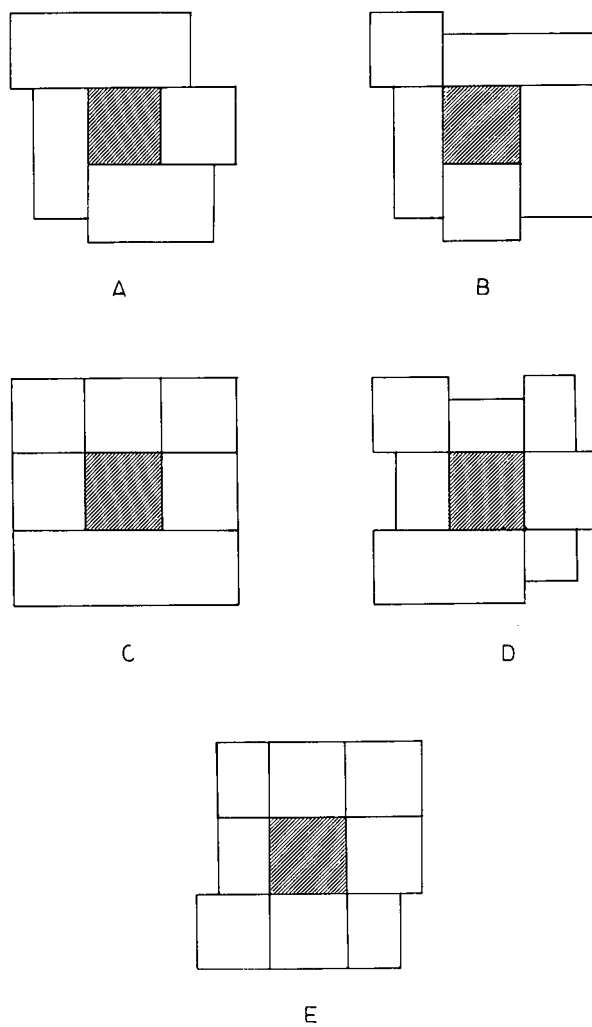


Figura 4

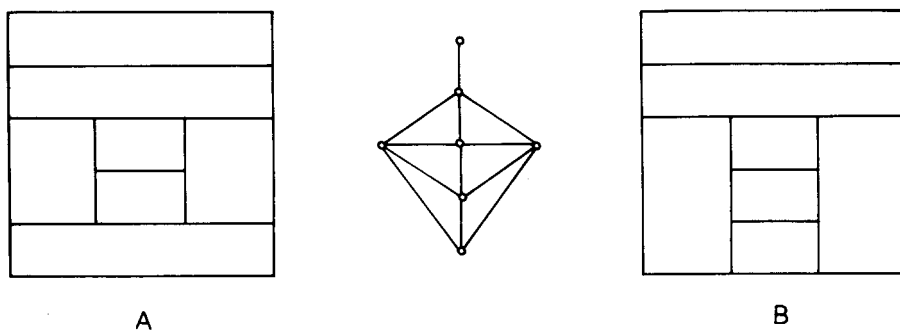


Figura 5

Veamos cómo puede construirse la envoltura de un rectángulo base cualquiera a partir de la descripción del grafo. Para ello se utilizará como ejemplo el grafo de la Figura 6, en la que se estudiará la envoltura del vértice 1.

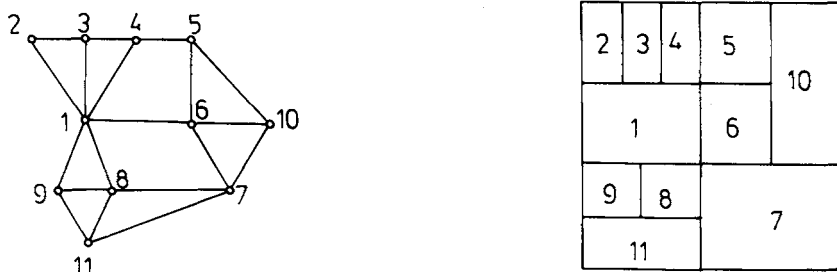


Figura 6

- Formarán parte de ella todos los vértices adyacentes al de base. En el ejemplo, los vértices 2, 3, 4, 6, 8 y 9.
- Comprobar que pueden agruparse en conjuntos de vértices consecutivos, cada uno de ellos con uno o más vértices unidos a lo sumo a otros dos vértices del mismo conjunto. En caso contrario el grafo no sería realizable. Tampoco lo sería, si hubiese más de cuatro de dichos conjuntos. En el ejemplo hay tres grupos formados por los vértices 2, 3 y 4 el primero, por el 6 el segundo y por los 8 y 9 el tercero.
- Si hubiese un solo conjunto y todos sus vértices estuviesen conectados a otros dos, formarían un ciclo que debería ser de longitud 4 o mayor para que el grafo pudiese ser realizable.

Para detectar la existencia de rectángulos verticales al de base se comprobará, si existen vértices adyacentes simultáneamente (distintos del de base) a los vértices extremos de dos de dichos conjuntos. Los vértices extremos estarán conectados a uno o ningún otro vértice del mismo conjunto, según que el mismo conste de dos o más vértices o sólo de uno. En el ejemplo los extremos son los vértices 2 y 4, el 6 y los 8 y 9; los verticales al 1 son el 5 que conecta el 4 y el 6 y el 7 que conecta el 6 y el 8.

- Si existiese un solo vértice común a dos extremos, ambos conjuntos se unirían, si fuesen distintos. En cualquier caso se incorporará el vértice vertical al conjunto.
- Al final de este proceso pueden quedar un solo conjunto abierto o cerrado formado por vértices adyacentes al de base y por vértices verticales al mismo o dos conjuntos abiertos formados sólo por vértices adyacentes al de base, para que el grafo pueda ser realizable. Quedaría así completada la envoltura.

ALGORITMO PARA LA COMPROBACIÓN DE LA REALIZABILIDAD

El algoritmo que se describe a continuación permite verificar el cumplimiento de las condiciones citadas en el apartado anterior. Realiza primero unas verificaciones globales acerca de la conectividad y del grado de los vértices y seguidamente otras locales que deben cumplirse en cada uno de los vértices. Si el grafo superase todas las verificaciones, sería realizable. El tiempo de ejecución (complejidad) de algoritmo es proporcional al cuadrado del número de vértices.

Las operaciones a realizar están simplemente indicadas, en tanto que las verificaciones se describen explícitamente, identificándolas como $V_{x.x}$.

- 1) Comprobar si el grafo es conexo.
- V1a) Un grafo no conexo no es realizable.
- 2) Contar el número de vértices de grado 1 y marcar su vértice adyacente.
- V2a) No hay más de dos vértices de grado 1.
- 3) Efectuar en cada uno de los vértices del grafo las siguientes operaciones.
 - 3.1) Considerar todos los vértices adyacentes al de base.
 - 3.2) Agruparlos en conjuntos conexos, calculando el grado local de cada vértice en dichos conjuntos, esto es, contando sólo sus conexiones con vértices del mismo conjunto.
 - V3.2a) No hay más de cuatro de dichos conjuntos.
 - V3.2b) No hay vértices con grado local mayor que 2.
 - V3.2c) Si todos los vértices de un conjunto son de grado local 2 (ciclo), debe tener cuatro o más vértices.
 - V3.2d) Si un conjunto es un ciclo, no puede haber otros conjuntos.
 - V3.2e) Si el vértice base fuese adyacente a otro de grado 1, no puede haber más de un conjunto además del que contiene el vértice de grado 1 citado.
 - V3.2f) En el caso anterior, cuando exista un segundo conjunto, si en éste hubiese un vértice adyacente a otro de grado 1, deberá ser el único vértice del conjunto.
 - 3.3) Comprobar si existen vértices adyacentes a cada pareja de vértices extremos de los conjuntos anteriores. Corresponderían a posibles rectángulos verticales.
 - V3.3a) No puede haber más de un vértice adyacente a una misma pareja.
 - V3.3b) Si el base es adyacente a otro de grado 1, no pueden existir vértices verticales al base.
 - 3.3.1) Cada vértice vertical aumenta en 1 el grado local de los vértices que conecta y su grado local es 2. Si los vértices conectados perteneciesen a conjuntos distintos, éstos se unirían en uno solo.
 - 3.4) Anotar el número de partes de su envoltura y para cada una de ellas el número de vértices. Para cada vértice, su grado local, si son o no verticales al base o si requieren una dimensión completa.
 - V3.4a) La envoltura sólo puede tener una o dos partes.
 - V3.4b) Si tiene dos partes, no puede tener rectángulos verticales al base.

- V3.4c) Si tuviese más de dos rectángulos verticales al base, la envoltura ha de ser cerrada.
- V3.4d) Si la envoltura tiene una parte cíclica (todos sus vértices de grado local 2), es única y tiene al menos tantos vértices como rectángulos verticales al base más cuatro.
- V3.4e) Si el vértice base exige una dimensión completa, cada parte de su envoltura no contiene más de un vértice que también lo exija. Si lo tuviese, sería el único vértice de dicha parte.
- V3.4f) Los vértices tienen un grado local menor que 3.
 - 3.5) Si la envoltura tuviese una sola parte, continuar en tres hasta verificar todos los vértices.
 - 3.5.1) Si tuviese dos partes, anotar como pertenecientes a cada parte los vértices conectados con vértices de la misma mediante caminos que no pasen por el vértice base.
- V3.5.1a) Ningún vértice pertenece a ambas partes.
 - 3.5.2) Volver a 3, hasta que se verifiquen todos los vértices.

EJEMPLOS DE GRAFOS NO REALIZABLES

Se presentan aquí varios ejemplos de grafos no realizables, indicando cuál es la razón de esta circunstancia y cuál de las verificaciones del algoritmo la detectaría. En primer lugar, puesto que no pueden existir más de dos vértices de grado 1, no serán realizables los árboles que consten de más de una rama, esto es, que tengan algún vértice de grado mayor que 2, como es el caso de la Figura 7A. Por idéntica razón, no es realizable el grafo 7B. Ambos casos son detectados en V2a. El grafo 7C no es realizable por haber más de cuatro conjuntos de vértices adyacentes al de la base, condición detectada por V3.2a. En el grafo 7D hay un vértice de grado local 3 en el conjunto de vértices adyacentes al de base, detectado en V3.2b.

El grafo completo de orden 4 (K_4) no es realizable (Figura 7E), pues sus vértices están rodeados por ciclos de longitud 3. Tampoco lo serán los grafos completos de orden mayor que 4, pues todos contienen a éste. Esta condición es detectada por V3.2c.

El grafo 7F tiene dos conjuntos de vértices adyacentes al de base, uno de ellos formando un ciclo, detectado por V3.2d. En los grafos 7G y 7H en un vértice adyacente a otro de grado 1 hay más de dos conjuntos independientes de vértices adyacentes al de base, detectado por V3.2e. En el grafo 7I dos vértices adyacentes a otros de grado 1 son adyacentes al de base y entre sí, pero no únicos, lo cual detecta V3.2f.

Los ejemplos siguientes muestran casos en los que la no realizabilidad del grafo se detecta al considerar los rectángulos verticales respecto al de base. En el grafo 8A hay dos vértices simultáneamente adyacentes a la misma pareja de vértices extremos, lo que es detectado por V3.3a. En el grafo 8B hay un vértice vertical al de base en la envoltura de uno adyacente a otro de grado 1 detectado en V.3.3b. El grafo 8C, que tenía inicialmente cuatro conjuntos de vértices adyacentes al de base, tiene finalmente tres al fusionarse dos de ellos por vértices verticales al de base, lo que es detectado

en V.3.4a. En el grafo 8D una de las dos partes de la envoltura contiene un vértice vertical al de base, detectado en V3.4b. El grafo 8E tiene una envoltura abierta con tres vértices verticales al de base, detectable con V3.4c. El grafo 8F tiene una envoltura cerrada con un número insuficiente de vértices, detectado por V3.4d. En el grafo 8G el vértice adyacente al de grado 1 tiene en la otra parte de su envoltura un vértice que exige una dimensión completa junto con otro vértice, lo que es detectado por V3.4e. En el grafo 8H, al unir los conjuntos iniciales con vértices verticales al de base, hay vértices de grado mayor que 2 en la envoltura, detectado por V3.4f.

Veamos, por último, otro tipo de causa de no realizabilidad. En el grafo 8I la envoltura de cada vértice tiene dos partes, pero al suprimirlo el grafo no queda dividido en dos partes inconexas. Esta circunstancia es detectada por V3.5.1a; en consecuencia, el grafo no puede contener ciclos mínimos de longitud mayor que 4.

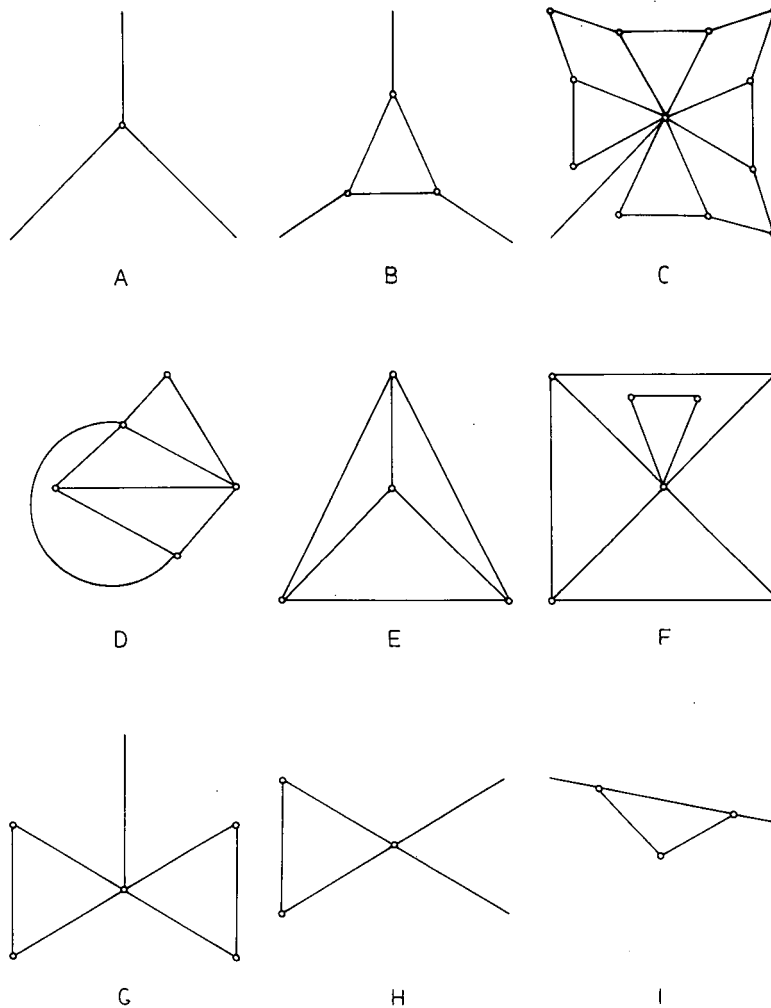


Figura 7

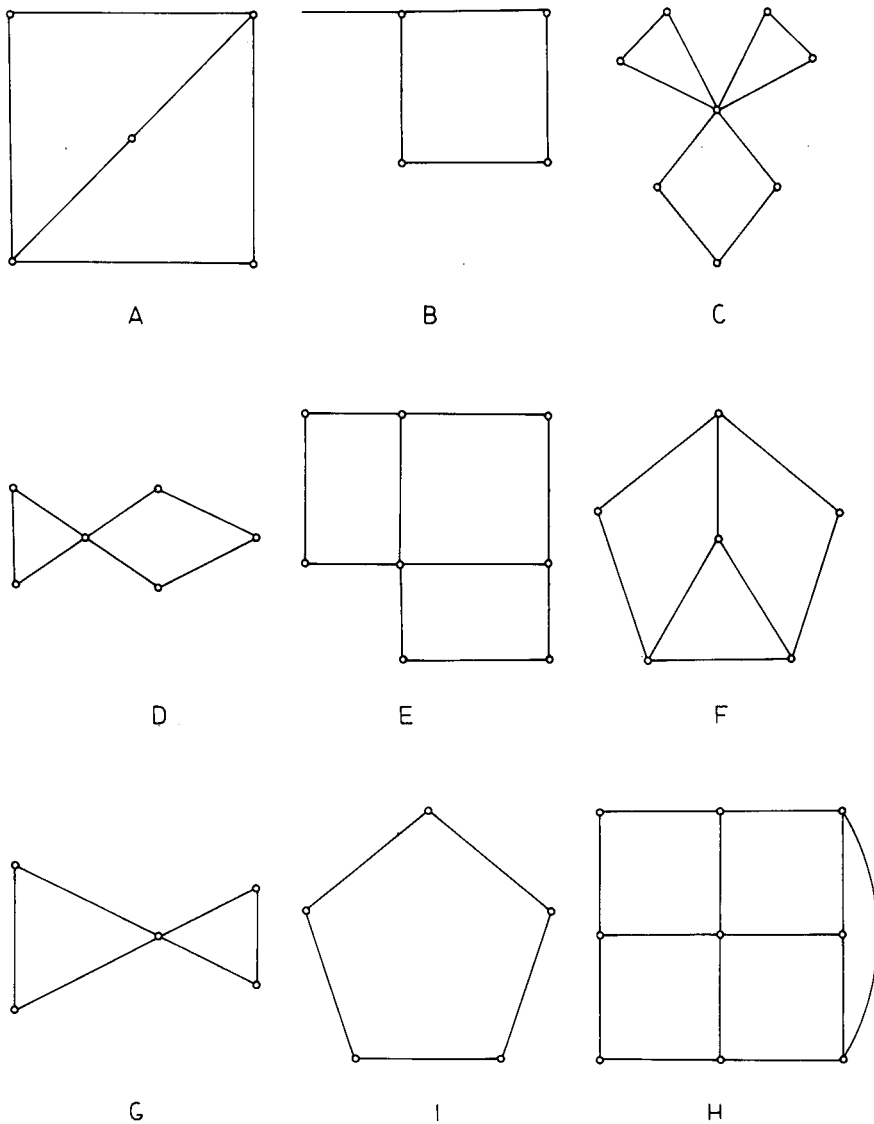


Figura 8

Todos los grafos mostrados en los ejemplos son planos. Evidentemente un grafo no plano no es realizable. Por aplicación del teorema de Kuratowski, la condición necesaria y suficiente para que un grafo no sea plano es que contenga alguno de los grafos de la Figura 9, que son los grafos $K_{3,3}$ y K_5 respectivamente. El algoritmo detecta la existencia de ambos. El caso de $K_{3,3}$ puede ser detectado por V3.2d o por la V3.4f, dependiendo del orden en que se tomen los arcos del grafo. En los ejemplos anteriores ya se vio que cualquier grafo completo de orden 4 o mayor no es realizable.

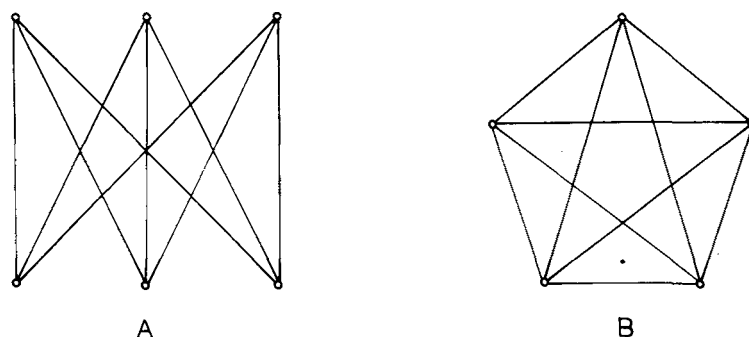


Figura 9

REALIZACIONES DEL GRAFO

Como ya se ha visto, si un grafo es realizable, pueden existir numerosas realizaciones del mismo. Hasta el momento no se conoce el modo de saber cuántas realizaciones son posibles, ni la forma de generarlas automáticamente. Para abordar el problema, se tratará primero de simplificar los grafos en estudio, fragmentándolos en subgrafos que no incluyan rectángulos que hayan de cubrir necesariamente una dimensión completa del rectángulo total.

Si el grafo contiene rectángulos que exijan una dimensión completa, éstos pueden ser eliminados, imponiendo a sus rectángulos adyacentes la condición de cubrir entre todos una dimensión completa. De este modo, cualquier grafo realizable puede reducirse a uno o varios grafos, todos ellos con más de tres vértices también realizables sin rectángulos que exijan una dimensión completa.

Los rectángulos pueden clasificarse en interiores y exteriores. Serán aquellos rectángulos en los que necesariamente al menos uno de sus lados forma parte del contorno exterior. Serán interiores aquellos que han de estar necesariamente rodeados por otros rectángulos en sus cuatro lados. La envoltura de cada rectángulo permite establecer fácilmente esta división: serán exteriores los rectángulos con envoltura abierta e interiores los rectángulos con envoltura cerrada.

Los rectángulos exteriores pueden ordenarse formando una secuencia (ciclo hamiltoniano) de rectángulos consecutivos. Si alguno de ellos fuese de grado 2, será necesariamente un rectángulo de esquina. Así, en el ejemplo de la Figura 10 son exteriores los rectángulos 1, 2, 3, 8, 9 y 10. El rectángulo 8 es necesariamente de esquina y los 1 y 9 han de ser adyacentes a él, cubriendo los otros dos lados del rectángulo 8. El orden en que deben estar los rectángulos exteriores es 1, 8, 9, 10, 3 y 2. Cualquier distribución que cubra los cuatro lados del rectángulo total, con 8 en una esquina, será válida. La Figura 11 muestra un conjunto de estas soluciones.

Los rectángulos interiores se irán situando sucesivamente. Se denominará capa interna al conjunto de rectángulos ya colocados que tengan todavía conexiones pendientes de ser satisfechas, esto es, con rectángulos sin colocar. Se considerará entonces el conjunto de rectángulos adyacentes a los de la capa interna, eliminando

aquellos que sean adyacentes a rectángulos no consecutivos de ésta. Se tomará como siguiente el que satisfaga mayor número de conexiones pendientes con la capa interna y se repetirá el proceso hasta colocar todos los rectángulos.

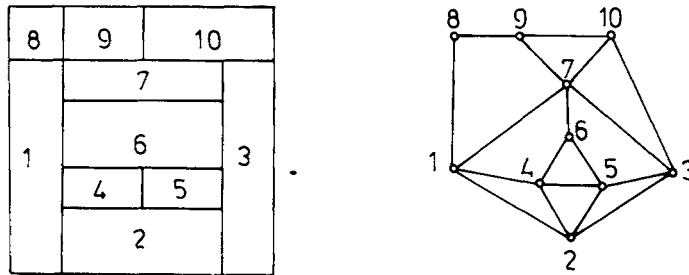


Figura 10

Todo esto permite determinar un orden de consideración de los vértices del grafo que dependerá del orden en que se tomen los rectángulos, en los casos en que hubiese más de uno que satisficiera igual número de conexiones. En el ejemplo de la Figura 10, la primera capa interna estará formada por los rectángulos 1, 9, 10, 3, 2 y de nuevo el 1. Los rectángulos adyacentes son los 4, 5, 6 y 7, pero se excluye el 6 por conectarse con rectángulos no consecutivos. Se tomará el 7 que satura tres conexiones. La nueva capa interna estará formada por 1, 7, 3 y 2. Se tomarán sucesivamente los rectángulos 6, 4 y 5.

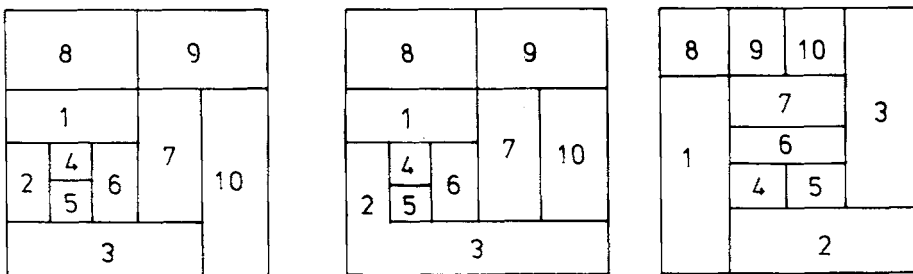


Figura 11

El paso siguiente será el establecer una posición relativa válida entre los distintos rectángulos, para lo cual se hará uso del esqueleto de la partición.

ESQUELETO DE PARTICIÓN

Se denomina esqueleto de una partición al grafo cuyos vértices son todos los vértices de los rectángulos y cuyas aristas son los segmentos de los lados entre cada dos vértices consecutivos. La propia partición es una representación del esqueleto.

El número de vértices del esqueleto es: $NS = 2 * N + 2 - V$, donde $N > 2$ es el número de vértices del grafo y V es el número de conjuntos de cuatro rectángulos verticales dos a dos que existen. De ellos, $NSE = NE + 4$, donde NE es el número de vértices exteriores del grafo, estarán en el contorno exterior. En consecuencia, el número de vértices del esqueleto interiores al rectángulo total será $NSI = 2 * N - NE - 2 - V$.

Así, en el grafo de la Figura 1 - ($N = 4$, $NE = 4$, $V = 0$), $NS = 10$, $NSE = 8$ y $NSI = 2$ y en el grafo de la Figura 10 - ($N = 10$, $NE = 6$, $V = 1$), $NS = 21$, $NSE = 10$ y $NSI = 11$

Para dibujar el esqueleto, de forma acorde con la partición, han de fijarse las coordenadas x e y de cada vértice. De ellas sólo $N - 1 - V$ son independientes, de las que $NE - 1 - VE$ marcarán las posiciones de los vértices situados en el contorno exterior, exceptuados los cuatro vértices de las esquinas, donde VE es el número de conjuntos de cuatro cuadros verticales dos a dos que incluyen algún rectángulo exterior.

Denominaremos *grados de libertad de la partición* (GDL) al número de coordenadas independientes de su esqueleto. Sus valores podrán fijarse atendiendo a condiciones adicionales, tales como límites de superficie de los rectángulos, de dimensiones o relación entre ellas etc.

Sean l_{x_i} y l_{y_i} las dimensiones del rectángulo i en las direcciones x e y respectivamente. El grafo de la Figura 1 ($VE = 0$) tiene 3 GDL, por ejemplo l_{x_1} , l_{y_1} y l_{y_2} , todos ellos ligados a vértices exteriores. El de la Figura 10 tiene 8 GDL, 4 ligados a vértices exteriores, por ejemplo l_{x_1} , l_{y_1} , l_{x_2} y l_{y_9} y 4 a interiores, por ejemplo l_{y_2} , l_{x_4} , l_{y_4} y l_{y_6} .

Estos GDL pueden tomar valores positivos dentro de unos rangos definidos. Si suponemos que las dimensiones del rectángulo total son la unidad, en los ejemplos citados tendremos que:

$l_{x_1} < 1$, $l_{y_1} < l_{y_2} < 1$ en el grafo de la Figura 1 y que:

$l_{x_1} + l_{x_2} < 1$, $l_{y_1} < 1$, $l_{y_2} + l_{y_4} + l_{y_6} < l_{y_1}$, $l_{x_1} + l_{x_9} < 1$, $l_{x_4} < l_{x_2}$ en el grafo de la Figura 10.

Ésta selección de los GDL no es única. El problema que se plantea es seleccionar los GDL del esqueleto de la realización elegida, expresar las coordenadas de todos sus vértices en función de ellos y establecer las ecuaciones o inecuaciones que resulten de imponer las condiciones topológicas a cumplir. Las condiciones adicionales (de carácter dimensional, funcional etc.) introducirán nuevas limitaciones, debiendo tratar de cumplir todas ellas empleando criterios heurísticos o de otro tipo.

POSICIONES RELATIVAS DE LOS RECTÁNGULOS

Para estudiar las posibles posiciones relativas entre los distintos rectángulos, en primer lugar se analizarán los vértices del grafo correspondientes a rectángulos externos. Primero, se ordenarán de forma consecutiva, formando un ciclo hamiltoniano.

Entre los rectángulos externos pueden distinguirse tres clases:

Clase A Vértice externo de grado 2, vertical a otro. Ocupa necesariamente una sola esquina del rectángulo total, pues ha de tener dos rectángulos exteriores adyacentes cubriendo exactamente dos de sus lados contiguos. Su dimensión l_x coincide con la del rectángulo adyacente verticalmente y la l_y con la del adyacente horizontalmente (Figura 12A).

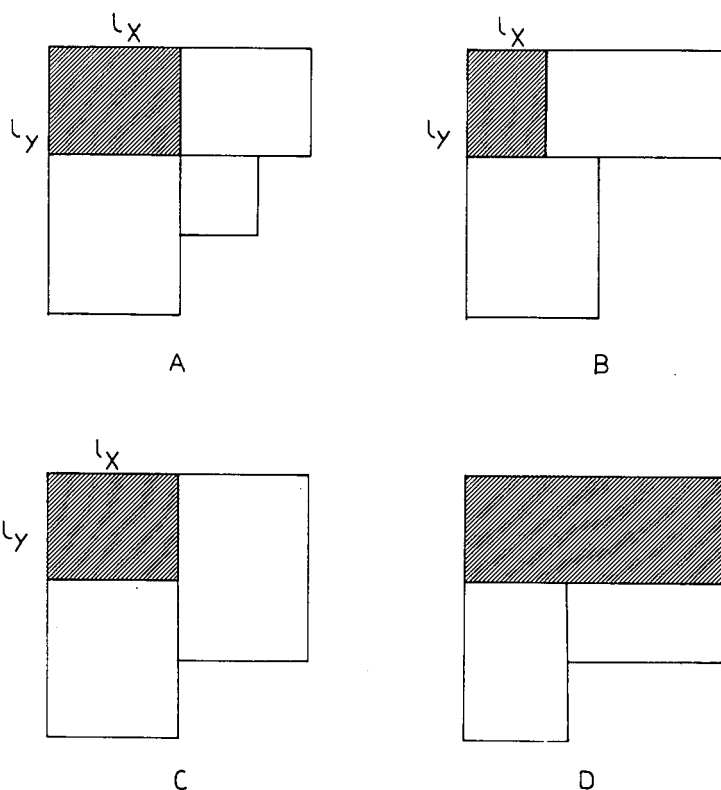


Figura 12

Clase B Vértice externo de grado 2, no vertical a otros. Puede ocupar una o dos esquinas contiguas del rectángulo total. Los dos rectángulos adyacentes a él han de estar en contacto. Si ocupa una sola esquina, bien la dimensión l_x del rectángulo adyacente verticalmente y la l_y del adyacente horizontalmente han de coincidir con la correspondiente del de esquina, en tanto que la otra dimensión del otro rectángulo

adyacente ha de ser mayor que la misma del de esquina (Figura 12B y 12C). Si ocupase dos esquinas, los dos rectángulos adyacentes deben cubrir una dimensión completa. (Figura 12D).

Clase C Vértice externo de grado mayor que 2. Puede ocupar una o dos esquinas del rectángulo total o una posición entre esquinas. (Figura 13).

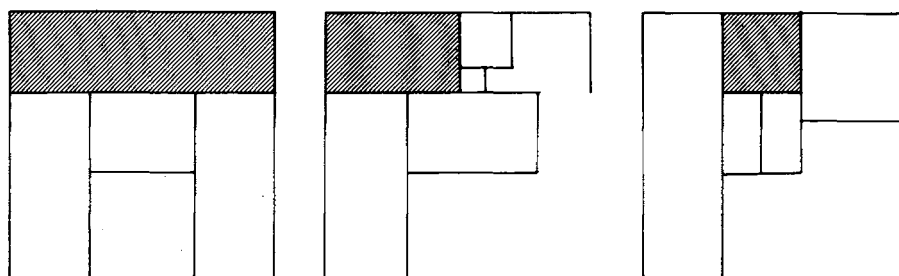


Figura 13

Si en la capa externa hubiese dos vértices de la clase A consecutivos, entre ambos cubrirían un rectángulo con una dimensión total completa (Figura 14A), por lo que se podría pasar a un grafo más sencillo, eliminando ambos vértices y obligando a que todos los vértices adyacentes a los eliminados cubran una dimensión completa.

Sólo puede haber dos vértices de la clase B juntos en el grafo K_3 , pues ambos serían adyacentes a uno que exigiría una dimensión completa, por lo que habría dado lugar a subgrafos separables (Figura 14b). Por otra parte, un vértice de la clase A no puede ser adyacente a uno de la clase B. En consecuencia, si existiesen vértices de las clases A o B, estarán flanqueados por vértices de la clase C.

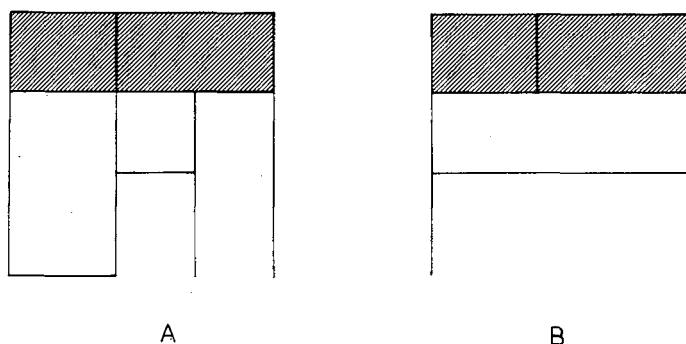


Figura 14

Si dos rectángulos externos no consecutivos fuesen adyacentes, deberán estar en contacto con lados distintos del rectángulo total (Figura 15).

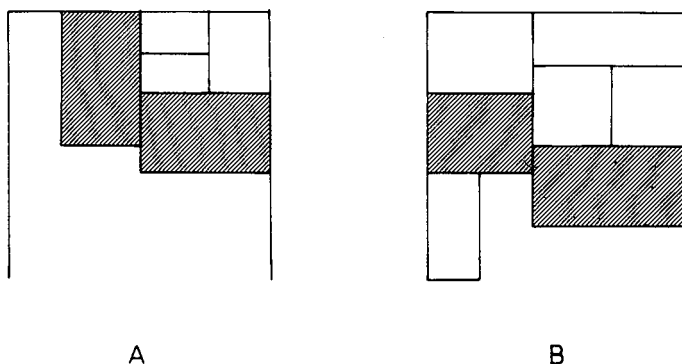


Figura 15

Si un conjunto de rectángulos debe cubrir una dimensión completa, los extremos ocuparán al menos una esquina de dicho lado.

En general existirán varias configuraciones de rectángulos externos, cubriendo los cuatro lados del total que respeten las reglas anteriores. Podemos describir los rectángulos exteriores mediante los lados del rectángulo total con los que tiene contacto. Si numeramos de forma consecutiva los lados del rectángulo total, llamando 1 al lado izquierdo y numerando los otros lados en sentido horario, en el caso de la Figura 10, los rectángulos exteriores serían: 1 - 2 el 8, 2 el 9, 2 - 3 el 10, 3 - 4 el 3, 4 el 2 y 4 - 1 el 1.

Dado un rectángulo cualquiera, los rectángulos de su envoltura pueden tener contacto con él arriba, abajo, a la derecha, a la izquierda o en una de sus cuatro esquinas. Si llamamos l , u , r y d a los lados izquierdo, arriba, derecho y abajo de un rectángulo y con las dos letras correspondientes a las esquinas, podemos describir las posiciones relativas entre ellos.

Vamos a considerar primero los cuadros externos y las conexiones entre ellos. En el ejemplo de la Figura 10 tendremos:

rect 1: u 8; ur 9; r 2.
 rect 2: l 1; lu 1; ur 3; r 3.
 rect 3: l 2; lu 10; u 10.
 rect 10: l 9; d 3.
 rect 9: l 8; r 10; dl 1.
 rect 8: r 9; d 1.

Seguidamente se analiza la envoltura de cada uno de los rectángulos externos empezando a situar rectángulos internos. Al considerar la envoltura del rectángulo 1, los 7, 6 y 4 deben estar a la derecha y colocados de arriba a abajo. Esto se deduce al considerar su orden en la envoltura que 9 ocupa la esquina superior derecha (ur) y que 2 ocupa la derecha (r). Esto nos permite además fijar posiciones entre los rectángulos de la envoltura. Así añadiremos:

rect 8: ld 7.
 rect 9: d 7.
 rect 7: l 1; lu 8; u 9; d 6; dl 1.
 rect 6: l 1; lu 1; u 7; d 4; dl 1.
 rect 4: l 1; lu 1; u 6; d 2; dl 1.
 rect 2: u 4.

Este proceso se continúa tomando los vértices en el orden establecido anteriormente, añadiendo las nuevas informaciones relativas al rectángulo respecto a su envoltura y de los rectángulos de la envoltura entre sí.

GENERACIÓN DE TODAS LAS CONFIGURACIONES VÁLIDAS DE RECTÁNGULOS EXTERNOS

El algoritmo que se describe a continuación permite generar todas las configuraciones válidas de rectángulos externos sin simetrías ni rotaciones de la misma solución. A efectos de exposición se introducen las siguientes variables, todas ellas vectores unidimensionales enteros de NE (número de vértices externos) elementos.

LAB(I) contiene los números de los vértices ordenados en forma de ciclo hamiltoniano.

NMAX(I), NMIN(I) contienen respectivamente el número mínimo y máximo de esquinas del rectángulo total que puede tener el rectángulo I en una realización del grafo.

NACT(I) contiene las esquinas del rectángulo total que ocupa el rectángulo I en la realización en curso. La suma de todos los elementos de este valor ha de ser 4.

En primer lugar se debe asignar valores a NMIN y a NMAX. El procedimiento es como sigue.

Haciendo variar I desde 1 hasta NE:

Si LAB(I) es de clase A: $MIN(I) = 1$; $MAX(I) = 1$.
 Si LAB(I) es de clase B: $MIN(I) = 1$; $MAX(I) = 2$.
 Si LAB(I) es de clase C: $MIN(I) = 0$; $MAX(I) = 2$.

Consiste en generar todas las posibles combinaciones de los elementos de NACT, entre sus valores mínimo y máximo, de modo que su suma sea 4. El proceso de generación y control de las soluciones es como sigue. Para su descripción se utiliza la estructura del lenguaje QuickBASIC que se considera de fácil comprensión. En él se generan todas las soluciones posibles, comparándolas a medida que se crean con objeto de descartar las no válidas lo antes posible.

```

C = 0 'Número de soluciones
S = 0 'Suma de los elementos de NACT
I = 1
ASIGNAR NMIN A NACT
DO
  IF I = 1 AND NACT(I) > NMAX(I) THEN EXIT DO
  IF NACT(I) ≤ NMAX(I) THEN
    S = S + NACT(I)
    IF S > 4 THEN
      S = S - NACT(I) - NACT(I - 1)
      NACT(I) = NMINT(I)
      I = I - 1
      NACT(I) = NACT(I) + 1
    ELSE
      IF I = NE THEN
        IF S = 4 THEN
          REALIZAR LAS VERIFICACIONES ADICIONALES
          IF SOLUTION VALIDA THEN
            C = C + 1
            ESCRIBIR LA SOLUTION C
          END IF
          S = S - NACT(I) - NACT(I - 1)
          NACT(I) = NMIN(I)
          I = I - 1
          NACT(I) = NACT(I) + 1
        ELSE
          S = S - NACT(I)
          NACT(I) = NACT(I) + 1
        ENDIF
      ELSE
        I = I + 1
      END IF
    ENDIF
  ELSE
    NACT(I) = NMIN(I)
    I = I - 1
    S = S - NACT(I) + 1
    NACT(I) = NACT(I) + 1
  END IF
LOOP

```

Las verificaciones adicionales, tales como que varios rectángulos cubran una dimensión completa o que dos rectángulos estén en distintos lados del rectángulo total, deben hacerse sobre una propuesta de solución completa.

Así en el ejemplo de la Figura 1, donde los vértices 1 y 3 son de la clase B y el 2 y 4 de la clase C, las soluciones que se obtienen se muestran en la Figura 16 y su traducción en lados del rectángulo total con los que tienen parte común son:

sol 1: 1, 0, 1, 2; 1 - 2, 2, 2 - 3, 3 - 4 - 1
 sol 2: 1, 0, 2, 1; 1 - 2, 2, 2 - 3 - 4, 4 - 1
 sol 3: 1, 1, 1, 1; 1 - 2, 2 - 3, 3 - 4, 4 - 1
 sol 4: 1, 1, 2, 0; 1 - 2, 2 - 3, 3 - 4 - 1, 1
 sol 5: 1, 2, 1, 0; 1 - 2, 2 - 3 - 4, 4 - 1, 1
 sol 6: 2, 0, 1, 1; 1 - 2 - 3, 3, 3 - 4, 4 - 1
 sol 7: 2, 0, 2, 0; 1 - 2 - 3, 3, 3 - 4 - 1, 1
 sol 8: 2, 1, 1, 0; 1 - 2 - 3, 3 - 4, 4 - 1, 1

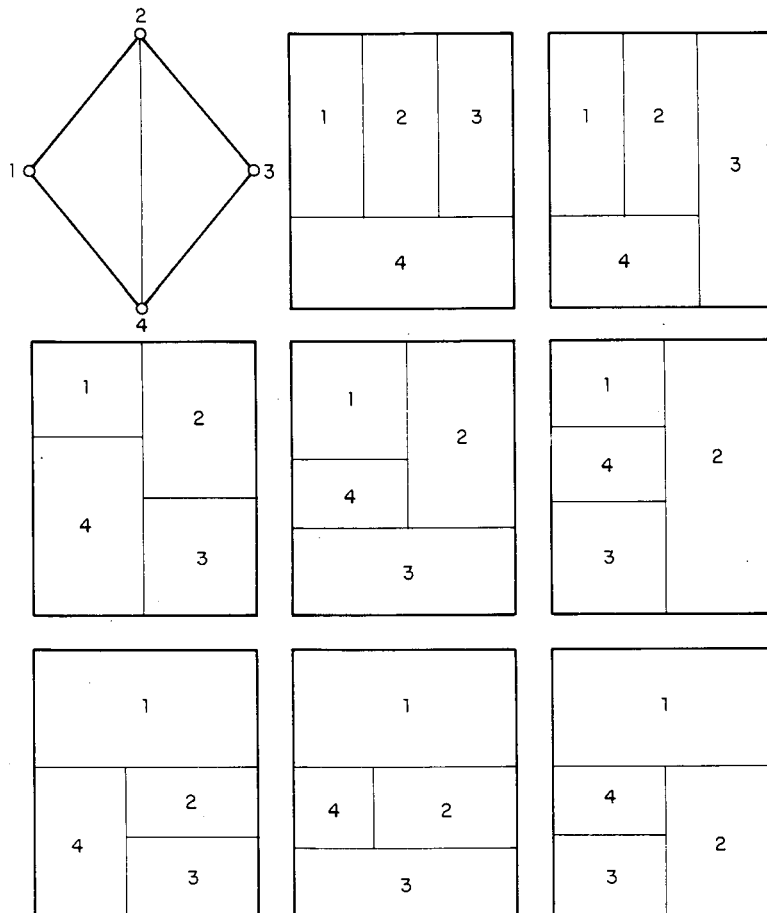


Figura 16

Todas las soluciones cumplen la condición adicional de que los rectángulos 2 y 4, en contacto y no consecutivos, estén en distinto lado del rectángulo total.

Si estableciésemos las permutaciones circulares de los cuatro lados del rectángulo total, es decir, 1 - 2 - 3 - 4, 2 - 3 - 4 - 1, 3 - 4 - 1 - 2 y 4 - 1 - 2 - 3, se multiplicaría por 4 el número de soluciones. Si además considerásemos las simétricas, es decir, 4 - 3 - 2 - 1, 1 - 4 - 3 - 2, 2 - 1 - 4 - 3 y 3 - 2 - 1 - 4, multiplicaríamos por 2 el número total de soluciones, obteniendo un total de 64 realizaciones en un caso tan simple como el planteado.

En el ejemplo de la Figura 10 el vértice 8 es de la clase A y los 9, 10, 3, 2 y 1 son de la clase C. Si no hay condiciones adicionales, el algoritmo produce 30 soluciones que se transforman en 240, si se tienen en cuenta las rotaciones y las simetrías.

SELECCIÓN DE LOS GDL DE LA PARTICIÓN

La posición y dimensiones de un rectángulo quedan determinadas como se muestra en la Figura 17 por las coordenadas de sus vértices inferior izquierdo (x_0, y_0)

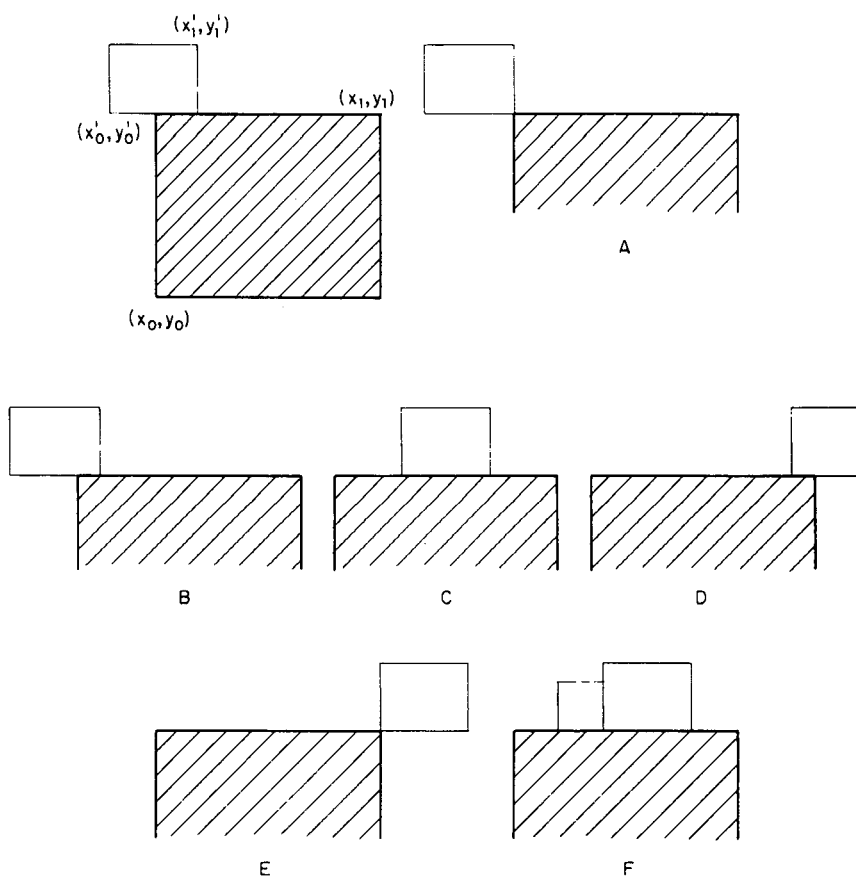


Figura 17

y superior derecho (x_1, y_1). La situación relativa de los rectángulos adyacentes y verticales condiciona los valores de algunas de las coordenadas de referencia de los mismos. Consideremos los rectángulos situados en la parte superior y llamemos (x'_0, y'_0, x'_1, y'_1) y ($x''_0, y''_0, x''_1, y''_1$) a las coordenadas de los vértices extremos de dos consecutivos:

- En cualquier caso $y'_0 = y_1$; $y'_1 > y_0$.
- Si es vertical por la esquina superior izquierda (Figura 17A), $x'_0 < x_0$; $x'_1 = x_0$.
- Si ocupa la esquina izquierda y parte superior (Figura 17B), $x'_0 < x_0$; $x'_1 > x_0$.
- Si ocupa la parte superior sin ocupar esquinas (Figura 17C), $x'_0 \geq x_0$; $x'_1 \leq x_1$. Los signos de igualdad corresponden a los rectángulos más a la izquierda y más a la derecha respectivamente.
- Si ocupa la parte superior y la esquina derecha (Figura 17D), $x'_0 < x_1$; $x'_1 > x_1$.
- Si ocupa la esquina derecha (Figura 17E), $x'_0 = x_1$; $x'_1 > x_1$.
- Si hubiese varios rectángulos superiores entre cada dos consecutivos (Figura 17F), $x''_0 = x'_1$.
- De forma análoga pueden establecerse relaciones semejantes para los otros tres lados.

Veamos ahora sobre el ejemplo de la Figura 10 cómo la aplicación de estas reglas permite introducir los parámetros que representan los GDL de la partición. Si consideramos primero el vértice 1 y su envoltura, las coordenadas definitorias de los rectángulos quedarán:

```

rect 1 (0, 0, p1, p2)
rect 8 (0, p2, p1, -)
rect 9 (p1, p2, -, -)
rect 7 (p1, p2 - p3, -, p2)
rect 6 (p1, p2 - p3 - p4, -, p2 - p3)
rect 4 (p1, p2 - p3 - p4 - p5, -, p2 - p3 - p4)
rect 2 (p1, 0, -, p2 - p3 - p4 - p5)

```

Al considerar el 8 y su envoltura, las modificaciones son:

```

rect 8 (0, p2, p1, 1)
rect 9 (p1, p2, -, 1)

```

Al considerar el 9 y su envoltura, las modificaciones que introduce son:

```

rect 9 (p1, p2, p1 + p6, 1)
rect 10 (p1 + p6, p2, -, 1)
rect 7 (p2 - p3, p1, p1 + p6 + p7, p2)

```

Al considerar el 10 y su envoltura, las modificaciones que introduce serán:

```

rect 10 (p1 + p6, p2, 1, 1)
rect 3 (-, -, 1, p2)

```

Al considerar el 3 y su envoltura, las modificaciones serán:

rect 3 ($p_1 + p_6 + p_7, 0, 1, p_2$)
 rect 2 ($p_1, 0, p_2 - p_3 - p_4 - p_5, p_1 + p_6 + p_7$)
 rect 5 ($-, p_2 - p_3 - p_4 - p_5, p_1 + p_6 + p_7, p_2 - p_3 - p_4$)
 rect 6 ($p_1, p_2 - p_3 - p_4, p_1 + p_6 + p_7, p_2 - p_3$)

Al considerar el 2 y su envoltura, las modificaciones serán:

rect 4 ($p_1, p_2 - p_3 - p_4 - p_5, p_1 + p_8, p_2 - p_3 - p_4$)
 rect 5 ($p_1 + p_8, p_2 - p_3 - p_4 - p_5, p_1 + p_6 + p_7, p_2 - p_3 - p_4$)

Se indica con un guión las coordenadas aún no fijadas, pudiendo ver en la Figura 18 el significado geométrico de los parámetros.

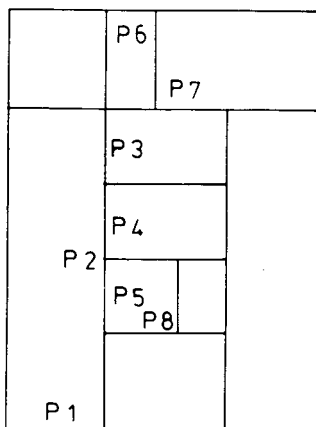


Figura 18

ESQUEMA DEL PROCESO COMPLETO

Resumiendo, el proceso completo es el siguiente:

- 1) Comprobar que el grafo es realizable.
- 2) Dividir el grafo en grafos simples y en cada uno de ellos:
 - 2.1) Clasificar los vértices en externos e internos.
 - 2.2) Ordenar los externos en un ciclo hamiltoniano y determinar la secuencia de incorporación de los internos.
 - 2.3) Hallar todas las configuraciones válidas de vértices externos y para cada una de ellas:
 - 2.3.1) Fijar las posiciones relativas entre rectángulos y elegir los parámetros representativos de los GDL de la realización.

- 2.3.2) Calcular los valores de los parámetros, atendiendo a las condiciones dimensionales, funcionales, organizativas etc.
- 2.3.3) Almacenar el resultado.
- 3) Combinar las soluciones obtenidas para cada grafo simple, obteniendo así las soluciones del grafo completo.

Este proceso deberá aplicarse a cada uno de los grafos que se obtienen al añadir al grafo formado por los vínculos obligatorios las distintas combinaciones de vínculos admisibles.

APLICACIÓN A PLANTAS NO CONVEXAS

El método puede ser utilizado con plantas no convexas, cuando todos sus lados sean paralelos a dos direcciones perpendiculares. En tal caso, el rectángulo total será el rectángulo envolvente mínimo. Deberán añadirse uno o varios rectángulos hasta completar dicho rectángulo envolvente a los que se asignarán los vértices y aristas correspondientes en el grafo a realizar. En las realizaciones que se propongan, los rectángulos correspondientes a estos vértices adicionales deberán ocupar posiciones prefijadas y posiblemente tener dimensiones fijas. En la Figura 19 se muestran dos ejemplos de plantas no convexas y sendos grupos de rectángulos adicionales en trazo discontinuo, que completan el rectángulo envolvente mínimo.

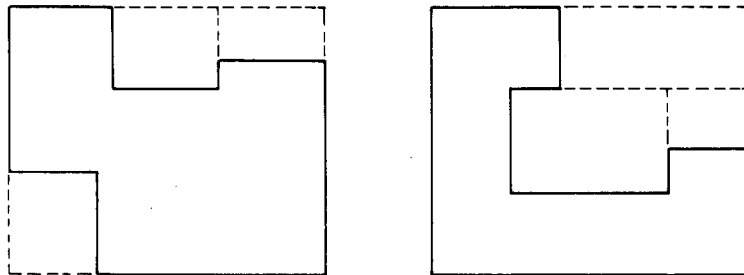


Figura 19

CONCLUSIONES

El problema de determinar si un grafo admite realizaciones en rectángulos que cubran otro rectángulo es de interés práctico en áreas, tales como el proyecto arquitectónico o la compactación de circuitos electrónicos, entre otras. Los autores no han encontrado referencias a una solución general del mismo en la bibliografía consultada.

En este trabajo se consideran los dos aspectos del problema: saber si el grafo admite este tipo de realizaciones y en caso afirmativo generar automáticamente las realizaciones del mismo.

Respecto al primero de ellos se presenta un método implementado mediante un algoritmo, que permite determinar si un grafo es realizable, que está basado fundamentalmente en el análisis de la envoltura de cada vértice. El grado de complejidad del algoritmo es el número de vértices al cuadrado.

En el caso en que el grafo fuese realizable se analizan las condiciones que han de cumplir los rectángulos externos de forma que puedan generarse disposiciones válidas de los mismos, que servirán de base a realizaciones del grafo. Se presenta un algoritmo que permite generar automáticamente todas las configuraciones válidas que pueden tomar los rectángulos externos.

Se presenta un método que permite generar realizaciones del grafo a partir de una distribución de los rectángulos externos. En dicha realización se introducen los parámetros que representan sus GDL, cuyo valor ha de fijarse atendiendo a condiciones adicionales de tipo geométrico, organizativo, funcional etc., utilizando procedimientos heurísticos, de programación lineal u otros, según el problema de que se trate.

Por último se indica la forma de aplicar el procedimiento propuesto a plantas no convexas, siempre que sus lados sean paralelos a dos direcciones perpendiculares.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado como parte del proyecto de investigación "Desarrollo, mejora e integración de sistemas CAD/CAE en construcción: Aplicación al caso de puentes pretensados", financiado por la DGICYT, PB 93/0111 en el Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja del CSIC.

REFERENCIAS

1. P. Ungar, "On Diagrams Representing Maps", *J. London Math. Soc.*, Vol. **28**, pp. 336-342, (1953).
2. P.H. Levin, "Use of Graphs to Decide Optimum Layout of Buildings", *Archit. J.*, pp. 809-817, (1966).
3. W. Mitchell, J.P. Steadman and R.S. Liggett, "Synthesis and Optimisation of Small Rectangular Floor Plans", *Environment and Planning B.*, Vol. **3**, pp. 37-70, (1976).
4. C.H. Earl and L.J. March, "Architectural Applications of Graph Theory", en "*Applications of Graph Theory*", Wilson y Beineke (eds), Academic Press, pp. 327-355, Londres, (1979).
5. J. Magiera, "Exterior Partitions of a Rectangle into Rectangles and Their Graphs", en "*Graph Theory, Lagow 1981 Proceedings*", Borowiecki et al. (eds), Springer Verlag, pp. 125-130, Berlin, (1981).
6. J. Roth y R. Hashimshony y A. Wachman, "Turning a Graph into a Rectangular Floor Plan", *Building & Environment*, Vol. **17**, pp. 163-173, (1982).
7. J.P. Steadman, "*Architectural Morphology*", Pion Ltd., Londres, (1983).

8. J. Roth y R. Hashimshony, "Algorithms in Graph Theory and Their Use for Solve Problems in Architectural Design", *Computer Aided Design*, Vol. **20**, pp. 373-381, (1988).
9. A. Schwarz, D.M. Berry y E. Shabib, "Representing and Solving the Automatic Building Design Problem", *Computer Aided Design*, Vol. **26.9**, pp. 689-698, (1994).
10. A. Schwarz, D.M. Berry y E. Shabib, "The Use of Automatic Building Design System", *Computer Aided Design*, Vol. **26.10**, pp. 747-761, (1994).
11. A. Recuero, "Aplicaciones de la teoría de grafos: Búsqueda de caminos en una red y análisis de su conectividad", *Informes de la Construcción*, Vol. **46**, 433, pp. 33-45, (1994).
12. A. Recuero, O. Río "Aplicación de la teoría de grafos a la planificación y programación de proyectos", *Informes de la Construcción*, Vol. **46**, 431, pp. 49-60, (1994).