

Métodos sin malla para resolver la ecuación de conducción del calor

Gloria Simonetti

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales
Universidad Nacional de San Luis
Chacabuco y Pedernera, 5700 San Luis, Argentina
Tel./ Fax: 54-652 26759
email: gloria@linux0.unsl.edu.ar

Alberto Cardona

Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC-INTEC)
Universidad Nacional del Litoral/Conicet
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina
Tel.: 54-342-455 91 74 , Fax: 54-342-455 09 44
email: acardona@intec.unl.edu.ar

Resumen

Se implementó un método de Galerkin libre de elementos, con un procedimiento original para la ubicación de puntos y realización de las integrales numéricas requeridas, que guarda una relación óptima entre los distintos parámetros del método. Se realizaron ejemplos con refinamiento localizado de la red de puntos en base a un indicador *a posteriori*, obteniéndose resultados apropiados de convergencia.

MESHLESS METHODS FOR THE SOLUTION OF THE HEAT CONDUCTION EQUATION

Summary

An element free Galerkin method has been implemented, with an original procedure to place points and to make the required numerical integrals, such that an optimal relation between the different method parameters is verified. Several examples with localized refinement of the points grid –based on an *a posteriori* indicator– are presented, showing appropriate convergence results.

INTRODUCCIÓN

El trabajo pionero de Nayroles *et al.*^{1,2} inició una intensa actividad de investigación en torno al uso de aproximaciones de mínimos cuadrados móviles para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con aplicación a problemas de mecánica de sólidos y fluidos.

Nayroles³ propone un método de aproximación en el que no se requiere la noción de elementos con fronteras interelementales rígidas, al cual llama *método de elementos difusos* (DEM). En éste, reemplaza la interpolación usada en elementos finitos por aproximaciones de *mínimos cuadrados móviles* (MLS)⁴. En el DEM, cada punto en el que se necesita evaluar la función o sus derivadas, puede ser considerado como el centro de una región o *elemento difuso*. Dicho elemento posee tantos grados de libertad como nodos queden dentro de esta región, llamada también *dominio de influencia*. De esta manera queda desconectado el número de nodos y el número de parámetros usados en la aproximación y sólo es necesaria la definición de nodos y una descripción de la frontera para desarrollar el método de aproximación.

En el método propuesto por Nayroles, el cálculo de las derivadas es simplificado considerando constantes los coeficientes de las aproximaciones de mínimos cuadrados usadas en la construcción de funciones de forma. Sin embargo, se ha demostrado que la formulación lograda no satisface el *test de la parcela*⁵. Belytchko⁶ presenta una implementación alternativa diferente a la de Nayroles –método de *Galerkin libre de elementos* (EFG)—que incluye todos los aportes al cálculo de las derivadas e introduce el uso de multiplicadores de Lagrange para forzar las condiciones esenciales. Propone además el cálculo de las integrales por medio de cuadraturas de alto orden, logrando una mejor precisión y satisfacer el *test de la parcela*.

Gavete *et al.*⁷ proponen un indicador a posteriori del error y agregan nodos buscando una distribución uniforme del error. R. Taylor *et al.*⁸ presentan una reseña del método de mínimos cuadrados móviles (MLS) enfatizando en la posibilidad de definir las funciones de peso de dos maneras distintas: centradas sobre los nodos o sobre el punto de evaluación. Sin embargo, hacen notar que en el segundo caso se presentan ciertas dificultades para especificar aquellas funciones.

En este trabajo usamos un esquema similar al presentado por Belytchko definiendo las funciones de peso centradas en los puntos de evaluación. Proponemos un procedimiento para la ubicación de puntos y realización de las integrales numéricas requeridas, guardando una relación óptima entre los distintos parámetros que influyen en el método. Para ello, basamos la construcción de la grilla de integración y la ubicación de los puntos en una subdivisión jerárquica del dominio siguiendo un esquema de tipo *quadtrees*. Realizamos un análisis del error para una serie de test numéricos en los que se presentan fuertes gradientes localizados, logrando resultados apropiados de convergencia. Finalmente, incorporamos un estimador del error del tipo del mencionado por Gavete para detectar las zonas en las que es necesario aumentar la cantidad de nodos y celdas de integración.

FORMULACIÓN DEL MÉTODO

Sea \tilde{u} la aproximación a una cierta función u dentro de un dominio Ω

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_i \varphi_i(\mathbf{x}) u_i \quad (1)$$

Consideremos un conjunto de nodos $\{\mathbf{x}_i\}$, y un conjunto de puntos de integración $\{\mathbf{q}_j\}$, estos últimos distribuidos en una estructura sencilla de celdas o regiones de integración en el dominio Ω . Genéricamente, llamaremos *punto de evaluación* a un punto \mathbf{x} del dominio en el que se requiera evaluar la función de forma. Este puede pertenecer, por lo tanto, a cualquiera de los conjuntos mencionados anteriormente. Llamaremos Ω_x al *dominio de influencia de \mathbf{x}* , en tanto \mathbf{x} será considerado el *centro* de Ω_x .

Sea u^ℓ la aproximación local de mínimos cuadrados móviles de la función u en Ω_x , definida en la forma siguiente

$$u^\ell(\mathbf{x}^\ell, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}^\ell) a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}^\ell) \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}^\ell \in \Omega_x$$

donde $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ es una base completa de polinomios, m la dimensión de la base usada ($m = 3$ si la aproximación es lineal, en tanto $m = 6$ en el caso cuadrático) y $p_j(\mathbf{x}^\ell)$ el monomio j -ésimo de $\mathbf{p}(\mathbf{x}^\ell)$.

Nótese que en la aproximación local móvil $u^\ell(\mathbf{x}^\ell, \mathbf{x})$ usamos un doble sistema coordenado: el primero para significar el carácter local de la aproximación en tanto que el segundo indica el punto en el que se está calculando la función aproximante (Figura 1). La función aproximante $\tilde{u}(\mathbf{x})$ será igual al valor de la aproximante local evaluada en el centro

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = u^\ell(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (2)$$

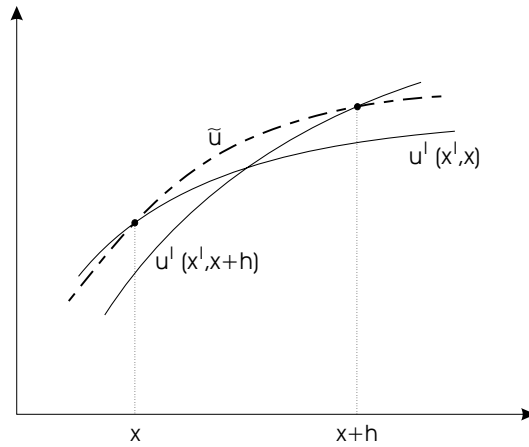


Figura 1. Evaluación de la aproximación

Los coeficientes $a_j(\mathbf{x})$ se obtienen minimizando la expresión

$$J(\mathbf{a}(\mathbf{x})) = \sum_i^n w_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i]^2 \quad (3)$$

donde n es la cantidad de nodos en Ω_x ; u_i el valor de $u(\mathbf{x}_i)$ y $w_{\mathbf{x}}$ es la función de peso asociada al punto \mathbf{x} . $J(\mathbf{a}(\mathbf{x}))$ puede ser vista como una distancia entre la aproximación local buscada y la función.

El sistema que resulta de imponer las condiciones para obtención del mínimo, puede escribirse

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (4)$$

de donde

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (5)$$

Definiendo

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \ \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \ \dots \ \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)]; \quad \mathbf{W}(\mathbf{x}) = \text{Diag}(w_1, w_2, \dots, w_n)$$

expresamos las matrices del sistema, como

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{P}^T, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{W}(\mathbf{x})$$

Nótese que $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ dependen del punto \mathbf{x} a través de la matriz diagonal de funciones de peso $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ y que la matriz \mathbf{P} es constante. Luego, puede verse que resolver el sistema (4) resulta equivalente a resolver el sistema rectangular

$$(\mathbf{W}(\mathbf{x})^{1/2}\mathbf{P}^T)\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}(\mathbf{x})^{1/2}$$

por mínimos cuadrados. Es esencial en la formulación que la matriz \mathbf{P} sea de rango completo, lo cual depende de la distribución de los puntos en Ω_x .

Volviendo a la ecuación (2), podemos reemplazar la expresión hallada para los parámetros $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ en ésta y escribir

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = u^\ell(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})}_{\Phi(\mathbf{x})} \mathbf{u} = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (6)$$

donde la matriz $\Phi(\mathbf{x})$ contiene el conjunto de funciones de forma φ_i , definidas por

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) w_i$$

cuando el nodo i -ésimo cae dentro del dominio de influencia Ω_x . La función de peso w_x es construida de manera que

$$\begin{aligned} w_x(\mathbf{x}_i) &> 0 & \text{si } \mathbf{x}_i \in \text{int}(\Omega_x) \\ w_x(\mathbf{x}_i) &= 0 & \text{si } \mathbf{x}_i \notin \text{int}(\Omega_x) \end{aligned}$$

Observamos que $\varphi_i(\mathbf{x}) = 0$ en el borde y fuera de Ω_x . Además, puede mostrarse fácilmente que la función de peso w_x determina el grado de regularidad de las funciones de forma. El gráfico de la Figura 2 muestra una función de forma típica para una distribución regular de nodos, obtenida usando como función de peso la exponencial descrita más adelante en la ecuación (7).

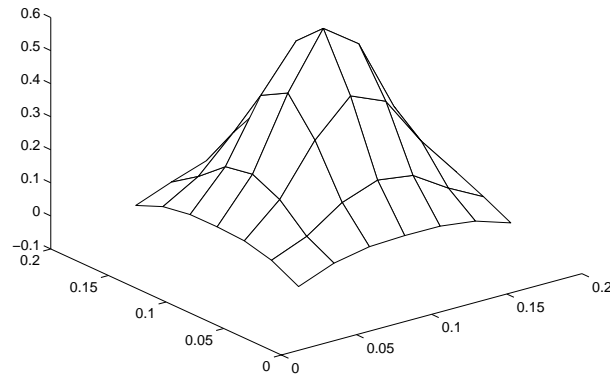


Figura 2. Función de forma típica para una función de peso exponencial

La derivada $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \varphi_{i,x}$ (de manera análoga $\varphi_{i,y}$) se obtiene por diferenciación

$$\Phi_{,x}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}_{,x}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,x}$$

Usando las identidades $\mathbf{A}_{,x}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,x} \mathbf{A}^{-1}$; $\mathbf{A}_{,x} = \mathbf{P} \mathbf{W}_{,x} \mathbf{P}^T$ y $\mathbf{B}_{,x} = \mathbf{P} \mathbf{W}_{,x}$ obtenemos

$$\Phi_{,x}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{W}_{,x} [\mathbf{I} - \mathbf{P}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}]$$

La función de peso usada en la aproximación de mínimos cuadrados juega un papel primordial. Ella es la que establece el carácter local de la aproximación. Existe una variedad de alternativas para su construcción, debiendo respetar una serie de requerimientos mínimos. Debe ser una función positiva dentro del dominio de influencia y nula en el borde y fuera del mismo. En general se usan funciones simétricas, para evitar introducir una anisotropía en el esquema. Estudios recientes muestran que se requieren funciones con continuidad al menos un orden mayor al de las derivadas presentes en el funcional.

Numerosos autores trabajan con una función exponencial de peso $w_{\mathbf{x}}$, que depende de la distancia al centro de $\Omega_{\mathbf{x}}$ y está definida de la siguiente manera

$$w_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \begin{cases} \frac{\epsilon^{(\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|/r_x)^2} - \epsilon^{(r_m/r_x)^2}}{1 - \epsilon^{(r_m/r_x)^2}} & \text{si } \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < r_m \\ 0 & \text{si } \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \geq r_m \end{cases} \quad (7)$$

El radio de influencia r_m y el parámetro de decaimiento ϵ pueden variar punto a punto, en tanto $r_x = \kappa r_m$, con $0 < \kappa < 1$. Al disminuir el radio de influencia, se incrementa el carácter local de la aproximación y en general mejora la precisión; pero se debe cuidar de no superar cierto límite para el cual la matriz \mathbf{A} se vuelve singular (o muy mal condicionada). Nótese que la función (7) es una exponencial trasladada y escalada a efectos de verificar la continuidad de la función en los puntos del borde. En la práctica hemos obtenido resultados de calidad similar usando simplemente

$$w_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \begin{cases} \epsilon^{(\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|/r_x)^2} & \text{si } \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < r_m \\ 0 & \text{si } \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \geq r_m \end{cases}$$

APLICACIÓN A LA ECUACIÓN DEL CALOR

La *formulación variacional* de la ecuación de transmisión del calor en un dominio Ω de frontera Γ se escribe

Hallar $u \in H^1(\Omega)$, $\lambda \in H^0(\Gamma_u)$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \delta u \cdot \nabla u \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta u \, f \, d\Omega - \int_{\Gamma_g} \delta u \, \bar{g} \, d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda \, (u - \bar{u}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta u \, \lambda \, d\Gamma = 0 \quad \forall \delta u \in H^1(\Omega), \\ & \delta \lambda \in H^0(\Gamma_u) \end{aligned} \quad (8)$$

Los multiplicadores de Lagrange son usados para imponer las condiciones de borde esenciales. Resolvemos este problema en forma discreta. Para ello construimos los campos u y δu usando las funciones de interpolación obtenidas por mínimos cuadrados móviles

$$u(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u}; \quad \delta u(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}$$

sobre el interior del dominio Ω , en tanto que sobre la porción de frontera Γ_u aproximaremos λ y $\delta\lambda$ en la forma

$$\lambda(s) = \mathbf{N}(s) \lambda; \quad \delta\lambda(s) = \mathbf{N}(s) \delta\lambda$$

donde $\mathbf{N}(s)$ es un conjunto de funciones de interpolación de Lagrange apropiadas y s la longitud de arco a lo largo de la frontera Γ_u . Las integrales sobre el interior del dominio Ω y sobre la frontera se realizarán en forma numérica, usando cuadraturas de Gauss. La formulación (8) conduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

donde las matrices están definidas por

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega} \nabla \Phi^T \nabla \Phi \, d\Omega; & \mathbf{G} &= - \int_{\Gamma_u} \Phi^T \mathbf{N} \, d\Gamma \\ \mathbf{f} &= \int_{\Omega} \Phi^T f \, d\Omega + \int_{\Gamma_g} \Phi^T \bar{g} \, d\Gamma; & \mathbf{b} &= - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \bar{u} \, d\Gamma \end{aligned}$$

Hallados los valores de los coeficientes \mathbf{u} , obtenemos la solución usando $u(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u}$.

SUBDIVISIÓN JERÁRQUICA DEL DOMINIO

Para realizar el análisis, debemos generar:

- un conjunto de nodos, en donde expresaremos las incógnitas del problema;
- un conjunto de celdas de integración, de las que nos valdremos para realizar las integrales expresadas en la sección anterior.

La distribución de los puntos y las celdas en el dominio puede ajustarse para seguir las variaciones del campo incógnita, tratando de mejorar la aproximación en zonas en donde se presenten fuertes gradientes en la solución mediante el aumento de densidad de puntos. Para que el proceso sea efectivo, este aumento en la densidad de los nodos *debe ir acompañado de una mejora en la calidad de la integración numérica*. Además se deben ajustar apropiadamente los parámetros que regulan la forma de las funciones de peso. Se ha observado experimentalmente que las variaciones de densidad de nodos deben ser graduales, por cuanto cambios bruscos deterioran fuertemente la calidad de la aproximación.

El esquema que seguimos para obtener una distribución apropiada de nodos y celdas, consiste en dividir el dominio en forma recursiva, siguiendo una estructura de tipo *quadtrees* (Figura 3). Las integrales se resuelven mediante la regla de integración de Gauss-Legendre, utilizando en todos los casos 2×2 puntos de integración por celda. Los nodos se ubican en los vértices de las celdas, las cuales constituyen al mismo tiempo las celdas de integración para la cuadratura de Gauss. El tamaño de las celdas se define a través de una función $h_{opt}(\mathbf{x})$ de forma tal que

$$h_{celda} \leq \min_{\mathbf{x} \in celda} h_{opt}(\mathbf{x})$$

Por su parte, el radio de influencia r_m se determina en forma similar, haciendolo depender de la función h_{opt} en la forma $r_m = Ch_{opt}(\mathbf{x})$.

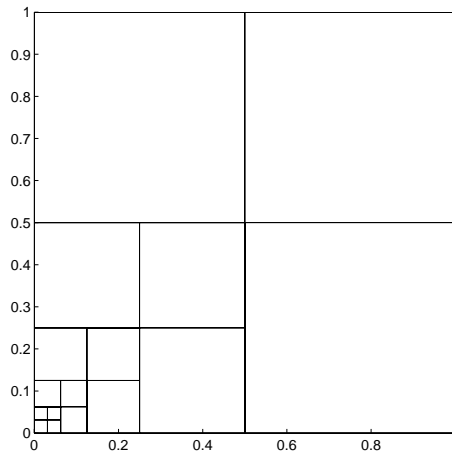


Figura 3. Subdivisión en celdas tipo *quadtree*

INDICADOR DEL ERROR

Para cada nodo \mathbf{x} usamos como indicador del error una estimación de la norma de la derivada segunda en el punto por el radio de la nube al cuadrado. Esta medida claramente es consistente con la medida de error obtenida a partir de la expansión de Taylor. Definimos

$$Er(\mathbf{x}) = \frac{r_x^2}{n_x} \sum_{\mathbf{x}_i \in \Omega_x} \frac{\|\nabla u(\mathbf{x}) - \nabla u(\mathbf{x}_i)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}$$

donde n_x es la cardinalidad de Ω_x y r_x el radio de Ω_x . Luego escalamos esta medida dividiendo por su promedio sobre el dominio

$$Ind(\mathbf{x}) = \frac{Er(\mathbf{x})}{Er_{med}}$$

donde $Er_{med} = \text{mean}_{\mathbf{x} \in \Omega}(Er(\mathbf{x}))$. Una distribución de puntos óptima será aquella que para la cual el valor del indicador así determinado se encuentra lo más próximo posible a 1.

El indicador puede vincularse a la subdivisión en celdas a través de la función $h_{opt}(\mathbf{x})$. En las pruebas realizadas partimos de una subdivisión uniforme ($h_{opt}^0(\mathbf{x}) = cte$) y la función

$$h_{opt}^k(\mathbf{x}) = \frac{h_{opt}^{k-1}(\mathbf{x})}{\sqrt{Ind^{k-1}(\mathbf{x})}} \quad (10)$$

donde k denota la iteración de refinamiento, permitió predecir adecuadamente las zonas en donde se debía proceder al refinamiento.

EJEMPLOS

Presentamos a continuación dos ejemplos sencillos de aplicación, que ilustran las particularidades del método. En todos los casos se usaron polinomios lineales para la aproximación de mínimos cuadrados móviles y funciones de interpolación de Lagrange lineales en la aproximación de las condiciones de borde. La integración de Gauss fue en todos los casos de 2×2 puntos de integración.

Ejemplo 1

El primer ejemplo numérico es un ejemplo simple de conducción de calor en el cuadrado unitario³, en el cual se toma el término fuente

$$f(x, y) = 8\pi^2 \cos(2\pi x) \sin(2\pi y)$$

y condiciones de bordes homogéneas

$$\begin{cases} u = 0 & \text{para } 0 < x < 1 & y = 0, 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{para } 0 < y < 1, & x = 0, 1 \end{cases}$$

La solución analítica del problema es $u(x, y) = \cos(2\pi x) \sin(2\pi y)$.

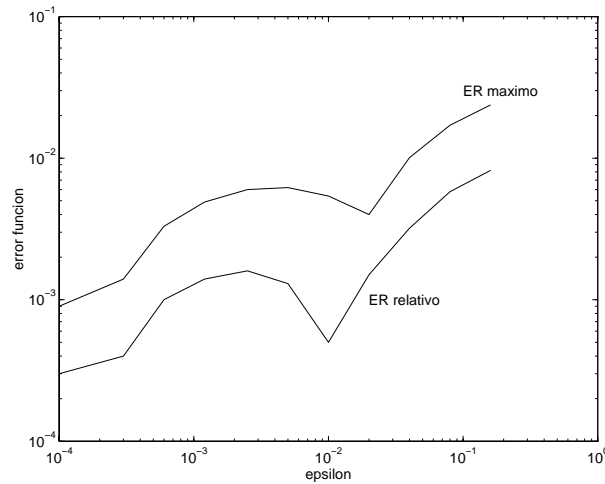


Figura 4. Error en la aproximación en función del parámetro de decaimiento

Para este ejemplo se utilizó una distribución de nodos igualmente espaciados. Primeramente, sobre una red de 17×17 nodos, analizamos el comportamiento del error en la solución aproximada para distintos valores del parámetro de decaimiento ϵ . La Figura 4 ilustra la variación de la norma del error en la aproximación a la función y a sus derivadas, en términos del parámetro de decaimiento ϵ . Se calcularon dos medidas de error: el error máximo en el dominio y una medida del error relativo, calculado por la expresión

$$e_{rel}(u) = \frac{1}{\|u\|_{\infty}} \frac{1}{Nn} \sum_{x_i} |\tilde{u} - u| \quad (11)$$

donde Nn es el número total de nodos de la discretización. Esta última medida de error fue también usada por Nayroles, quien informa para una red de puntos y parámetros de definición de la función de peso, similares a los nuestros, un error 10 veces superior al obtenido en este trabajo. En la Figura 5 vemos la variación del error en el cálculo de las derivadas de la función, también en función de variaciones del parámetro de decaimiento.

La Figuras 6 y 7 muestran la solución aproximada y las derivadas calculadas para un valor de $\epsilon = 0,01$, junto a la distribución del error en el dominio. Se puede observar que el error se concentra en las fronteras en que se impone la condición de borde de tipo Neumann. Se ve además que el indicador oscila en valores próximos a 1.

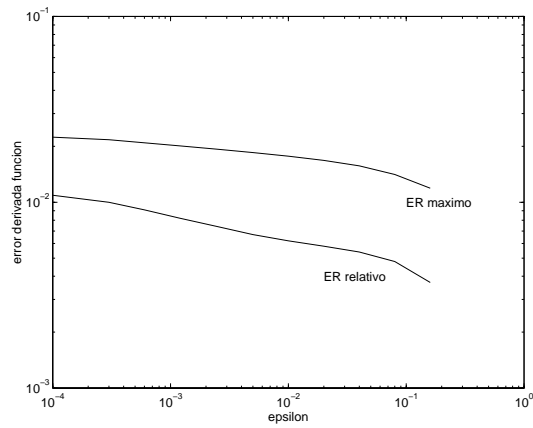


Figura 5. Error en el cálculo de las derivadas de la función en términos del parámetro de decaimiento adoptado

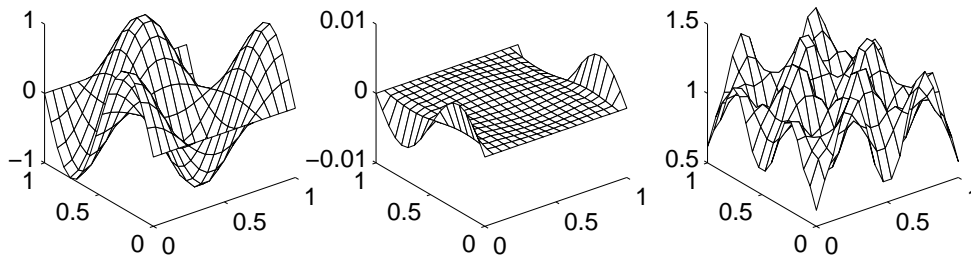


Figura 6. Gráfica de la solución aproximada (izq.) junto a la distribución del error (centro) y del indicador (der.)

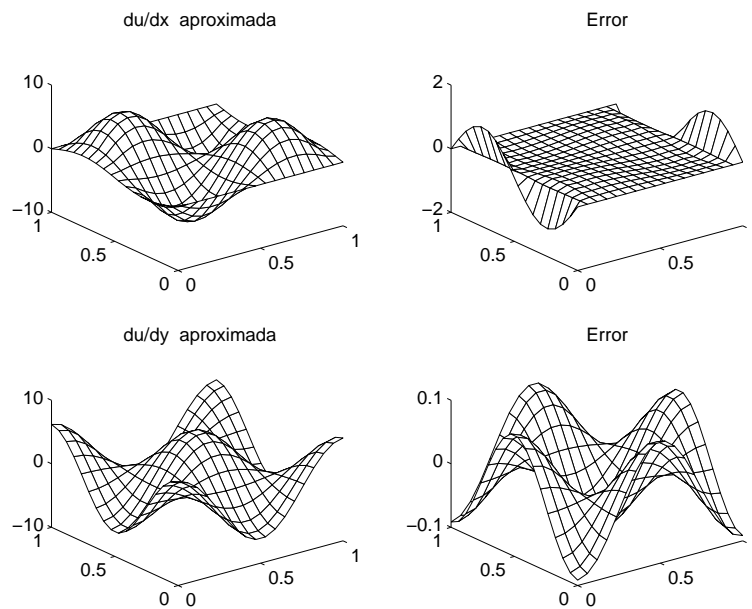


Figura 7. Gráfica de las derivadas aproximadas, junto a la distribución del error

Un aspecto importante a considerar es la cantidad de nodos que quedan dentro de la nube y que intervienen en el proceso de obtener la aproximación local $u^\ell(\mathbf{x}^\ell, \mathbf{x})$. Esta cantidad está fijada en forma indirecta por el valor del radio de influencia r_m . La Figura 8 muestra cómo disminuye el error al disminuir r_m , hasta un valor límite por debajo del cual el mal condicionamiento de la matriz \mathbf{A} hace que la precisión del cálculo se deteriore.

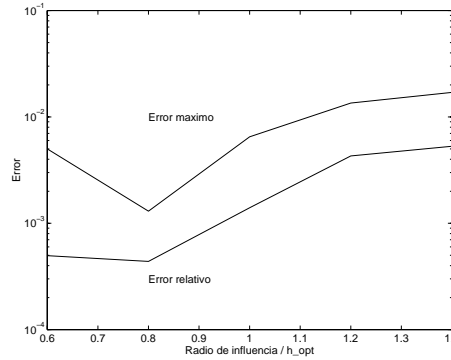


Figura 8. Variación del error con el radio de influencia

Los mejores resultados se obtuvieron con $r_m = 0,8 * h_{opt}(\mathbf{x})$, en cuyo caso entraron entre 6 y 10 nodos por nube. La Tabla I da los valores de error en la función y en las derivadas logrados para este último caso (recordamos, $\epsilon = 0,01$ y la integración numérica se hizo con 4 puntos de Gauss por celda). En el resto del análisis se usó $r_m = 0,6 * h_{opt}(\mathbf{x})$, con lo cual ingresaron aproximadamente 4 nodos por nube.

Nodos	$\ u - \tilde{u}\ _\infty$	$e_{rel}(u)$	$e_{rel}(\frac{\partial u}{\partial x})$	$e_{rel}(\frac{\partial u}{\partial y})$
17×17	0,0013	$4,377 \times 10^{-4}$	0,0139	0,003

Tabla I. Error en el cálculo de la función y sus derivadas

La tasa de convergencia en función del espaciado entre nodos para este ejemplo fue aproximadamente 2,6. La Figura 9 muestra el comportamiento del error comparado con el error para una solución lograda usando elementos finitos triangulares lineales.

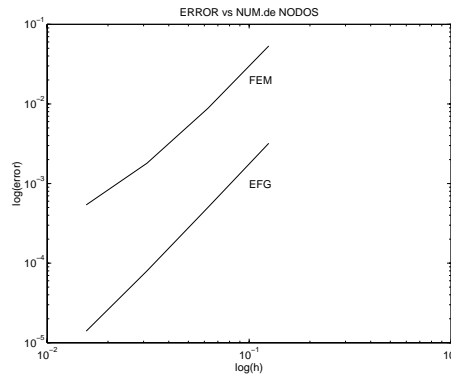


Figura 9. Evolución del error en función del espaciado entre nodos

Se estudió a continuación la sensibilidad del método frente a perturbaciones en las posiciones de los nodos respecto de la grilla de integración. La Figura 10 muestra cómo es afectado el error cuando se aplican perturbaciones aleatorias a las posiciones de los nodos. El tamaño de las perturbaciones está expresado como factor del espaciamiento entre nodos. Vemos que el esquema muestra buenas características de estabilidad, tanto para los valores calculados de la función como de sus derivadas.

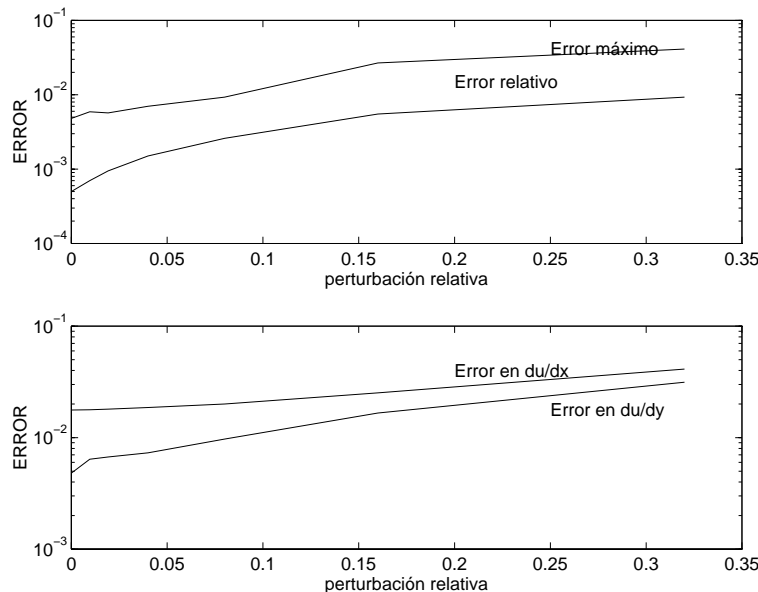


Figura 10. Variación del error al perturbar la posición de los nodos respecto del equiespaciado

Ejemplo 2

El segundo ejemplo considerado presenta un fuerte gradiente en la solución en la zona central del dominio. El dominio de definición es nuevamente el cuadrado unitario y las condiciones de borde son homogéneas

$$\begin{cases} u = 0 & \text{para } 0 < x < 1, & y = 0, 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{para } 0 < y < 1, & x = 0, 1 \end{cases}$$

El término fuente es ahora

$$f(x, y) = \left(-2ky(1-y) + (ky(1-x)(1-y) - kxy(1-y))^2 - 2kx(1-x) + (kx(1-y)(1-x) - kxy(1-x))^2 \right) \frac{e^{kxy(1-x)(1-y)}}{1 - e^{k/16}}$$

y la solución exacta del problema resulta

$$u(x, y) = \frac{1 - e^{kxy(1-x)(1-y)}}{1 - e^{k/16}}$$

La división recursiva del dominio que se ha utilizado, permite refinar las regiones que requieren mayor cantidad de nodos, ajustando la estructura de celdas de integración de manera que utilizando cuatro puntos de Gauss por celda se obtienen resultados satisfactorios.

En la Figura 11 mostramos el comportamiento del método respecto de la cantidad total de nodos tomados, para el valor del parámetro $k = 200$.

En este ejemplo, para los puntos cercanos a $(1/2, 1/2)$, al crecer el parámetro k lo hace igualmente el gradiente de la solución.

Utilizamos el indicador del error a posteriori, aumentando la cantidad de puntos en la zona en donde éste muestra valores altos y verificando la propuesta dada por la ecuación (10). Lo hemos aplicado a este ejemplo para dos valores del parámetro k ($k = 200$ y $k = 1000$).

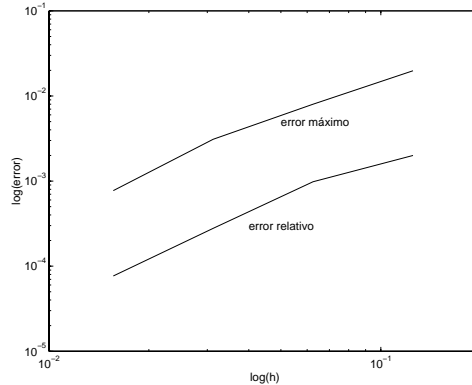


Figura 11. Variación del error de aproximación con la cantidad de nodos (para una distribución regular)

Primeramente se realizó para el caso $k = 1000$ un análisis con una distribución uniforme de puntos con espaciamiento $1/16$. Los resultados se muestran en la Figura 12, junto a la distribución del indicador de error. A partir de estos resultados, decidimos un primer nivel de refinamiento agregando nodos en la región $1/4 \leq x \leq 3/4$, $1/4 \leq y \leq 3/4$. Los resultados logrados con esta distribución de puntos se muestran en la Figura 13, junto a la nueva distribución del indicador de error. En base a ésta, decidimos un segundo nivel de refinamiento aumentando la densidad de puntos en la región $3/8 \leq x \leq 5/8$, $3/8 \leq y \leq 5/8$. En la Figura 14 mostramos la solución final hallada. Se ve además cómo el indicador de error varía tratando de llegar a una distribución uniforme

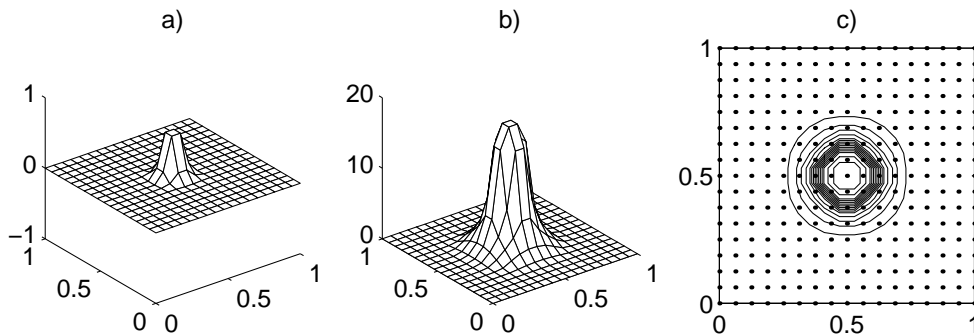


Figura 12. Solución aproximada e indicador de error (vista y planta) para una distribución regular de puntos ($k = 1000$)

La Tabla II muestra los errores obtenidos en cada caso para la función y para sus derivadas, con un total acuerdo con las predicciones del indicador a posteriori.

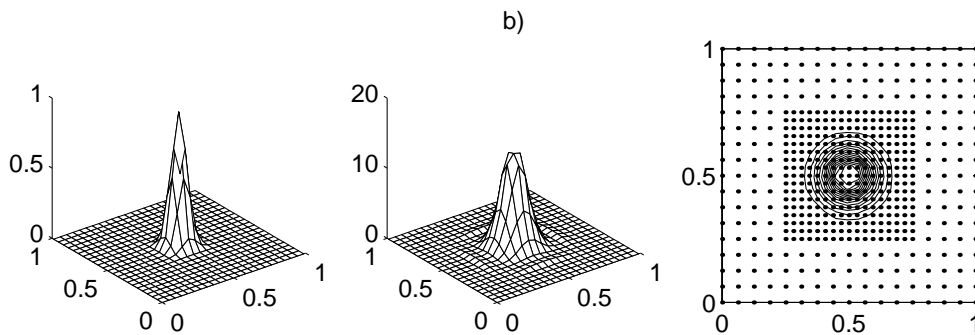


Figura 13. Solución aproximada e indicador de error (vista y planta) para el primer grado de refinamiento ($k = 1000$)

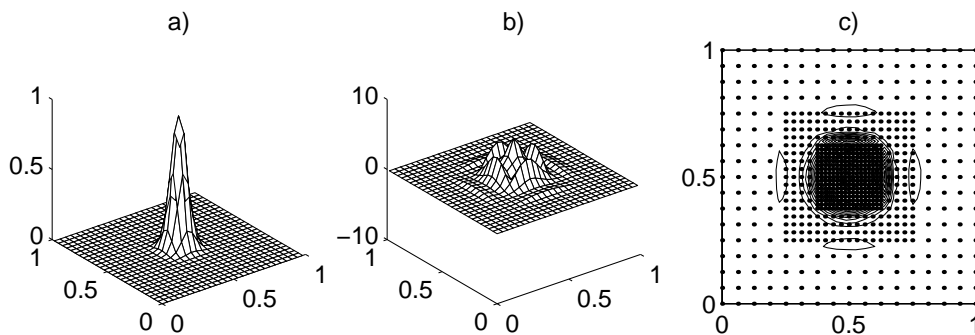


Figura 14. Solución aproximada e indicador de error (vista y planta) para el segundo grado de refinamiento ($k = 1000$)

	Error	$k = 200$	$k = 1000$
17 × 17 nodos	$e_{rel}(u)$	$9,8098 \times 10^{-4}$	$9,7882 \times 10^{-4}$
	$\ u - \tilde{u}\ _{\infty}$	0,0106	0,0134
	$e_{rel}(u_x)$	0,0084	0,0062
	$e_{rel}(u_y)$	0,0086	0,0063
Refin. 1	$e_{rel}(u)$	$5,8512 \times 10^{-4}$	$6,1578 \times 10^{-4}$
	$\ u - \tilde{u}\ _{\infty}$	0,0025	0,013
	$e_{rel}(u_x)$	0,0052	0,0053
	$e_{rel}(u_y)$	0,0052	0,0053
Refin. 2	$e_{rel}(u)$	0,001	$3,954 \times 10^{-4}$
	$\ u - \tilde{u}\ _{\infty}$	0,0030	0,003
	$e_{rel}(u_x)$	0,0039	0,0037
	$e_{rel}(u_y)$	0,0039	0,0037

Tabla II. Error en el cálculo de la función y sus derivadas para refinamientos calculados en base al indicador del caso $k = 1000$

Posteriormente se repitió el análisis para el caso $k = 200$, pero usando las distribuciones de puntos obtenidas en el análisis con $k = 1000$. Vale decir, para decidir los sucesivos niveles de refinamiento, no prestamos atención a la distribución del indicador de error obtenido, sino que directamente empleamos la ubicación de puntos utilizadas en el caso anterior. Como era de esperar, los resultados obtenidos no fueron apropiados, quedando ello reflejado en la evolución del error logrado para la función y para sus derivadas. Vemos que, si bien los

sucesivos refinamientos aumentaron fuertemente la cantidad de puntos utilizada, ello no se tradujo en una disminución del error (Tabla II).

Por último, cuando se decidió el refinamiento siguiendo las variaciones del indicador de error, los resultados obtenidos respondieron en la forma esperada. El primer cálculo realizado sobre una grilla uniforme mostró la necesidad de refinamiento en la zona $1/8 \leq x \leq 7/8$, $1/8 \leq y \leq 7/8$, en tanto en base al segundo cálculo decidimos refinar en la zona $1/4 \leq x \leq 3/4$, $1/4 \leq y \leq 3/4$. Se obtuvieron así los resultados de la Tabla III.

	Error	$k = 200$
17 × 17 nodos	$e_{rel}(u)$	$9,809 \times 10^{-4}$
	$\ u - \tilde{u}\ _\infty$	0,0106
	$e_{rel}(u_x)$	0,0084
	$e_{rel}(u_y)$	0,0086
Refin. 1	$e_{rel}(u)$	$3,739 \times 10^{-4}$
	$\ u - \tilde{u}\ _\infty$	0,0030
	$e_{rel}(u_x)$	0,0034
	$e_{rel}(u_y)$	0,0034
Refin. 2	$e_{rel}(u)$	$2,156 \times 10^{-4}$
	$\ u - \tilde{u}\ _\infty$	$5,918 \times 10^{-4}$
	$e_{rel}(u_x)$	0,0017
	$e_{rel}(u_y)$	0,0018

Tabla III. Error en el cálculo de la función y sus derivadas para refinamientos calculados en base al indicador del caso $k = 200$

CONCLUSIONES

Se implementó el método de Galerkin libre de elementos, proponiendo un procedimiento para la ubicación de puntos y realización de las integrales numéricas requeridas, en el cual se guarda una relación óptima entre los distintos parámetros que influyen en el método. Realizamos una serie de experiencias numéricas, analizando el error para diferentes juegos de parámetros que influyen en el método. Los ejemplos fueron construidos buscando forzar al método mediante la presencia de fuertes gradientes localizados en la solución.

Se lograron resultados apropiados de convergencia para las distintas situaciones ensayadas. Mediante un indicador de error se logró predecir apropiadamente las zonas del dominio en donde se requiere refinamiento para disminuir el error en la solución aproximada.

El método de Galerkin libre de elementos se mostró extremadamente sensible a la variación de parámetros en forma independiente. En efecto, las experiencias realizadas mostraron la necesidad de mantener una relación apropiada entre el radio de influencia, distancia entre nodos y la distribución de puntos para integración numérica. La propuesta seguida en este trabajo busca fijar relaciones apropiadas a respetar entre todos ellos, guardando un grado suficiente de flexibilidad y sin perder el objetivo primordial de liberar al usuario de establecer una noción de malla.

Finalmente, es de destacar que en los ensayos realizados, el error se concentró principalmente en zonas próximas a la frontera en donde se impusieron condiciones de borde tipo Neumann. Esto puede deberse a la falta de simetría en que se incurre en estas zonas para la construcción de la *nube*. Este efecto no se presentó en las fronteras Dirichlet por cuanto esta condición de borde se impuso mediante multiplicadores de Lagrange.

REFERENCIAS

- 1 B. Nayroles, G. Touzot y P. Villon, “La méthode des éléments diffus”, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Vol. **313**, Serie II, pp. 133–138, (1991).
- 2 B. Nayroles, G. Touzot y P. Villon, “L’approximation diffuse”, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Vol. **313**, Serie II, pp. 293–296, (1991).
- 3 B. Nayroles, G. Touzot y P. Villon, “Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse element”, *Comput. Mechanics*, Vol. **10**, pp. 307–318, (1992).
- 4 P. Lancaster y K. Salkauskas, “Surfaces generated by moving least squares methods”, *Mathematics of Computation*, Vol. **37**, pp. 141–158, (1981).
- 5 Y. Krongauz y T. Belytschko, “A Petrov-Galerkin diffuse element method (PG DEM) and its comparison to EFG”, *Comput. Mechanics*, Vol. **19**, pp. 327–333, (1997).
- 6 T. Belytschko, Y.Y. Lu y L. Gu, “Element-free Galerkin methods”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **37**, pp. 229–256, (1994).
- 7 L. Gavete, S. Falcón y A. Ruiz, “Some results on the diffuse approximation using Galerkin methods”, *Métodos Numéricos en Ingeniería ’96*, pp. 499–505, (1996).
- 8 R.L. Taylor, O.C. Zienkiewicz, E. Oñate y S. Idelsohn, “*Moving least square approximations for the solution of differential equations*”, Publicación **74**, CIMNE, 1995.